This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Acerca de este libro

Esta es una copia digital de un libro que, durante generaciones, se ha conservado en las estanterías de una biblioteca, hasta que Google ha decidido escanearlo como parte de un proyecto que pretende que sea posible descubrir en línea libros de todo el mundo.

Ha sobrevivido tantos años como para que los derechos de autor hayan expirado y el libro pase a ser de dominio público. El que un libro sea de dominio público significa que nunca ha estado protegido por derechos de autor, o bien que el período legal de estos derechos ya ha expirado. Es posible que una misma obra sea de dominio público en unos países y, sin embargo, no lo sea en otros. Los libros de dominio público son nuestras puertas hacia el pasado, suponen un patrimonio histórico, cultural y de conocimientos que, a menudo, resulta difícil de descubrir.

Todas las anotaciones, marcas y otras señales en los márgenes que estén presentes en el volumen original aparecerán también en este archivo como testimonio del largo viaje que el libro ha recorrido desde el editor hasta la biblioteca y, finalmente, hasta usted.

Normas de uso

Google se enorgullece de poder colaborar con distintas bibliotecas para digitalizar los materiales de dominio público a fin de hacerlos accesibles a todo el mundo. Los libros de dominio público son patrimonio de todos, nosotros somos sus humildes guardianes. No obstante, se trata de un trabajo caro. Por este motivo, y para poder ofrecer este recurso, hemos tomado medidas para evitar que se produzca un abuso por parte de terceros con fines comerciales, y hemos incluido restricciones técnicas sobre las solicitudes automatizadas.

Asimismo, le pedimos que:

+ *Haga un uso exclusivamente no comercial de estos archivos* Hemos diseñado la Búsqueda de libros de Google para el uso de particulares; como tal, le pedimos que utilice estos archivos con fines personales, y no comerciales.

+ *No envíe solicitudes automatizadas* Por favor, no envíe solicitudes automatizadas de ningún tipo al sistema de Google. Si está llevando a cabo una investigación sobre traducción automática, reconocimiento óptico de caracteres u otros campos para los que resulte útil disfrutar de acceso a una gran cantidad de texto, por favor, envíenos un mensaje. Fomentamos el uso de materiales de dominio público con estos propósitos y seguro que podremos ayudarle.

+ *Conserve la atribución* La filigrana de Google que verá en todos los archivos es fundamental para informar a los usuarios sobre este proyecto y ayudarles a encontrar materiales adicionales en la Búsqueda de libros de Google. Por favor, no la elimine.

+ *Manténgase siempre dentro de la legalidad* Sea cual sea el uso que haga de estos materiales, recuerde que es responsable de asegurarse de que todo lo que hace es legal. No dé por sentado que, por el hecho de que una obra se considere de dominio público para los usuarios de los Estados Unidos, lo será también para los usuarios de otros países. La legislación sobre derechos de autor varía de un país a otro, y no podemos facilitar información sobre si está permitido un uso específico de algún libro. Por favor, no suponga que la aparición de un libro en nuestro programa significa que se puede utilizar de igual manera en todo el mundo. La responsabilidad ante la infracción de los derechos de autor puede ser muy grave.

Acerca de la Búsqueda de libros de Google

El objetivo de Google consiste en organizar información procedente de todo el mundo y hacerla accesible y útil de forma universal. El programa de Búsqueda de libros de Google ayuda a los lectores a descubrir los libros de todo el mundo a la vez que ayuda a autores y editores a llegar a nuevas audiencias. Podrá realizar búsquedas en el texto completo de este libro en la web, en la página `http://books.google.com`

TRATADO

DE

JEOMETRIA DESCRIPTIVA.

TOMO PRIMERO.—TESTO.

TRATADO

DE

JEOMETRIA DESCRIPTIVA,

ACOMPANADO

DEL METODO DE LOS PLANOS DE ACOTACION DE LA TEORIA DE LOS ENGARGANTES CILINDRICOS Y CONICOS.

CON UNA COLECCION DE DEPURADOS COMPUESTA DE 69 LAMINAS;

Escrita en Frances

Por C. F. A. LEROY,

Profesor de la Escuela Politécnica, maestro de conferencias de la Escuela Normal, Cavallero de la Lejion de Honor;

Traducida de la segunda Edicion

Por D. ANDRES ANTONIO DE GORBEA,

Director del cuerpo de Injenieros Civiles, Decano de la Facultad de Ciencias Matemáticas y Físicas de la Universidad de Chile, profesor de estas mismas ciencias en el Instituto Nacional, y Director del Museo de Historia Natural de esta República.

TOMO I.—TESTO.

SANTIAGO,

IMPRENTA DEL PROGRESO.

— 1845. —

M.Sw.

823585

Al Sr. D. Manuel Montt.

Ministro de Justicia, Culto e Instruccion Pública de la República de Chile, &a., &a.

Ninguno mejor que U. S. conoce lo que contribuye al adelantamiento de la Instruccion: la posesion de un testo de la ciencia que se trata de enseñar; en él pueden los alumnos meditar y comparar las verdades que oyeron a sus instructores, sin cuyo ausilio serian débiles y fugaces las impresiones que la mas empeñosa constancia tratase de imprimirles; los resultados de esta verdad los sintió U. S. en el tiempo que con tantas ventajas en la mejora de la Instruccion pública, dirijió los estudios del Instituto Nacional. Manifiestos fueron a U. S. en todo este tiempo mis incesantes esfuerzos por la jeneralizacion del estudio de la Jeometría descriptiva, que con razon puede llamarse la ciencia propagadora de los inventos; y si estos no fueron inútiles por ser constantes los adelantamientos que en ella hicieron los jóvenes que la estudiaron, a lo ménos, la copia de cuadernos y de figuras jeneralmente complicadas hechas por personas que ignoraban los primeros elementos de la ciencia, añadieron a la incorreccion consiguiente de estos dos objetos, la pérdida de tiempo necesario a las infinitas aplicaciones que de ella debian hacerse.

En este estado, llegó a mis manos la primera edicion de la excelente obra que sobre esta ciencia escribió M. Leroy, profesor de la Escuela Politécnica de París, y propuse a U. S., cuando ya ocupaba el alto puesto que tan dignamente desempeña, su traduccion

en beneficio de la juventud estudiosa, y mediante su influjo, decretó el Supremo Gobierno su impresion, y tuvo a bien encargar a Francia la coleccion de láminas que el mismo M. Leroy remitió puntualmente acompañándolas con la segunda edicion de su obra; pero cuando ésta llegó habia ya impresos algunos pliegos de la primera: sin embargo de esto, como las variaciones hechas en estas primeras hojas eran mui pocas, creí poder conservar el trabajo ya ejecutado y continuar lo demas por la segunda edicion.

Nada tengo que decir a U. S. sobre la utilidad de esta ciencia, cuyo estudio es indispensable en toda sociedad que desee ponerse al corriente de los innumerables descubrimientos que en la maquinaria, artes y construccion de todas clases hacen las naciones mas adelantadas; por sus métodos, un pliego de papel es suficiente para comunicar a las mayores distancias el invento mas complicado, y ejecutarlo, siguiendo sus procedimientos, con tanta exactitud como si su mismo inventor la hubiese dirijido; a ella sin duda ninguna se debe el grado de perfeccion que admiramos en toda clase de contrucciones; y persuadido el Gobierno Frances de estas manifiestas ventajas, decretó el establesimiento de una escuela especial de Jeometría descriptiva en cada departamento.

He puesto todo el esmero posible en la jenuina version y exacta correccion de la obra, con el fin de que la traduccion se aproxime cuanto me ha sido posible a la excelencia del orijinal, y sea, así como este lo es en Francia, un tratado de pública utilidad, y un noble estímulo a la estudiosa juventud chilena.

Dígnese V. S. recibir este lijero obsequio de amistad, como una pequeña muestra del afecto con que siempre ha distinguido a su servidor

Santiago, 21 de enero de 1845.

ANDRES ANTONIO DE GORBEA.

ADVERTENCIA DEL AUTOR.

Los procedimientos, las mas veces injeniosos, de que se servian los Canteros y Carpinteros para construir un depurado, eran ciertamente conocidos desde mui atras; pero por lo comun no ofrecian sino métodos aislados, particulares a cada problema, y que cada artista debia inventar a medida que se aventuraban en nuevas combinaciones de bóvedas. Solo a fines del último siglo fue cuando el célebre Monge compiló estos varios procedimientos en un cuerpo de doctrina, cuyos principios jenerales espuso bajo el título de Jeometría descriptiva; de este modo, creó una ciencia, tan propia para representar los cuerpos con exactitud, como para darnos los medios mas espeditos de indagar las propiedades jenerales de la estension considerada de un modo abstracto. La obra que sobre la materia ha escrito este ilustre Jeometra, es sin duda ninguna un modelo de claridad; pero deja vacíos en muchas teorías importantes, y no presenta ejemplos bastante numerosos y variados para que el lector pueda adquirir el hábito que require el método de proyeccion. Es ademas mui esencial que los depurados estén siempre trazados segun un sistema de puntuacion sujeto a reglas constantes, para que así puedan manifestar sin ambigüedad, y por medio de una especie de lenguaje sensible al ojo del espectador, la respectiva posicion de las diversas partes del objeto definido.

Con este doble objeto se ha escrito la presente obra, en la cual he seguido el órden adoptado por el programa de la Escuela Politécnica; a lo ménos en cuanto lo permiten las diferencias que necesariamente hai entre un tratado escrito y un curso oral, en que la distribucion de las materias debe subordinarse al tiempo que los alumnos necesitan para ejecutar, en el intervalo de las lecciones, los trabajos gráficos que dicen relacion

a ellas. Sin embargo, al muntiplicar los ejemplos relativos a los problemas de los planos tanjentes y de las intersecciones de las superficies, que es lo que dará lugar a los alumnos para que puedan variar entre sí los datos de una misma cuestion, no he creido deberme circunscribir a los límites de este programa, que la corta duracion de los estudios de la Escuela Politécnica ha motivado a restrinjir mucho; sino que he tenido el designio de presentar a los injenieros y a las personas, que ya sea por gusto o por su estado, quieran profundizar esta ciencia susceptible de tantas y tan diversas aplicaciones, los medios de estudiar todos los recursos de la Jeometría descriptiva. Por consiguiente, me he estendido en las superficies desarrollables y las envolventes, en las helizoides desarrollables o gausas, en la curbatura y evolutas de las curbas gausas, en la curbatura de las superficies y sus líneas de curbatura cuya teoría he establecido por medio de consideraciones sintéticas, acompeñándolas de diversos ejemplos. En cuanto a las superficies gausas, tan importantes por el frecuente uso que de ellas se hace en las artes, me ha convencido una larga esperiencia que por de pronto era mejor no citar sino algunos ejemplos mui sencillos de estas superficies, para evitar de este modo que los alumnos las confundiesen con las que son desarrollables; y en seguida, reunir todas las partes de la teoría completa de esta clase de superficies en un libro separado, cuya teoría he tenido cuidado de apoyar tambien en númerosos ejemplos, en los cuales se realizan las construcciones indicadas en la esposicion jeneral. Este órden tiene ademas la ventaja de estar de acuerdo con la marcha del curso de la Escuela Politécnica, en el que no se presentan las propiedades jenerales de las superficies gausas, sino en una época próxima a sus aplicaciones a la Estereotomía, que hace resaltar mas toda su importancia. Finalmente, se han reunido en las *Adicciones* algunos teoremas útiles para las Sombras y la Perspectiva, con una esposicion sucinta del método de los *Planos de acotacion* que sirve para los dibujos de Fortificacion.

En esta segunda edicion, he añadido muchos depurados nuevos, y la teoría y trazado de los *Engargantes*, ha aumentado en *nueve* el número de las Láminas. En cuanto a la obra que he anunciado sobre las Sombras, la Perspectiva y la Estereotomía ya están terminados la redaccion y los dibujos para los dos tercios del volúmen, y me esforzaré en completarla tan pronto como me sea posible.

TABLA DE LAS MATERIAS.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS.

CAPITULO I. Nociones preliminares.

Objeto de la Jeometría descriptiva..... 1
Medios de representar gráficamente los puntos y las líneas..... 4
Medio de hallar las trazas de una recta..... 13
Reglas sobre la puntuacion de las líneas..... 15

CAPITULO II. Problemas sobre las rectas y los planos.

Construir la recta que pase por dos puntos dados, y hallar la distancia de estos puntos..... 17
Hallar sobre una recta conocida, un punto que esté a una distancia δ de un punto dado sobre esta misma línea..... 20
Por un punto dado, tirar una recta paralela a una recta conocida..... 21
Construir el plano que pase por tres puntos dados, o por una recta y un punto dados 22
Por un punto dado, tirar un plano paralelo a otro plano conocido..... 23
Conociendo una sola proyeccion de un punto o de una recta que sabemos se hallan en un plano conocido, hallar la segunda proyeccion..... 25
Hallar la interseccion de dos planos dados..... 27
Construir la interseccion de una recta y de un plano..... 30
Por un punto dado, tirar una recta que encuentre a otras dos..... 32
Cuando una recta es perpendicular a un plano, sus proyecciones son respectivamente perpendicularas a las trazas de este plano..... 33
Hallar la menor distancia de un punto a un plano dado..... 35
Hallar la menor distancia de un punto a una recta..... 36
Otra solucion de este problema..... 37
Hallar sobre una recta conocida, un punto que esté a una distancia δ de un punto dado en el espacio..... 38
Hallar los ángulos de un plano dado con los planos de proyeccion..... 39

Tirar por un punto dado un plano que forme ángulos conocidos con los dos planos de proyeccion..... 40
Construir el ángulo comprendido entre dos planos dados..... 41
Hallar el ángulo de dos rectas, y dividir este ángulo en dos partes iguales.... 43
Hallar el ángulo formado por una recta con un plano..... 45
Construir la menor distancia entre dos rectas dadas..... 47
Representacion de un paralelipípedo definido por ciertas condiciones..... 52

CAPITULO III. Resolucion del ángulo tiedro.

Elementos de un ángulo tiedro, y relaciones que tienen con los del ángulo tiedro suplementario..... 53
Dadas las tres caras de un ángulo tiedro, hallar los ángulos diedros..... 59
Reducir un ángulo al horizonte..... 61
Dadas dos caras y el ángulo comprendido, hallar las otras partes..... 62
Dadas dos caras y el ángulo opuesto, hallar las otras partes..... 63
Solucion directa de los otros tres casos..... 66

LIBRO II.

DE LAS SUPERFICIES Y DE SUS PLANOS TANJENTES.

CAPITULO I. De la jeneracion de las superficies y de su representacion gráfica.

Definicion exacta de una superficie..... 70
Jeneracion de las superficies cónicas o cilíndricas..... 71
Jeneracion de las superficies de revolucion..... 75
Jeneraeion de las cinco superficies de segundo grado..... 80
Representacion gráfica de una superficie..... 93

CAPITULO II. De los planos tanjentes en jeneral.

Definicion y existencia del plano tanjente. Escepciones..... 95
El carácter esencial del plano tanjente no obsta para que pueda cortar a la superficie 98
En los cilindros y conos, el plano tanjente es comun en todo el largo de una misma jeneratriz..... 99
Una curba y su tanjente se proyectan siempre segun líneas tanjentes entre sí.. 102
Regla jeneral para construir el plano tanjente de una superficie. De la normal.. 103
Determinacion del contorno aparente de una superficie, sobre cada uno de los planos de proyeccion..... 105
Convenio para la puntuacion de los planos indefinidos..... 108

CAPITULO III. De los planos tanjentes a los cilindros y a los conos.

Construir el plano tanjente a un cilindro por un punto dado sobre la superficie.. 109

Tirar un plano tanjente a un cilindro por un punto esterior..... 116
Tirar a un cilindro un plano tanjente paralelo a una recta dada..... 117
Por un punto dado sobre una superficie cónica, tirarle un plano tanjente.... 119
Tirar un plano tanjente a una superficie cónica, por un punto esterior..... 123
Tirar a un cono, un plano tanjente paralelo a una recta dada..... 124
Por una recta dada, tirar un plano que forme un ángulo conocido con el plano horizontal..... 126
Tirar un plano tanjente a un cilindro o a un cono, de modo que forme un ángulo dado con el plano horizontal..... 127
Por un punto dado, tirar una recta tanjente a un cono y paralela a un plano conocido 128

CAPITULO IV. De los planos tanjentes a las superficies de revolucion cuando se nos da el punto de contacto.

El plano tanjente a una superficie de revolucion, es siempre perpendicular al plano meridiano correspondiente..... 129
La normal de una superficie de revolucion, va siempre a encontrar al eje; y todas las normales a los varios puntos de un mismo paralelo, forman un cono recto 130
Por un punto dado sobre una superficie de revolucion, tirarle un plano tanjente 131
Construccion de la normal..... 136
Modo de trazar las proyecciones de diversas meridianas..... 137
Del plano tanjente al toro; observacion sobre la posicion de este plano respecto a la napa interior..... 138
Hiperboloide de revolucion de una napa : se demuestra que esta superficie admite dos jeneraciones rectilíneas..... 140
Observacion sobre el plano tanjente de esta superficie..... 142
Las rectas de un mismo sistema no se hallan nunca, de dos en dos, en el mismo plano, y la superficie es gausa..... 143
Del cono asíntota del hiperboloide..... 146
Representacion gráfica del hiperboloide..... 148
Construccion del plano tanjente a esta superficie; aquí se verifica que este plano es tanjente en un solo punto, y secante en los otros..... 152

LIBRO III.

DE LAS SUPERFICIES DESARROLLABLES Y DE LAS ENVOLVENTES

CAPITULO I. De las superficies desarrollables.

Definicion de las superficies desarrollables..... 156
Principios del método infinitesimal..... 157

Una superficie cilíndrica es siempre desarrollable ; en que se convierten entónces la seccion recta y las jeneratrices de esta superficie..... 160
Una curba situada sobre el cilindro, se transforma en otra curba cuyos arcos tienen la misma lonjitud, y sus tanjentes forman con las jeneratrices los mismos ángulos que primitivamente..... 162
Condiciones para que una curba trazada sobre un cilindro se convierta en rectilínea despues de desarrollada esta superficie..... 163
Una curba de esta naturaleza se llama hélice y es la línea *mínima* entre dos de sus puntos..... 164
Todas las hélices son líneas de doble curbatura, ménos la *seccion recta*..... 165
Del plano osculador de una línea de doble curbatura. Del plano normal..... 167
Una superficie cónica es siempre desarrollable; hecha esta transformacion, las jeneratrices conservan sus lonjitudes primitivas, lo mismo que los arcos de una curba cualquiera trazada sobre el cono; y las tanjentes de esta última, forman con las jeneratrices los mismos ángulos que primitivamente..... 169
Condiciones para que una curba trazada sobre un cono, admita una transformada rectilínea : esta curba será la línea *mínima*..... 171
De la curba en que todas las tanjentes formen ángulos iguales con las jeneratrices 173
De las superficies desarrollables jenerales. Su propiedad característica consiste en poder ser enjendradas por una recta móvil, cuyas dos posiciones consecutivas están siempre en un mismo plano..... 174
El plano tanjente de una superficie desarrollable la toca en todo el largo de una jeneratriz..... 177
De la arista de retroceso de una superficie desarrollable. Esta línea conserva la misma curbatura, tanto ántes como despues del desarrollo de la superficie.. 178
Primer modo de enjendrar una superficie desarrollable, sujetando la recta móvil a resbalar sobre dos directrices..... 180
Bastaria una sola directriz, si se exijiese que la recta móvil le fuese constantemente tanjente..... 181
Otros modos de jeneracion, que permiten mirar a toda superficie desarrollable como el involucro de un plano móvil..... 182
Condiciones para que una curba trazada sobre una superficie desarrollable, sea la línea *mínima* entre dos cualesquiera de sus puntos..... 187
La línea *mínima* sobre una superficie desarrollable, tiene siempre sus planos osculadores *normales* a esta superficie..... 188
Este teorema es cierto respecto a la línea *mínima* trazada sobre una superficie cualquiera..... 189

CAPITULO II. De las superficies envolventes.

Definicion de las envolventes, de las involutas y de las características..... 190
Ejemplos de una superficie de revolucion que es envolvente de una esfera, de un cono o de un cilindro móvil..... 191

Usos de las envolventes en las artes..... 195
Evolutas de las curbas planas, volutas, radios de curbatura..... 197
Ejemplos de evolutas en las secciones cónicas..... 200
Espiral voluta de un círculo..... 201
Superficies canales ; en este caso, la característica es un círculo de radio constante, normal siempre a la curba directriz..... 202
Las características forman, al cortarse consecutivamente, una arista de retroceso para el involucro..... 205

LIBRO IV.

DE LAS INTERSECCIONES DE LAS SUPERFICIES.

CAPITULO I. Principios jenerales.

Medios jenerales para hallar la interseccion de dos superficies..... 209
Método para construir la tanjente de la interseccion..... 213
Otro método por medio del plano normal..... 214
Caso en que la línea de interseccion se convierte en una línea de contacto.. 215

CAPITULO II. De las secciones planas.

Seccion de un cilindro recto con un plano. Abatimiento y tanjente..... 217
Desarrollo de la superficie, y transformada de la seccion: esta transformada es una sinusoide..... 222
Nota sobre el punto de *inflexion* de esta transformada..... 226
Utilidad de estos desarrollos en las artes..... 227
Otra solucion de la interseccion de un cilindro recto con un plano..... 228
Hallar los puntos de encuentro de un plano con una curba..... 233
Seccion recta de un cilindro oblícuo. Segundo método..... 235
Construccion de los puntos notables. Tanjente y abatimiento..... 239
Desarrollo de la superficie, y transformada de la base primitiva..... 243
Seccion de un cono recto con un plano. Tanjente y abatimiento..... 246
Desarrollo de la superficie, y transformada de la seccion..... 251
Nota sobre la equacion de la transformada..... 253
Caso en que la seccion cónica es una hipérbola. Asíntotas y abatimiento.. 255
Desarrollo de la superficie cónica, y transformada de la seccion con sus asíntotas. Del punto de *inflexion*..... 261
Seccion plana de un cono cualquiera ; desarrollo..... 265
Seccion de un toro por su plano tanjente. Tanjente en un punto multiplo.. 268
Seccion de un hiperboloide de revolucion de una napa, por un plano dado... 271
Discusion relativa a los vértices y al jénero de la seccion..... 273

***

Tanjente a la seccion, y abatimiento..... 275
Indagaciones de las ramas infinitas. De las asíntotas. Ejemplo..... 277
Interseccion de una recta con un hiperboloide de revolucion de una napa.... 284

CAPITULO III. Intersecciones de dos superficies curbas.

Interseccion de dos cilindros..... 288
Puntos notables, y tanjente a la interseccion..... 290
Regla para discernir los puntos visibles de los invisibles..... 294
Distincion de los casos de penetracion y de arranque..... 295
Observaciones sobre las ramas infinitas..... 296
Interseccion de dos superficies cónicas. Puntos notables. Tanjente..... 297
Reglas para discernir los arcos visibles..... 303
Otro ejemplo que da lugar a ramas infinitas. De las asíntotas..... 306
Interseccion de un cono y de un cilindro..... 316
Interseccion de un cono y de una esfera concéntricos..... 319
De la tanjente y de los puntos en que esta recta es horizontal..... 322
Tirar una normal a una curba, por un punto dado en su plano..... 324
Tirar una tanjente a una curba, por un punto dado en su plano..... 327
Otra solucion de este último problema..... 328
Desarrollo de una superficie cónica de base cualquiera..... 330
Interseccion de dos superficies de revolucion cuyos ejes se encuentran.... 332
La tanjente a la curba puede construirse por dos métodos..... 338
El segundo es aplicable a los puntos singulares..... 340
Interseccion de un paraboloide con un hiperboloide, ámbos de revolucion, y cuyos ejes se cortan. De la tanjente..... 341

LIBRO V.

DE LOS PLANOS TANJENTES CUYO PUNTO DE CONTACTO NO ES DADO.

CAPITULO I. De los planos tanjentes tirados por un punto esterior a la superficie.

En toda superficie, existe en jeneral un cono circunscrito cuya cúspide está en el punto dado, y cuya línea de contacto nos dará todas las soluciones del presente problema..... 347
Respecto a una superficie desarrollable, el problema es determinado..... 349
Respecto a una superficie de segundo grado, la curba de contacto de un cono circunscrito es siempre plana, y su plano es siempre paralelo al plano diametral conjugado con el diámetro que pasa por la cúspide del cono.... 353

En toda superficie de segundo grado, las secciones paralelas son curbas semejantes, cuyos centros están situados sobre el diámetro que es conjugado con aquel de estos planos pasa por el centro de la superficie.. 354
Hallar la curba de contacto de una superficie de revolucion con un cono circunscrito, cuya cúspide conocemos..... 356
Método del paralelo. Método del meridiano..... 357
Construccion de los puntos notables..... 362
Tercer método, por una involuta esférica..... 365
Por un punto dado, tirar un plano tanjente a una superficie de revolucion que la toque sobre un paralelo o sobre un meridiano dado..... 367
Hallar la curba de contacto de una superficie *cualquiera* de segundo grado, con un cono circunscrito cuya cúspide se nos dé..... 369

CAPITULO II. De los planos tanjentes paralelos a una recta dada.

En jeneral existe para toda superficie, un cilindro circunscrito, cuyas aristas son paralelas a una recta dada, y cuya línea de contacto nos dará todas las soluciones del actual problema..... 377
Cuando la superficie es desarrollable, el problema es determinado..... 379
Respecto a una superficie de segundo grado, la línea de contacto del cilindro circunscrito es siempre plana, y está situada en el plano diametral que es conjugado con el diámetro paralelo al cilindro..... 381
Hallar la curba de contacto de una superficie de revolucion, con un cilindro circunscrito y paralelo a una recta dada..... 383
Método del paralelo. Método del meridiano..... 384
Construccion de los puntos notables..... 388
Tercer método, por una involuta esférica..... 391
Tirar un plano tanjente a una superficie de revolucion que sea paralelo a una recta dada y que toque a la superficie sobre un paralelo, o un meridiano asignado 392
Hallar la curba de contacto de una superficie *cualquiera* de segundo grado, con un cilindro circunscrito y paralelo a una recta dada..... 394

CAPITULO III. De los planos tanjentes tirados por una recta dada.

El método jeneral consiste en combinar entre sí dos conos circunscritos a la superficie, o sino un cono con un cilindro..... 395
Consecuencias particulares a las superficies y a las curbas de segundo grado.. 398
Por una recta dada, tirar un plano tanjente a una esfera..... 401
Segundo y tercer método..... 403
Cuarto método, útil cuando están mui distantes las trazas de la recta..... 405
Tirar por una recta dada un plano tanjente a una superficie de revolucion.... 406
Casos particulares..... 407
Otros dos métodos, particulares a las superficies de segundo grado..... 408
Tirar por un punto dado un plano tanjente a un hiperboloide gauso de revolucion. Otra solucion del mismo problema..... 410

Tirar par una recta dada, un plano tanjente a una superficie *cualquiera* de segundo grado. Otro método en que solo se emplean la línea recta y el círculo.... 417

CAPITULO IV. De los planos tanjentes paralelos a un plano dado.

Método jeneral para resolver los problemas de este jénero..... 421
Se reducen a tirar una normal paralela a una recta dada..... 422
Casos particulares en que se simplifica la solucion..... 424

CAPITULO V. De los planos tanjentes a varias superficies.

Método jeneral para hallar un plano que toque a un mismo tiempo a dos superficies dadas..... 425
Superficie desarrollable circunscrita a dos superficies propuestas..... 426
Tirar por un punto dado, un plano tanjente a dos superficies..... 430
Del plano que tocase a tres superficies, o a un número mayor de ellas..... 431
Hallar un plano que toque a la vez a una esfera y a un cono recto..... 434
Tirar por un punto dado un plano tanjente a dos esferas..... 437
Hallar un plano que sea tanjente a tres esferas..... 441
Consecuencia relativa a las tanjentes comunes a tres círculos..... 445

LIBRO VI.

CUESTIONES DIVERSAS.

CAPITULO I. De la hélice y del helizoide desarrollable.

Definicion de la hélice..... 446
Indagaciones de su tanjente; lonjitud de su subtanjente..... 448
La lonjitud de un arco de hélice es igual a la de su tanjente..... 449
La inclinacion de las diversas tanjentes con las jeneratrices es constante.... 450
Construir las proyecciones de una hélice trazada sobre un cilindro recto de base circular. Equaciones de estas proyecciones..... 451
Construccion de la tanjente a la hélice; el lugar de los pies de todas las tanjentes es la *voluta* de la base del cilindro..... 452
Tirar una tanjente a una hélice que sea paralela a un plano dado..... 454
Helizoide desarrollable; de su jeneracion y de su representacion gráfica.... 456
Esta superficie puede construirse con facilidad de bulto..... 458
Las secciones horizontales son espirales volutas del círculo..... 459
Las secciones producidas por los cilindros concéntricos en la hélice primitiva, son otras hélices del mismo paso que la primera..... 460
Del plano tanjente al helizoide..... 462

Desarrollo del helizoide; en esta transformacion, las hélices se convierten en círculos concéntricos. Radio de curbatura de una hélice..... 465

CAPITULO II. De las epicicloides.

En la rotacion de una curba sobre otra, la línea descrita por el punto jenerador tiene por *normal* a la recta que termina en el contacto de la curba móvil.. 469
De la epicicloide plana. Esta puede ser alongada o recojida..... 471
Epicicloides interiores. Epicicloide rectilínea..... 474
Caso de la cicloide ordinaria y de la voluta de círculo..... 478
Epicicloide esférica. De su tanjente, por dos métodos. Puntos singulares..... 480
Voluta esférica. Construcoion de su tanjente..... 493

CAPITULO III. Sobre las esferas y las pirámides.

Hallar la interseccion de tres esferas dadas..... 497
Consecuencias relativas a la interseccion de tres círculos..... 498
Construir una pirámide cuyas seis aristas conocemos..... 499
Circunscribir una esfera a una pirámide triangular..... 500
Jeneralmente, hallar una esfera tanjente a cuatro planos..... 503
Construir un punto cuyas distancias a tres puntos dados se conocen, o a tres planos conocidos, o a tres rectas dadas..... 504
Determinacion de un punto por el conocimiento de los tres ángulos que forman con la vertical, o entre sí, los radios visuales tirados desde este punto a tres puntos conocidos..... 506

LIBRO VII.

DE LAS SUPERFICIES GAUSAS.

CAPITULO I. Nociones jenerales de las superficies gausas.

Definicion de las superficies gausas. Los planos tanjentes relativos a los diversos puntos de una misma jeneratriz, son distintos unos de otros..... 510
El plano que es tanjente a una superficie gausa en un punto, es secante en todos los otros puntos comunes..... 512
El medio jeneral de hacer que una recta móvil describa una superficie gausa, es sujetar aquella a resbalar sobre tres curbas fijas..... 513
Podemos tambien hacer resbalar una recta móvil sobre dos curbas, conservándola siempre paralela a un plano director fijo..... 515
Otras condiciones que pueden arreglar el movimiento de la jeneratriz..... 516
Definicion de los conoides y de las superficies gausas de segundo grado..... 520

****

Las proyecciones de estas curbas son espirales de Arquímedes..... 643
De la tanjente a la curba de arista, por un punto cualquiera..... 645
Construccion de esta recta en el *punto multiplo* y en el arranque..... 646

LIBRO VIII.

DE LA CURBATURA DE LAS LINEAS Y DE LAS SUPERFICIES.

CAPITULO I. Sobre la curbatura y las evolutas de las líneas.

Definicion de los contactos de diferentes órdenes entre dos curbas; del círculo osculador del plano osculador en un punto dado sobre una curba..... 649
La curbatura de una curba en cada punto de esta, tiene por medida exacta la razon de la unidad al radio del círculo osculador..... 653
Las curbas gausas no tienen sino una sola curbatura, pero presentan una torsion que se mide por el ángulo de dos planos osculadores vecinos.... 654
Los radios de curbatura de una curba gausa no se cortan consecutivamente, y en virtud de esto, los centros de curbatura no forman una *evoluta*..... 655
Sin embargo, una curba gausa admite una infinidad de evolutas, todas situadas sobre una superficie desarrollable, y en esta son las líneas *mínimas*.... 658
Caso en que la curba propuesta es esférica..... 660
Si es plana, todas sus evolutas se convierten en hélices..... 661
Observaciones sobre la posicion del círculo osculador y del plano osculador que ordinariamente cruzan a la curba propuesta..... 662
Construir el plano osculador relativo a un punto dado sobre una curba..... 664
Construir el radio de curbatura de una curba, en un punto dado..... 665
Método jeneral para construir una evoluta de una curba cualquiera, y el lugar de sus centros de curbatura..... 667
Dada una voluta esférica, hallar el lugar de sus centros de curbatura, y una de sus evolutas..... 669
Dada una hélice de base circular, construir el lugar de sus centros de curbatura y una de sus evolutas. Probarémos primeramente que el lugar de todas las evolutas es un helizoide desarrollable, cuya arista de retroceso contiene a los centros de curbatura de la hélice primitiva..... 672
El radio de curbatura de la hélice primitiva y el de la hélice arista de retroceso del helizoide, son cada uno iguales a la suma de los radios de los cilindros en que están situadas estas dos hélices..... 674
Valor analítico de estos radios de curbatura..... 676
Construccion de una evoluta de la hélice primitiva. De sus diversas ramas y de sus asíntotas..... 677

CAPITULO II. De la curbatura de las superficies.

Definicion de dos superficies osculadoras en un punto comun..... 684
Relacion entre los radios de curbatura de las secciones normales que pasan por una misma cúspide del elipsoide..... 685
Caso de un hiperboloide gauso. De los planos normales *límites*..... 686
En cada punto de una superficie cualquiera, existen dos secciones normales *principales*, situadas en planos perpendiculares, de las cuales una tiene un radio de curbatura *mínimo*, y la otra un *máximo*; estos radios están relacionados con el radio de otra seccion normal por medio de una relacion idéntica con la que hemos hallado respecto a la superficie de segundo grado..... 690
Discusion de la curbatura de las secciones normales en una superficie convexa; de los *ombligos*..... 691
Discusion análoga relativa a una superficie no convexa. De los planos normales *límites*. Nota sobre el teorema de *Meunier*..... 693
Se demuestra sintéticamente que para cada punto de una superficie cualquiera, puede hallarse un elipsoide, o un hiperboloide gauso, que sea *osculador* de la superficie propuesta..... 696
De las líneas de curbatura de una superficie. Se demuestra en primer lugar que en la cúspide de un elipsoide o de un hiperboloide gauso, no existen sino dos líneas de curbatura..... 699
Se prueba tambien que sobre una superficie jeneral, no hai, para cada punto, sino dos líneas de curbatura, que son rectangulares, supuesto que son tanjentes a las dos secciones principales..... 702
Ejemplos de diversas líneas de curbatura y de las secciones principales, sobre las superficies de revolucion, los cilindros, los conos, las superficies desarrollables y las superficies gausas..... 707
De las dos napas que contienen a los centros de las dos curbaturas de una superficie cualquiera..... 714
De la línea de las curbaturas esféricas..... 721
Observaciones sobre las aplicaciones de estas teorías a ciertas artes..... 723
Determinacion gráfica de las líneas de curbatura..... 725
En las superficies no convexas, los planos normales *límites* tienen por trazas sobre el plano tanjente, las tanjentes a la interseccion de este plano con la superficie 730
Aplicacion a la indagacion de las tanjentes en el punto multiplo de la seccion del toro por su plano tanjente..... 734
Construccion de las líneas de curbatura sobre un elipsoide..... 735
Aplicacion de estos resultados, propuesta por Monge..... 741
Construccion del hiperboloide que es osculador de una superficie gausa, en todo el largo de una jeneratriz..... 744

*****

LIBRO IX.

ADICIONES.

CAPITULO I. *Teoremas diversos.*

Cuando un cilindro penetra a una esfera por una curba plana, la curba de salida es tambien plana, e igual a la curba de entrada..... 745
En la interseccion de un cono con una esfera, si la curba de entrada es plana, tambien lo es la curba de salida; y se halla en la seccion antiparalela del cono 746
Cuando dos cilindros de segundo grado se cortan segun una curba plana, la curba de salida es tambien plana..... 748
Cuando dos superficies de segundo grado tienen un *eje comun*, o dos planos tanjentes comunes, no pueden cortarse sino segun dos curbas planas.... 750
Demostracion directa para el caso de dos lechos cilíndricos, que tienen el mismo plano de arranque y la misma montea..... 753
Observacion sobre la tanjente a la interseccion de dos superficies, en el punto particular en que se tocan..... 754
Teorema sobre las tanjentes conjugadas..... 755

CAPITULO II. *Método de los planos de acotacion.*

Utilidad de este método de representacion en ciertas artes..... 759
Definicion gráfica de un punto y de una recta; construccion de la escala de pendiente de esta línea; problemas diversos sobre las rectas..... 761
Representacion gráfica de una curba..... 769
Representacion gráfica de un plano limitado, o indefinido..... 770
Diferentes problemas sobre los planos y las rectas..... 773
Las superficies curbas se representan por medio de secciones de nivel equidistantes, y acotadas; elementos de las líneas de mayor pendiente..... 789
Hallar la acotacion de un punto situado sobre una superficie conocida, y dada por su proyeccion horizontal, o recíprocamente..... 793
Construir el plano tanjente para un punto dado sobre una superficie conocida 795
Observaciones sobre la posicion del plano tanjente respecto a la superficie.... 797
Hallar la interseccion de un plano con una superficie..... 800
Hallar la interseccion de una recta con una superficie..... 802
Interseccion de dos superficies, o de una superficie con una curba..... 803

CAPITULO III. *Nociones preliminares sobre los engargantes.*

Definicion de la velocidad angular..... 805
Principio fundamental de todos los engargantes..... 806
Los perfiles conjugados de dos dientes, deben ser *envolventes* uno de otro.... 808
La normal de la envolvente pasa siempre por el punto de contacto del círculo móvil 810
De los centros de curbatura de la envolvente. Construccion gráfica..... 813

Siempre hai *rozamiento* en un engargante..... 817
Envolvente de un punto móvil. Evolutas de la epicicloide..... 819
Envolventes de un círculo. Puntos de retroceso..... 823
Envolventes de un radio del círculo móvil..... 826
La envolvente de una epicicloide, es otra epicicloide..... 828
Envolvente de una voluta de círculo..... 829
Lugar de los contactos sobre el plano fijo de dos círculos..... 831
Límites correspondientes sobro los perfiles conjugados..... 832

CAPITULO IV. Trazado de los engargantes planos o cilíndricos.

Trazado de los círculos primitivos. Determinacion de las bases, vacíos y *juego* de los dientes de las dos ruedas..... 835
Engargantes de flancos, simétricos y recíprocos..... 838
Límites de las escopleaduras. Chaflanamiento de los dientes..... 841
Engargante de flancos, no recíproco..... 849
Barra dentada movida por una rueda tambien dentada..... 851
Engargante de flanco, interior. Este no puede ser recíproco..... 854
Engargante de linterna..... 857
Barra dentada con husillos..... 861
Engargante de voluta..... 863
Este último presenta la ventaja de poder cambiar la distancia de los ejes..... 865
De las camas y majaderos..... 868
De las excéntricas..... 872
Observaciones diversas que prueban que los dientes no deben trabarse ántes de la línea que une los centros..... 875
Límite inferior del número de dientes en cada jénero de engargante..... 880

CAPITULO V. De los engargantes cónicos.

Determinacion de los círculos primitivos..... 881
Principio jeneral para formar las superficies conjugadas de los dos dientes.... 882
Si una de ellas es un *flanco* formado por un plano meridiano, la otra debe ser un cono epicicloidal..... 883
Límites correspondientes del flanco y del diente..... 884
Trazado del depurado..... 886
Límites de los flancos..... 892
Límites de las escopleaduras..... 893
Desarrollo de los cojinetes..... 895
Método aproximado, empleado jeneralmente..... 898

FIN DE LA TABLA DE LAS MATERIAS.

NOMBRES DE LAS LETRAS GRIEGAS

De que se hace uso en esta edicion.

α. . . . . *alpha.*	η. . . . . *eta.*	π. . . . . *pi.*
β. . . . . *beta.*	θ. . . . . *theta.*	ρ. . . . . *ro.*
γ. . . . . *gamma*	λ. . . . . *lambda*	Σ. . . . . *sigma.*
δ. . . . . *delta.*	μ. . . . . *mu.*	Φ, φ. . . . . *phi.*
ε. . . . . *epsilon.*	ν. . . . . *nu.*	ψ. . . . . *psi.*
ζ. . . . . *zeta.*	ξ. . . . . *xi.*	Ω, ω. . . . *omega.*

TRATADO

DE

JEOMETRIA DESCRIPTIVA.

LIBRO PRIMERO.

DE LAS RECTAS Y DE LOS PLANOS.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones preliminares.

1. Cada paso que damos en las ciencias o en las artes, nos convence mas de la necesidad de trasmitir a los demas hombres el conocimiento exacto de las formas que caracterizan a los cuerpos, ya sea para manifestar las razones jeométricas que en ellos se descubren, o ya para guiar a los artistas encargados de reproducir estos objetos, segun formas y dimensiones determinadas con anticipacion. Entre todos los medios conocidos el mas eficaz, y algunas veces el único capaz de llenar completamente este fin es la descripcion gráfica de los cuerpos, y este es tambien, el primer objeto de la Jeomé-

tría descriptiva, cuyos métodos jenerales llegan a ser por su fecundidad, los medios de indagacion mas acomodados, para descubrir propiedades nuevas de la extension, proporciona ademas, el conocimiento de los procederes necesarios para resolver los diferentes problemas de perspectiva, estereométria, fortificacion, etc.

2. Pero aquí se nos presentan dos jéneros de dificultades; en primer lugar, los cuerpos constan siempre de tres dimensiones, y conocemos mui bien que el efectuar sus construcciones en el espacio; seria mui incómodo, cuando no impracticable; es por consiguiente necesario hallar métodos que nos permitan referir todos los puntos del espacio a un solo y mismo plano, o por lo ménos que reduzcan todas las operaciones gráficas a que puedan ejecutarse en este plano único.

3. En segundo lugar, estos métodos deben servir, no a establecer teorías puramente especulativas, sino a la ejecucion de operaciones reales, es pues indispensable que presenten una precision completa en el modo de expresar los datos y los resultados gráficos de cada cuestion; y en esto es en lo que principalmente se diferencian de los procedimientos empleados en la jeometría ordinaria, a lo ménos cuando se consideran las tres dimensiones del espacio. Con efecto, como en la jeometria ordinaria, no están dibujados las figuras, sino para que sirvan de guia a la imajinacion en la serie de raciocinios necesarios para demostrar la verdad de un teorema, no estan trazadas sino de un modo vago, o segun ciertos convenios tácitos que contienen siempre mucho de arbitrario. Para convencerse de esto, basta recordemos el método de resolver el problema de la menor distancia entre dos rectas que no están colocadas en un mismo plano; o si no, aquel en que se trata de hallar el centro y radio de una esfera que se quiere hacer pasar por cuatro puntos dados, verémos facilmente que en estas cuestiones, la Jeometría ordinaria indica mui bien la serie de operaciones que es preciso ejecutar, para llegar a la solucion del problema: pero que no da los medios de efectuar realmente estas construcciones, y de obtener un resultado determinado respecto a la magnitud y posicion de la menor distancia, como tampoco respecto a la lonjitud del radio y posicion del centro de la esfera; es por consiguiente indispensable adoptar en la Jeometría descriptiva otro método de cons-

truccion, que no deje nada que sea arbitrario en la representacion de los datos y resultados, y que nos permita tambien efectuar todas las operaciones gráficas en uno solo y mismo plano; pero estas dos ventajas no se podrán adquirir sino por *el método de las proyecciones*, cuyos principios vamos a exponer.

4. Si desde un punto *a* situado en el espacio, bajamos a un plano fijo VXY una perpendicular *a*A, el pie A de esta recta se llama *la proyeccion* del punto *a* sobre el plano de que se trata. Del mismo modo bajando perpendiculares de todos los puntos de la recta *abd*... la serie de los puntos A,B,D.... forma lo que se llama proyeccion de la recta *abd* sobre el plano fijo; y esta proyecciou es precisamente rectilínea, porque todas estas perpendiculares están contenidas evidentemente en el plano tirado por una de ellas, tal como *a*A y por la recta *ad*, la interseccion *del plano proyectante da*A con el *plano de proyeccion* VXY es la que nos da la proyeccion ABD. FIG. 1.

En jeneral, la proyeccion de una curba cualquiera *mnp* es la serie de los pies de las perpendiculares *m*M, *n*N, *p*P.... bajadas de los diversos puntos de la curba al plano fijo, y esta proyeccion MNP... es una línea cuya curbatura se diferencia jeneralmente de la de la curba dada en el espacio. El conjunto de estas perpendiculares compone una superficie cilíndrica, en el sentido jeneral de esta voz, y se le da el nombre de cílindro proyectante de la curba *mnp*.

5 Esto supuesto, decimos que un punto, una recta o una curba, quedan completamente determinadas de posicion, cuando se señalan sus proyecciones sobre dos planos fijos cuya situacion es conocida, sin que sean paralelos. Con efecto, sean VXY y XYZ dos planos de esta clase, A y A' las proyecciones dadas de un punto colocado en el espacio: si por el punto A levantamos una perpendicular indifinida A*a* al plano VXY, esta perpendicular pasará necesariamente por el punto pedido: este punto deberá tambien hallarse sobre la recta A'*a* levantada perpendicularmente al plano XYZ; y como no puede ocupar en el espacio sino *una sola posicion*, ésta quedará determinada por la interseccion de estas dos perpendiculares. Si las dos rectas A*a* y A'*a* no se encontrasen, no existiría ningun punto del espacio que tuviese por proyecciones a A y A'; esto nos prueba que las dos proyecciones de un punto no deben tomarse arbitrariamente, y que hai entre

ellas una dependencia que mui pronto esplicaremos (nº 10).

FIG. 1. 6. Sean AD y A'D' las proyecciones de una recta desconocida, dadas sobre los dos planos fijos VXY y XYZ. Suponiendo que por la primera pasa un plano indefinido DA*a* perpendicular al VXY, este plano contendrá evidentemente la recta pedida, esta se hallará tambien en el plano D'A'*a* tirado por D'A' perpendicular a XYZ; luego la línea incógnita se hallará necesariamente en la interseccion de estos dos planos, que es una recta única y *determinada*. No habrá en esto mas excepcion, que la del caso en que los dos planos proyectantes DA*a* y D'A'*a* se confundan en uno solo; lo que supone que la recta dada en el espacio, así como tambien sus dos proyecciones son exactamente perpendiculares a la interseccion XY de los dos planos fijos: en cuyo caso no son suficientes estas dos proyecciones para definir la recta en cuestion, y seria preciso pedir otra tercera proyeccion efectuada sobre otro plano fijo que no fuese paralelo a la interseccion de los dos primeros.

7. Finalmente, si se nos dan las proyecciones MNP y M'N'P' de una curba desconocida, supondrémos que por la primera pase un cilindro perpendicular al plano VXY, y por la segunda otro cílindro perpendicular al plano XYZ; la curba pedida deberá hallarse evidentemente situada sobre cada una de estas superficies, y por consiguiente quedarán determinadas su posicion y forma por medios de su interseccion *mnp*, la cual podrá mui bien ser *una curba de doble curbatura*; es decir, una curba que no tenga todos sus puntos situados en un mismo plano.

Así es que desde aquí en adelante, difinirémos gráficamente un punto o una línea por medio de sus dos proyecciones, y cuando digamos que se nos da tal punto o tal línea, debéremos entender que son sus proyecciones las que conocemos. En cuanto a las superficies, verémos mas adelante como debemos modificar el uso de las proyecciones para representarlas cómodamente.

8. En cuanto llevamos dicho, hemos supuesto que las proyecciones se ejecutan por medio de rectas bajadas perpendicularmente al plano fijo. Es cierto que algunas veces, hacemos uso de rectas *oblicuas* al plano, aunque siempre son estas paralelas a una direccion dada, y las consecuencias que hemos establecido en los numeros 5, 6 y 7 siempre

subsisten las mismas; pero es preciso tener graves motivos para adoptar este jénero de proyecciones, por ser en jeneral ménos sencillo y presentar ménos exactitud los resultados gráficos, en virtud de que cuando las rectas se cortan oblicuamente, hai mucha incertidumbre en determinar la posicion exacta de su punto de encuentro. Así es que a no ser que lo advirtamos expresamente, siempre considerarémos las proyecciones ortogonales.

Por iguales motivos, se elijen jeneralmente los planos de proyeccion VXY, XYZ perpendiculares entre sí y para concebirlos con mas facilidad, supondrémos que el primero es *horizontal* y el otro *vertical*. Su interseccion XY, que es una línea interesante, se llama *línea de tierra*.

9. He aquí un método suficiente para expresar gráficamente los datos de un problema, sin que de él resulte ninguna indeterminacion: réstanos ahora modificarlo de modo que puedan ejecutarse todas las construcciones en un solo plano. Para conseguir este objeto, nos figuramos, que despues de haber proyectado los puntos y las líneas de que se trata sobre los dos planos rectangulares VXY, XYZ, ha jirado este último al rededor de la línea de tierra XY, hasta abatirse sobre el plano horizontal, de modo que no forme con él sino un solo y mismo plano VZ', y sobre este último es sobre el que realmente trazarémos todas las construcciones que hubiéramos debido hacer sobre los dos planos primitivos. Esto no obstante, no debemos perder de vista que si admitimos este abatimiento no es sino como un medio de facilitar la ejecucion; y siempre que queramos explicar una operacion por medio de consideraciones jeométricas, deberémos, idealmente, considerar el plano vertical levantado y suponerlo en una situacion perpendicular al plano horizontal.

10. Ejecutado que sea el abatimiento de los planos fijos, verémos que existe entre las dos proyecciones de un mismo punto del espacio una dependencia cuyo cononocimiento es importantísimo; con efecto, las dos rectas A*a* y A*a*' que proyectan el punto *a* a A y A', son perperdiculares una al plano horizontal y otra al plano vertical: y así es que el plano A*a*A', tirado por estas dos rectas, será perpendicular a los dos planos de proyeccion, y por consiguiente lo será tambien a su interseccion comun XY; luego el plano A*a*A' cortará a estos dos, se-

Las proyecciones de estas curbas son espirales de Arquímedes..... 643
De la tanjente a la curba de arista, por un punto cualquiera..... 645
Construccion de esta recta en el *punto multiplo* y en el arranque..... 646

LIBRO VIII.

DE LA CURBATURA DE LAS LINEAS Y DE LAS SUPERFICIES.

CAPITULO I. Sobre la curbatura y las evolutas de las líneas.

Definicion de los contactos de diferentes órdenes entre dos curbas; del círculo osculador del plano osculador en un punto dado sobre una curba..... 649
La curbatura de una curba en cada punto de esta, tiene por medida exacta la razon de la unidad al radio del círculo osculador..... 653
Las curbas gausas no tienen sino una sola curbatura, pero presentan una torsion que se mide por el ángulo de dos planos osculadores vecinos.... 654
Los radios de curbatura de una curba gausa no se cortan consecutivamente, y en virtud de esto, los centros de curbatura no forman una *evoluta*..... 655
Sin embargo, una curba gausa admite una infinidad de evolutas, todas situadas sobre una superficie desarrollable, y en esta son las líneas *mínimas*.... 658
Caso en que la curba propuesta es esférica..... 660
Si es plana, todas sus evolutas se convierten en hélices..... 661
Observaciones sobre la posicion del círculo osculador y del plano osculador que ordinariamente cruzan a la curba propuesta..... 662
Construir el plano osculador relativo a un punto dado sobre una curba..... 664
Construir el radio de curbatura de una curba, en un punto dado..... 665
Método jeneral para construir una evoluta de una curba cualquiera, y el lugar de sus centros de curbatura..... 667
Dada una voluta esférica, hallar el lugar de sus centros de curbatura, y una de sus evolutas..... 669
Dada una hélice de base circular, construir el lugar de sus centros de curbatura y una de sus evolutas. Probarémos primeramente que el lugar de todas las evolutas es un helizoide desarrollable, cuya arista de retroceso contiene a los centros de curbatura de la hélice primitiva..... 672
El radio de curbatura de la hélice primitiva y el de la hélice arista de retroceso del helizoide, son cada uno iguales a la suma de los radios de los cilindros en que están situadas estas dos hélices..... 674
Valor analítico de estos radios de curbatura..... 676
Construccion de una evoluta de la hélice primitiva. De sus diversas ramas y de sus asíntotas..... 677

CAPITULO II. *De la curbatura de las superficies.*

Definicion de dos superficies osculadoras en un punto comun..... 684
Relacion entre los radios de curbatura de las secciones normales que pasan por una misma cúspide del elipsoide..... 685
Caso de un hiperboloide gauso. De los planos normales *límites*..... 686
En cada punto de una superficie cualquiera, existen dos secciones normales *principales*, situadas en planos perpendiculares, de las cuales una tiene un radio de curbatura *mínimo*, y la otra un *máximo*; estos radios están relacionados con el radio de otra seccion normal por medio de una relacion idéntica con la que hemos hallado respecto a la superficie de segundo grado..... 690
Discusion de la curbatura de las secciones normales en una superficie convexa; de los *ombligos*..... 691
Discusion análoga relativa a una superficie no convexa. De los planos normales *límites*. Nota sobre el teorema de *Meunier*..... 693
Se demuestra sintéticamente que para cada punto de una superficie cualquiera, puede hallarse un elipsoide, o un hiperboloide gauso, que sea *osculador* de la superficie propuesta..... 696
De las líneas de curbatura de una superficie. Se demuestra en primer lugar que en la cúspide de un elipsoide o de un hiperboloide gauso, no existen sino dos líneas de curbatura..... 699
Se prueba tambien que sobre una superficie jeneral, no hai, para cada punto, sino dos líneas de curbatura, que son rectangulares, supuesto que son tanjentes a las dos secciones principales..... 702
Ejemplos de diversas líneas de curbatura y de las secciones principales, sobre las superficies de revolucion, los cilindros, los conos, las superficies desarrollables y las superficies gausas..... 707
De las dos napas que contienen a los centros de las dos curbaturas de una superficie cualquiera..... 714
De la línea de las curbaturas esféricas..... 721
Observaciones sobre las aplicaciones de estas teorías a ciertas artes..... 723
Determinacion gráfica de las líneas de curbatura..... 725
En las superficies no convexas, los planos normales *límites* tienen por trazas sobre el plano tanjente, las tanjentes a la interseccion de este plano con la superficie 730
Aplicacion a la indagacion de las tanjentes en el punto multiplo de la seccion del toro por su plano tanjente..... 734
Construccion de las líneas de curbatura sobre un elipsoide..... 735
Aplicacion de estos resultados, propuesta por Monge..... 741
Construccion del hiperboloide que es osculador de una superficie gausa, en todo el largo de una jeneratriz..... 744

*****

la A'B' indefinida; luego esta traza tendrá por proyeccion vertical, el punto D', y ademas se hallará colocada en algun punto de la perpendicular D'D a la línea de tierra. Pero como tambien esta traza debe necesariamente hallarse sobre la proyeccion horizontal AB indefinida, síguese que se hallará en el punto D. Y así, en jeneral, *prolónguese la proyeccion vertical hasta la línea de tierra, y en este punto levántese a esta última línea una perpendicular indefinida que, por su encuentro con la proyeccion horizontal, determinará la traza horizontal de la recta en cuestion.*

14. Recíprocamente, si se nos diesen las dos trazas D y C' de una recta, nos seria fácil deducir de ellas las proyecciones de esta: porque como el punto C' pertenece a la recta misma, la perpendicular C'C bajada a la línea de tierra, nos dará a conocer un punto C de la proyeccion horizontal, y esta proyeccion será evidentemente la recta DC. Asímismo, si proyectamos el punto D que pertenece a la recta, a la línea de tierra, nos dará un punto D' de la proyeccion vertical, y esta proyeccion será la D'C'.

Creemos mui útil el ejercicio en resolver estas dos cuestiones recíprocas, en rectas colocadas de varios modos, tales son las que en la figura 3 tienen las líneas (EF, E'F'), cuya traza horizontal se halla en F y la vertical en G', y la (HK, H'K'), cuya traza vertical es K' y la horizontal L.

15. Al concluir estas nociones preliminares, darémos algunas reglas cuya práctica es esencial observarse al poner en limpio la resolucion de los problemas. Con efecto, debiendo estos dibujos servir para representar exactamente la forma de los objetos, es preciso que los varios modos de puntuacion que empleemos en ellos, presenten una especie de lenguaje intelijible al ojo, es decir, que manifiesten claramente la situacion relativa de las diferentes partes, distingan las que están ocultas de las que son visibles al observador, y hagan discernir los resultados de un problema de las líneas que no han servido sino como medios auxiliares para hallar su resolucion: esta es la razon porque constantemente adoptarémos las reglas siguientes:

1ª Las líneas PRINCIPALES, es decir, las que representan *los datos o los resultados* de un problema, estarán señaladas con una *raya unida y contínua,* siempre que sean *visibles*; pero si estas líneas

principales fueren *invisibles*, las harémos de puntos, es decir trazadas con puntos redondos. Vemos ejemplos de estos dos modos de puntuacion en las líneas ABCD y EFGH de la *fig.* 3 *bis.*

2ª Las líneas AUXILIARES, es decir, todas las que no se hallan comprendidas en la clase precedente, y cuyo único objeto es llegar a la solucion del problema, serán *punteadas* o compuestas de pequeñas líneas interrumpidas: tal es la línea P en la *fig.* 3. *bis.* En cuanto a estas líneas auxiliares, no tendrémos nunca necesidad de distinguir si se ven o no, porque siempre se miran como que no existen sino en la imajinacion del jeómetra, que es quien las concibe para llegar al resultado que se le pide.

3ª Cuando entre estas líneas auxiliares se halla alguna que presente mas interes e importancia que las demas, y queramos llamar la atencion hácia ella de un modo particular, podrémos expresarla por *una recta mista* compuesta de rayitas pequeñas separadas por uno o dos puntos redondos, segun se ve en las rectas M y N de la *fig.* 3 *bis.* Sin embargo de esto, debemos evitar cuidadosamente no aumentar mucho esta puntuacion, y consultar sobre este particular el buen gusto y los modelos selectos; ademas, es preciso que no empleemos jamas estas líneas mistas, para expresar las rectas cuyo único objeto es reunir las dos proyecciones de un mismo punto.

16. Solo nos resta ahora explicar como discernirémos entre las líneas PRINCIPALES de cada cuestion, las que son visibles y que por consiguiente deben señalarse con línea seguida, de las que son invisibles y que deben trazarse de puntos. No podrémos, por ahora, dar reglas completas sobre este asunto hasta tanto que háyamos hablado de las superficies curbas y de sus planos tanjentes; pero como en los primeros problemas, que van a ser el objeto de nuestras indagaciones, no se hallan sino rectas y planos, nos bastará, por ahora, sentar los convenios siguientes:

Supondrémos, siempre, que el observador que considera la proyeccion de un objeto sobre el plano *horizontal*, está colocado *sobre este plano a una distancia infinita en la vertical* que pasa por un punto cualquiera de este objeto, pero delante del plano vertical; y este convenio que simplificará, segun verémos mas adelante, la traza del contorno aparente de las superficies curbas, lo ha sujerido el modo de que nos servimos para proyectar los puntos del espacio sobre un pla-

no. Con efecto, los rayos visuales que salen desde el ojo del observador a todos los puntos de un cuerpo, se aproximan tanto mas a ser perpendiculares al plano horizontal, cuanto mas se eleve el observador sobre la misma vertical, de modo que cuando el punto de vista está a una distancia infinita, estos rayos son paralelos y coinciden con las rectas que sirven para proyectar los puntos del cuerpo. De donde se sigue que *la proyeccion horizontal de un objeto, no es otra cosa que* UNA VISTA *de este objeto, tomada desde un punto infinitamente distante, colocado sobre la vertical*; este resultado justifica suficientemente el convenio enunciado mas arriba.

Por una razon semejante, toda proyeccion *vertical* se considera como una vista del observador colocado *a una distancia infinita sobre una perpendicular al plano vertical, levantada a este plano en la parte anterior y encima del plano horizontal.*

Segun esto, toda línea o porcion de línea principal que se halle debajo del plano horizontal, o detras del plano vertical, la reputarémos como invisible, y como tal será de puntos redondos. Si ademas se halla en la cuestion algun plano que exista realmente, y alguna parte de línea principal está situada detras de este plano *o* debajo de él, con respecto al observador, tambien esta parte deberá *puntuarse*; pero es preciso recordemos que estas distinciones no deben tener lugar respecto a *las líneas auxiliares*, por la razon citada (nº 15, 2º) Desde luego, podemos reconocer la aplicacion de estas reglas en la *fig.* 3., y tendrémos cuidado de recordarlas en la mayor parte de los problemas que vamos a resolver.

CAPITULO II.

Problemas sobre las línea rectas y los planos,

FIG. 4. 17. *Construir la recta que pasa por dos puntos dados* (A, A') *y* (M, M') *y hallar en seguida la verdadera distancia de estos dos puntos* (*).

(*) *Antes de construir un depurado, es esencial observar las precauciones siguientes. Primeramente, se traza con lapiz, una recta indefinida hácia el medio de la hoja en que se vá a dibujar y proximamente para-*

Segun las definiciones establecidas en el nº 4, es evidente que la proyeccion horizontal de la recta que buscamos pasará por los puntos A y M, al propio tiempo que la proyeccion vertical lo efectuará por A' y M'; luego esta recta indefinida se halla proyectada segun AMB y A'M'B', y de este modo queda enteramente determinada su posicion (nº 6.) Podemos ademas construir sus trazas (nº 13.), que son los puntos (B, B') y (C, C').

En cuanto a la distancia de los dos puntos dados; está medida en el espacio, por la porcion de recta proyectada sobre AM y A'M'; pero nos es fácil ver que una recta finita es siempre mas larga que su proyeccion sobre un plano, exceptuando el caso de que la primera sea paralela al plano sobre que se proyecta; porque en este caso, *la recta dada en el espacio, es evidentemente de la misma longitud que su proyeccion.* Segun esta observacion, supongamos que la línea (AM, A'M') jira alrededor de la vertical proyectada en A, sin cambiar de inclinacion con esta última, fácilmente nos persuadirémos que en virtud de este movimiento, el extremo (A,A') permanecerá inmóvil, y que el otro extremo (M,M') se mantendrá a una altura constante, y solo des-

---

lela a su largo; en seguida se traza otra segunda recta exactamente perpendicular a la primera, sirviendonos para ejecutarlo de arcos de círculo; *por que la escuadra no es un instrumento en cuya exactitud debemos confiar, para emplearla en levantar perpendiculares que deban tener una lonjitud algo considerable. Pero la escuadra puede mui bien servirnos para tirar paralelas por un procedimiento mui exacto y expedito,* que consiste en hacerla resbalar a lo largo de una regla fija; *y asi esque por este medio debemos trazar, en cada depurado, la línea de tierra y todas las demas líneas que son perpendiculares o paralelas a ella, dirijiéndonos, siempre, sobre las dos rectas rectángulares cuya construccion acabamos de recomendar; que forman lo que los prácticos llaman la traza en cuadro.*

A esto debemos añadir que a pesar de la importancia de la línea de tierra, no debemos señalarla con una línea mas gruesa que las demas líneas principales; porque si así se ejecutase, nos produciria jeneralmente inexactitudes respecto al verdadero punto en que la encontraban las demas líneas del depurado.

cribirá un arco de círculo al rededor del eje de rotacion. Esto supuesto, si se continúa este movimiento, hasta tanto que la recta móvil llegue a ser *paralela al plano vertical*, lo que sucederá cuando la proyeccion AM haya tomado la situacion AP, paralela a la línea de tierra XY, en este caso, el extremo M que ha venido a parar a P, se hallará proyectado verticalmente (nº 10) en algun punto de la PIP' perpendicular a XY; y como esta recta debe hallarse a la misma altura que M', si tiramos la horizontal HM'P', tendrémos que el punto P' será la proyeccion vertical del extremo móvil de la recta en cuestion. Como ademas sabemos que el otro extremo (A,A') ha permanecido invariable; síguese que la recta (AM, A'M') se hallará ahora proyectada segun AP y A'P'; y su verdadera lonjitud es precisamente la proyeccion vertical A'P', segun la observacion hecha al principio de este artículo. De aquí deducimos la regla siguiente, que procurarémos nos sea mui familiar.

FIG. 4. *Para hallar la distancia que hai entre dos puntos* (A,A') *y* (M,M'), *formarémos un triángulo rectángulo* A'H'P' *en el cual un cateto* A'H' *sea la diferencia de alturas* A'R *y* M'K *de estos dos puntos* sobre el plano horizontal, *y el otro* H'P' *sea igual al intervalo* AM *de sus dos proyecciones horizontales: la hipotenusa* A'P' *será la distancia pedida.*

18. Hubiéramos hallado el mismo resultado, construyendo sobre el plano horizontal, *un triángulo rectángulo que tuviese un cateto igual a la diferencia de las distancias* AR *y* MK *que hai al plano vertical desde los dos puntos dados, y el otro cateto el intervalo* A'M' *que hai entre sus proyecciones verticales; la hipotenusa* AQ *expresaria tambien la distancia a que se hallan los dos puntos en el espacio*; está distancia, deberá ser enteramente igual a A'P'. Para explicar esta nueva construccion, bastará nos figuremos que la recta propuesta ha jirado al rededor de la horizontal que está proyectada verticalmente en A', sin cambiar de inclinacion respecto a esta última, hasta tanto que esta recta móvil llegue a ser *paralela al plano horizontal.*

19. Tambien hubieramos podido *abatir* la recta (AM,A'M') sobre el plano horizontal, haciendo jirar el trapecio invariable, formado por la recta propuesta y por las verticales que sirven para proyectar sus extremidades a A y M, alrededor de AM como charnela. En todo este

movimiento las dos verticales permanecerán siempre perpendiculares a a charnela AM, y tomarán las posiciones AA"=RA', MM"=KM'; de modo que trazando la recta A"M", hubieramos tambien obtenido la verdadera distancia de los dos puntos (A, A') y (M,M'). Aquí se nos presenta una comprobacion del problema, que nunca debemos despreciar en las operaciones gráficas; y es, que la prolongacion de la línea A" M" debe ir a pasar por B, porque siendo este último punto, la traza horizontal de la recta primitiva, debe estar situado sobre la charnela AMB, y por esto, ha debido permanecer inmóbil miéntras duró la revolucion de la recta.

20. *Recíprocamente, si se nos diese la recta indefinida* (AB, A'B') *y uno de sus puntos* (A, A'), *y quisiéramos hallar sobre esta línea otro punto* (M, M') *que distase del primero una cantidad dada* δ abatiríamos la recta propuesta al plano horizontal, segun lo hemos hecho anteriormente, haciendo a AA"=RA', y tirando la A"B. Tomaríamos, en seguida, sobre esta última línea un intervalo A"M"=δ; levantando despues la recta abatida A"B, hallaríamos que el punto M", correspondia al M, por medio de una perpendicular bajada desde él a la charnela AB: finalmente, de la proyeccion horizontal M, deduciriamos (nº 10.) la otra proyeccion M'; con lo cual quedaria completamente determinado el punto pedido.

21. *Tirar por un punto dado* (D, D') *una recta que sea paralela a otra recta conocida* (AB, A'B'). FIG. 5.

Siempre que dos rectas son paralelas en el espacio, los planos que las proyectan son evidentemente paralelos entre sí, y por consiguiente son tambien paralelas las intersecciones de estos, con el plano de proyeccion; es decir, que las proyecciones de las rectas serán indispensablemente paralelas una a otra. Y recíprocamente, siempre que las proyecciones horizontales de dos rectas son paralelas, y sucede esto mismo con las proyecciones verticales, los cuatro planos proyectantes serán paralelos de dos en dos: de esto se sigue, que sus mutuas intersecciones, es decir, las rectas situadas en el espacio, serán tambien paralelas entre sí. De aquí concluirémos que si tiramos por el punto D una paralela DE a la AB, y por el punto D' otra D'E' tambien paralela a A'B', la recta en cuestion tendrá por proyeccines a DE y D'E'; y de este modo quedará completamente determida: las trazas

de esta recta, que son los puntos F y E', se construyen segun lo hemos dicho ya nº 13.

FIG. 6. 22. *Construir un plano que pase por tres puntos dados* (A,A') (B , B') y (C , C').

En primer lugar observemos que para determinar gráficamente la posicion de un plano, será suficiente señalar *sus dos trazas*, es decir las intersecciones de este plano con los planos de proyeccion. Estas dos trazas, deberán cortar siempre a la línea de tierra en un mismo punto, pero el ángulo que estas trazas forman entre sí, en el abatimiento de los planos de proyeccion, no es igual al que estas líneas forman en el espacio. Es ademas mui evidente, que siempre que una recta esté colocada sobre un plano, las trazas de esta recta (nº 13) deben hallarse situadas en alguno de los puntos de las trazas del plano.

Esto supuesto, unamos los puntos dados de dos en dos por medio de las rectas (AB, A'B'), (BC , B'C'), y (AC, A'C'), como cada una de estas rectas tiene dos puntos en el plano que buscamos, todos los puntos de ellas se hallarán tambien sobre este mismo plano, y estarán, por consiguiente, todas ellas sobre dicho plano; construyamos en seguida, así como lo hicimos en el nº 13, las trazas verticales E', F' y G' de estas rectas. Estos tres puntos que evidentemente deben pertenecer a la interseccion del plano pedido con el plano vertical de proyeccion, estarán precisamente en línea recta, y serán mas que suficientes para determinar *la traza vertical* E'F'G' del plano pedido. Asímismo, *la traza* horizontal DHK de este mismo plano, se obtendrá, con construir las trazas horizontales D, H y K de las tres rectas auxiliares; las dos líneas E'G' y DH halladas por este medio, deberán ademas ir a encontrar a la línea de tierra XY en un mismo punto Q; esta circunstancia, nos proporciona otro nuevo modo de comprobar las construcciones anteriores.

Si quisiéramos *hacer pasar un plano por una recta y un punto dado*, uniriamos este punto con otro cualquiera de la recta, o sino, tirariamos una paralela a esta por el punto dado; en este caso, conoceriamos dos rectas situadas sobre el plano que buscamos, y las trazas de estas líneas serian suficientes para determinar las del plano pedido.

23. *Por un punto dado* (A, A') *hacer pasar un plano que sea paralelo a otro plano cuya traza horizontal es* ST *y la vertieal* TU'. FIG. 7.

Es evidente, que dos planos paralelos deben tener sus trazas respectivamente paralelas; y en virtud de esto, será suficiente hallar un solo punto de cada una de las trazas del plano pedido. Para conseguirlo, figurémonos tirada por el punto dado (A, A') *una recta auxiliar* que esté situada en el plano desconocido; la eleccion mas sencilla es la de tirar esta recta *paralelament, a la traza horizontal* de este mismo plano, o lo que es lo mismo, paralela a ST. Por consiguiente, si tiramos en esta direccion la recta AB y la A'B' paralela a la línea de tierra, estas serán evidentemente las dos proyecciones de la horizon tal situada en el plano desconocido. Hecho esto, si construimos (nº 13) el punto B' en que la recta penetra al plano vertical de proyeccion, este punto pertenecerá precisamente a la traza del plano que buscamos, que por consiguiente será la recta B'Q paralela a V'T; como la otra traza debe pasar por el punto Q, será la línea PQ paralela a TS.

Podemos tambien, como por medio de verificacion, construir directamente un punto de la traza horizontal del plano incógnito. Para esto, nos imajinarémos que en este plano y por el punto (A,A') pasa una recta auxiliar *paralela a la traza vertical* de este plano, esta recta, tendrá evidentemente por proyecciones a la AC paralela a la línea de tierra y A'C' paralela a V'T. Si ahora determinamos (nº 13.) el punto C en que esta recta auxiliar penetra al plano horizontal de proyeccion, este punto pertenecerá necesariamente a la traza del plano pedido; y así será indispensable que la recta PQ, ya construida, pase por el punto C.

24. Obsérvese que sí en el depurado de la figura, hubiesemos considerado a los dos planos STV' y PQR' como si realmente existiesen; el primero de ellos hubiera ocultado al segundo, y en este caso debiamos haber hecho de *puntos* las trazas de este último (nº 15, 1º), cuya operacion hubiera multiplicado mucho los puntos redondos, y sobre todo, hubiera tenido el grave inconveniente de no dejar distinguir las partes de las trazas situadas hácia la parte anterior de los planos de proyeccion, de las que están detras. Esta es la razon porque suponemos en este problema que solo se trata

de *hallar las trazas* de un plano paralelo al que tuviese por trazas a ST y TV', sin que realmente se construya ninguno de estos planos. Esta misma restriccion, cuyo objeto es únicamente dar mas claridad a los dibujos, se ha seguido tambien en los depurados 8, 9 y 16.

25. Las consideraciones de que nos hemos valido en los números 22 y 23, pueden servirnos para resolver la cuestion siguien-
FIG. 6. te: *dada la proyeccion horizontal* AB *de una recta que sabemos hallarse situada en un plano conocido* PQR', *determinar la otra proyeccion.* La recta incógnita penetrará al plano vertical en un punto que deberá proyectarse horizontalmente en E (nº 13.); por otra parte, como la traza vertical de la recta no puede hallarse fuera de la traza vertical QR' del plano que la contiene, dicho punto estará situado precisamente en E', y este es uno de los puntos de la proyeccion pedida. Por iguales motivos, vemos que la recta en cuestion va a penetrar al plano horizontal de proyeccion en D; luego si proyectamos D a D' sobre la línea de tierra XY, tendrémos que D'E' será la proyeccion vertical de la recta propuesta. Conocemos mui bien, que seria igualmente fácil hallar la proyeccion DE, cuando solo se nos diese la proyeccion vertical D'E' dela recta y el plano que la contuviese.

Si la proyeccion AB que se nos diese de la recta sobre el plano
FIG. 7. horizontal, fuese como en la *fig.* 7, paralela a la traza PQ del plano dado: obtendríamos desde luego la traza vertical B' de la recta incógnita del mismo modo que anteriormente; pero no existiria la traza horizontal de esta recta, porque AB no encuentra a PQ, por consiguiente, concluiriamos de aquí que la línea pedida es paralela al plano horizontal, y que segun esto, su proyeccion vertical es la recta B'A' paralela a la línea de tierra XY.

Del mismo modo verémos que si la proyeccion horizontal dada, es la línea AC paralela a XY, la recta situada en el espacio es paralela al plano vertical, y su proyeccion sobre este último plano es la línea C'A' paralela a la traza QR'.

FIG. 6. 26. Ved aquí otra cuestion análoga: *conociendo la proyeccion horizontal* A *de un punto que sabemos se halla sobre un plano dado* PQR', *hallar la otra proyeccion.* Tirarémos por el punto dado A una recta cualquiera DAE, que mirarémos como la proyeccion horizon-

tal de una línea situada en el plano PQR'; nos será fácil despues de ejecutar esto el construir, segun lo hemos hecho arriba, la proyeccion vertical D'E' de esta recta, y en seguida no tendrémos mas que hacer que referir el punto A al punto A' de dicha proyeccion, por medio de una perpendicular a la línea de tierra (nº 10). Con la misma facilidad hallariamos la proyeccion A si conociesemos la A'.

Entre las diferentes direcciones que podemos dar a esta recta auxiliar DAE, la mas cómoda, por lo jeneral, es tirarla paralela a la traza horizontal PQ del plano, segun lo hemos hecho con la línea AB en la *figura* 7.

27. *Hallar la interseccion de dos planos que tengan por trazas el primero a* PQ y QR', *y el segundo a* ST y TV'. FIG. 8.

Si prolongamos las dos trazas horizontales hasta que se corten en B, este punto será comun evidentemente a los dos planos; pertenecerá por consiguiente a su comun interseccion, y como se halla en el plano horizontal, será tambien la traza horizontal de la recta que buscamos: así mismo el punto A', en que se cortan las trazas verticales de los planos dados, será la traza vertical de esta recta. Conocidas de este modo las dos trazas de la comun seccion, deducirémos inmediatamente de ellas (nº 14) sus proyecciones que serán las AB y A'B'.

28. Si fuesen paralelas dos de las trazas, como sucede con los planos R'Q*p* y V'TS, el punto B se alejaria al infinito y por lo tanto la interseccion de los dos planos sería una *horizontal* que tendría por proyeccion a A'*b*' paralela a la línea de tierra, y a A*b*, paralela a TS; cuyo resultado es fácil proveer, porque pasando entonces los dos planos dados por las dos rectas paralelas Q*p* y TS, no pueden cortarse sino segun una recta paralela a estas.

29. Cuando las trazas son respectivamente paralelas sobre los dos planos de proyeccion, los planos dados serán evidentemente paralelos entre sí, y no habrá interseccion, a no ser que estas trazas sean tambien paralelas al mismo tiempo a la línea de tierra, como sucede con PQ y P'Q' respecto a un plano, y con TS y T'S' respecto al otro; porque dos planos colocados de este modo pueden tambien cortarse segun una recta paralela a XY, pero en este caso, no es sufi el método anterior para hallar esta interseccion. FIG. 9.

En el caso presente, tiraremos, a discreion, un plano secante auxilar $\alpha\beta\gamma'$; este cortará al plano [PQ, P'Q'] segun una recta (CD C'D') que construirémos por el método jeneral; y al plano [TS T'S'] segun la recta (EF, E'F'); estas dos líneas nos darán a conocer, por medio de su punto de encuentro, un punto (M, M') que evidentemente será comun a los dos planos (PQ,P'Q') y (TS, T'S'), y por consiguiente estos planos tendrán por interseccion a la recta (AMB, A'M'B') tirada paralelamente a la línea de tierra XY.

Podriámos tambien servirnos, en este caso, de *un plano de perfil* tirado perpendicularmente a XY: este plano cortará a los dos planos primitivos de proyeccion segun las dos rectas XV y XZ, esta última, tomará evidentemente la posicion XZ", cuando abatamos el pérfil sobre el plano horizontal, jirando al rededor de VX como charnela. Esto supuesto, el plano de perfil encontrara a las trazas verticales de los planos propuestos en los puntos P' y T' cuyos puntos vendrán en el abatimiento a colocarse en P" y T"; luego PP" y TT" son las trazas de estos planos sobre el plano de perfil abatido segun Z"XV: y como estas trazas se cortan en A"; este es un punto de la interseccion que se nos ha pedido, la cual tendrá evidentemente por proyeccion horizontal a la recta AB paralela a XY. Si ahora restablecemos el plano de perfil a su posicion primitiva, tendrémos que el punto A" se proyectará verticalmente a A' y A'B' paralela a XY, será la 2.ª proyeccion dela interseccion de los planos propuestos.

Si sucediese que las trazas de estos planos, sin ser paralelas entre sí, pasasen las cuatro por un mismo punto de la línea de tierra, seria tambien necesario en este caso recurrir a uno de los dos planos auxiliares de que acabamos de servirnos; desearíamos que el lector construyese el depurado de este caso particular.

FIG. 10. 30. *Construir el punto de interseccion de una recta* (AB, A'B') *con un plano dado* PQR'.

Para resolver esta cuestion, es preciso tirar por la recta dada y en una direccion cualquiera, un plano secante : construir la interseccion de este plano con el plano dado PQR', y como esta línea pasará precisamente por el punto que buscamos, quedará determinado este punto por medio del encuentro de esta interseccion con la recta dada.

Adoptemos desde luego por plano secante, el plano vertical que

sirve para proyectar a la recta segun AB; esta misma línea será la traza horizontal de este plano, y su traza vertical será la perpendicular CC' a la línea de tierra. Esto supuesto, el plano ACC' corta al plano dado PQR' segun una recta que se halla proyectada (nº 27) en C'D' y CD; y como esta interseccion encuentra a la recta dada (A'B', AB) en el punto M', en este se halla la proyeccion vertical del punto pedido. La segunda proyeccion de este punto no se conoce inmediatamente, porque en el caso presente se hallan las dos rectas proyectadas sobre el plano horizontal una sobre otra en la recta ADBC; pero la deduciremos del punto M' bajando (nº 10) una perpendicular M'M sobre la línea de tierra. Y así (M',M) es el punto en que la recta (A'B', AB) penetra al plano PQR'.

Tambien podremos emplear por plano secante, el plano proyectante de la recta sobre el plano vertical, el cuál tendrá por trazas a A'B' y B'F perpendicular a XY. Este plano ausiliar A'B'F cortará al PQR' segun la recta (FG, B'G'), la que por medio de su encuentro con AB, nos deberá dar el mismo punto M hallado ya por la primera construccion; de este modo empleando los dos métodos simultaneamente, servirán de comprobacion uno de otro.

Observemos que el plano dado PQR' es una magnitud *principal* (nº 15) que realmente existe, y que hace que sea invisible la porcion de la recta (AB, A'B') situada debajo del punto de seccion; por esta razon se ha construido la parte (MB, M'B') de *puntos*. En cuanto a la prolongacion BC, no se mira sino como una *línea auxiliar* relativa al plano secante que sirve de medio para la solucion.

31. Aun cuando los dos procedimientos empleados en el n.º 30 son los mas cómodos, será mui bueno que para ejercitarnos en la combinacion de los planos con las rectas, resolvamos tambien el mismo problema, valiéndonos de un plano secante cualquira: como este plano deberá contener a la recta dada (AB, A'B'), cuyas trazas son B y C', será FIG. 11. preciso hacer pasar por estos puntos las trazas del plano secante que adoptemos. Tiremos pues por el punto B la recta arbitraria SBT, y por las puntos T y C' la recta C'TV'; y estas serán las trazas de un plano auxiliar que contendrá a la línea (AB, A'B'). Esto supuesto, los planos STV' y PQR' se cortan (n.º 27) segun la línea (SV, S'V'); y como esta encuentra a la (AB, A'B') en (M, M'), este mismo es el punto en que

la recta dada penetra al plano PQR': pero es preciso cerciorarnos para comprobar las construcciones, que la recta M M' que une estas dos proyecciones es exactamente perpendicular (n.° 10) a la línea de tierra.

32. *Por un punto dado, tirar una recta que encuentre a otras dos rectas dadas de posicion.*

No harémos mas que indicar la solucion de este problema, proponiéndolo al lector como un ejercicio conveniente para familiarizarle con los métodos precedentes. Por el punto dado y la primra recta tirarémos un plano, en seguida tirarémos otro por el mismo punto y la segunda recta, hecho esto, determinarémos la interseccion de estos dos planos y hallarémos una recta que evidentemente cumplirá con las condiciones pedidas.

Puede tambien no emplearse sino el primero de los dos planos de que acabamos de hablar, y hallar en seguida (n.° 30) el punto en que este corta a la segunda recta, uniendo entonces este mismo punto con el punto dado, hallarémos una recta que resolverá el problema. En jeneral no habrá sino una sola solucion, a no ser que las dos rectas propuestas se hallan en el mismo plano que el punto dado.

FIG. 12. 33. TEOREMA. *Siempre que una recta* (AB, A'B') *es perpendicular a un plano* PQR', *se verifica, que las proyecciones de esta línea son respectivamente perpendiculares a las trazas del plano.*

Con efecto, el plano que proyecta a la recta en AB es, por su misma definicion, perpendicular al plano horizontal; y lo es tambien al plano dado PQR', supuesto pasa por una recta que es perpendicular a este plano; y segun esto, dicho plano proyectante es a un mismo tiempo perpendicular a los otros dos, y por consiguiente a su interseccion que es la traza horizontal PQ; luego esta misma traza será tambien perpendicular a la proyeccion AB, que se halla en el plano proyectante. De un modo enteramente semejante a este, demostrariamos que tambien la traza vertical R'Q es perpendicular a la proyeccion A'B'.

Y reciprocamente, *si las dos proyecciones* AB *y* A'B' *de una recta son respectivamente perpendiculares a las trazas* PQ *y* QR' *de un plano, este plano y la recta son perpendiculares uno a otra.* Con efecto, el plano proyectante que tiene por traza a AB es evidentemente perpendicular a la recta PQ, y por consiguiente al plano PQR' que contiene a esta línea: así mismo el plano proyectante que tiene por traza a A'B' es

perpendicular a la recta QR', y por consiguiente al plano PQR'. Y como este plano es perpendicular a un mismo tiempo a los dos planos proyectantes, lo será tambien a su interseccion que es la misma recta dada en el espacio.

34. Ademas, observarémos que no es cierto este teorema, cuando se trata de las proyecciones *oblicuas* (nº 8); y que debemos guardarnos creer que existe la relacion ya dicha, entre las proyecciones de dos rectas, cuando estas son perpendicnlares entre sí; porque sus proyecciones ortogonales, sobre un mismo plano, no formarán ángulo recto, a no ser que sea una de las líneas propuestas *paralela* al plano de proyeccion.

35. *Hallar la menor distancia que hai desde un punto* (A, A') *a un plano dado* PQR'. FIG. 12.

Para resolver el problema, bajarémos, en primer lugar, desde el punto (A, A') una perpendicular indefinida al plano, tirando (n.º 33) las proyecciones AB y A'B' perpendiculares respectivamente a las trazas PQ y QR' : hallarémos en seguida el punto (M, M') en que esta recta encuentra al plano, esta parte la ejecutarémos como en el n.º 30, cuyos raciocinios se aplican a la presente figura, en la que se han conservado las mismas anotaciones. Hecho todo esto, verémos que AM y A'M' son evidentemente las proyecciones de la menor distancia pedida; y en seguida hallarémos la magnitud absoluta de esta distancia (n.º 17) tirando la horizontal HM'M", igual a AM y la recta A'M" que será la verdadera distancia que hai desde el punto al plano.

36. *Hallar la menor distancia de un punto* (C, C') *a una recta dada* (AB, A'B'). FIG. 13.

Tirémos en primer lugar *por el punto* (C,C') *un plano perpendicular a la recta dada*; sabemos que las trazas de este serán perpendiculares (n.º 33) a las proyecciones AB y A'B' de la recta; y para determinar uno de los puntos de estas trazas, nos figuramos tirada sobre este plano *una horizontal* que pase por el punto (C,C'). Esta recta, que será precisamente paralela a la traza horizontal que buscamos, tendrá por proyecciones a CD perpendicular a AB, y a C'D' paralela a XY; en virtud de esto, esta recta irá a penetrar al plano vertical en (D,D'): si ahora tiramos la D'Q perpendicular a la A'B' y la QP perpendicular a AB, estas dos serán las trazas del plano que

buscamos. Hecho esto, si construimos (n.° 30) el punto (M, M') en que este plano encuentra a la recta (AB, A'B') y le unimos con (C,C'), tendrémos que la línea (CM, C'M') se hallará evidentemente contenida en el plano D'QP y por lo tanto, será perpendicular a la (AB, A'B'); por consiguiente dicha recta (CM, C'M') medirá la distancia mas corta pedida, su magnitud absoluta C'M'' se deducirá de las proyecciones CM, y C'M' sirviéndonos para ello de la regla jeneral expuesta n.° 17.

En este depurado, vemos que como el plano D'QP no es ni un dato ni tampoco un resultado del problema primitivo, y sí solo un medio auxiliar para resolver el problema propuesto, deberémos expresar sus trazas como líneas auxiliares (n.° 15). Esta misma observacion se aplica a la figura 14, cuya explicacion vamos a dar.

FIG. 14. 37. *Otra solucion.* Hagamos pasar un plano por el punto (C,C') y por la recta dada (AB, A'B') para conseguirlo, bastará unir el punto (C,C') con el (A, A') y determinar las trazas verticales de las dos rectas (AB, A'B') y (AC, A'C'); y hallarémos que B'D'Q y QA serán las trazas del plano auxiliar de que acabamos de hablar. Hecho esto, abatamos este plano moviéndolo al rededor de su traza horizontal AQ, y supongamos que lleva consigo a la recta y al punto dados. En este movimiento de revolucion, el punto (B, B') no saldrá fuera del plano vertical BF que es perpendicular a la charnela AQ: ademas, la distancia B'Q que hai desde este punto al punto fijo Q, permanecerá invariable; en virtud de todo esto, si con el radio QB' describimos un arco de círculo que corte a la BF en B'', este punto será el abaitmiento del (B, B') y la recta propuesta, así como tambien la traza QB' quedarán abatidas en AB'' y QB''. Asimismo, tirando las perpendiculares DD'' y CC'' a la charnela AQ, véremos que la línea (ACD, A'C'D') quedará abatida en AD'' y el punto C lo estará en C''. Hecho esto, como todos los datos del problema están abatidos sobre el plano horizontal sin que hayan cambiado sus posiciones respectivas; podrémos bajar la parpendicular C''M'' a la AB'' y será la menor distancia pedida *en su verdadera magnitud.* Este resultado es por lo comun el único que interesa: sin embargo, si tambien quisiéramos fijar *la posicion* de la menor distancia, no tendriamos que hacer otra cosa que levantar todo el sistema hasta que ocupe su posicion primitiva: el punto M'' se referirá a M por medio de una perpendicular a la charnela AQ, y de aquí nos

será facil deducir la proyeccion vertical M' (n.º 10); de modo que por último la distancia en cuestion estará proyectada en (CM, C'M').

38. Este modo de resolver la cuestion es mui útil para el caso que queramos *hallar sobre la recta* (AB, A'B') *un punto que diste del* (C, C') *una cantidad dada* δ. Porque despues de haber abatido segun lo hemos hecho arriba, la recta y el punto dados como lo están la AB" y el C" describirémos con el radío C"N"$=\delta$ un arco de círculo que cortará a la AB" en N", y este será el abatimiento del punto que se nos pide; levantando, en seguida, todo el sistema a su posicion primitiva haciéndolo jirar al rededor de la charnela AQ, tendrémos que el punto N" se referirá a N; y tendrá por proyecciones a N y N'. Conocémos mui bien que en jeneral este problema tiene otra solucion, porque el arco descrito con el radío δ, corta jeneralmente a la recta AB" en dos puntos N" y *n*".

39. *Hallar los ángulos que forma un plano dado* PQR' *con los dos planos de proyeccion.* FIG. 15.

Sabemos que para medir la inclinacion de dos planos, basta cortarlos con otro tercer plano que sea perpendicular a su interseccion, y que las dos rectas trazadas sobre este plano secante, forman entre sí un ángulo que expresa la inclinacion que buscamos. Segun esto, cortemos el plano PQR' y el plano horizontal con un plano perpendicular a la traza PQ. Este plano secante, que será vertical, tendrá por trazas una línea AD perpendicular a PQ, y la vertical DD'; por consiguiente cortará al plano dado segun una recta que en el espacio unirá al punto A con el D', y será la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos serán AD y DD'. Si ahora hacemos jirar este triángulo al rededor de DD' hasta aplicarlo sobre el plano vertical de proyeccion, este triángulo será el D'A"D y el ángulo del mismo nombre medirá la inclinacion del plano PQR' sobre el plano horizontal.

Para hallar el ángulo que el mismo plano PQR' forma con el plano vertical, cortaremos a los dos con un plano CDB' perpendicular a la traza vertical QR', y esto nos producirá un triángulo rectángulo cuyos catetos serán CD y DB', por consiguiente si este triángulo le abatimos haciéndole jirar alrededor de CD, será el DB"C, en el cual el ángulo B" expresará la inclinacion pedida (*).

(*) *En algunas artes, se define muchas veces un plano, por la traza ho-*

FIG. 15. 40. *Tirar un plano, por un punto dado, de modo que forme un angulo α con el plano horizontal y otro β con el vertical.*

En primer lugar observemos, que en el problema precedente, los dos planos secantes D'DA y B'DC deben cortarse segun una recta perpendicular al plano PQR', que será la misma que medirá la menor distancia que hai desde este plano al punto D de la línea de tierra. Como ademas, esta perpendicular abatida succesivamente con los dos triángulos, está manifiestamente representada por las rectas DF y D*f*, bajadas perpendicularmente a las hipotenusas, siguese de aquí que, sea cual fuere el plano PQR', siempre deberémos hallar la relacion DF=D*f*. Esto supuesto, si sin conocer al plano PQR' que suponémos tener con los planos fijos las inclinaciones α y β, construimos a discrecion sobre la línea de tierra un triángulo rectángulo D'DA" en el cuál el ángulo A" sea igual a α; y en seguida describimos con la perpendicular DF un arco de círculo, y le tiramos una tanjente B"*f* C de modo que forme el ángulo B" igual a β: esta tanjente (*) determinará, por medio de su encuentro con la prolongacion de la vertical D'D, un punto C de la traza del plano PQR'. Hecho esto y tirando la recta CQ tanjente al arco de círculo descrito con el radio

---

rizontal PQ y su inclinacion α sobre el plano horizontal. Con solos estos datos, es siempre fácil hallar su traza vertical empleando para ello el plano de perfil *AD perpendicular a PQ, y que contenga al ángulo α: por que acostando a DA segun A"D' y formando el ángulo DA"D= α, tendremos que el lado A"D prolongado irá a cortar a la vertical DD' en el punto D' por el cual debe tirarse la traza QD'R. Tambien algunas veces deja de emplearse el plano vertical de proyeccion, y se abate el perfil alrededor de AD formando el ángulo DAδ= α, lo que espresa de un modo suficientemente clâro la posicion del plano propuesto, permitiendo deducir de ella las consecuencias que podamos necesitar. En sustancia el plano de perfil ocupa el lugar del plano vertical de proyeccion.*

(*) Como es evidente que el ángulo CDf=B"= β, pudiéramos, en lugar de tirar esta tanjente, construir el triángulo rectángulo CDf sobre la base DF; y en seguida trasladar su hipotenusa desde D hasta C sobre la prolongacion de la vertical D'D.

DA", y uniendo en seguida los puntos Q y D', obtendrémos las trazas de un plano CQD', que tendrá las inclicaciones α y β con los planos fijos: para resolver en seguida el problema primitivo, no tendremos mas que tirar por el punto dado otro plano paralelo al CQD' (n.º 23).

41. *Construir el ángulo comprendido entre dos planos dados* PQR' *y* PSR'. FIG. 16.

Para resolver este problema, es preciso, segun hemos dicho anteriormente, cortar a estos dos planos con otro tercero que sea perpendicular a su interseccion. Y como esta recta, que se halla proyectada (n.º 27) segun las PR y P'R', es la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos son PR y RR'; este triángulo abatido sobre el plano horizontal, será el PRR". Si ahora levantamos una perpendicular A"B a esta hipotenusa en un punto arbitrario A" de ella y levantamos en seguida el triángulo R"RP hasta que tome la situacion vertical PR, es evidente que entonces la línea A"B se hallará en el plano secante que debemos tirar perpendicularmente a la interseccion por este punto A"; en seguida como A"B irá a penetrar al plano horizontal en B, tendrémos que la recta CBD perpendicular a la proyeccion PR, será (n.º 33) la traza horizontal del plano secante. Segun esto verémos que este último plano cortará a los planos propuestos segun dos rectas que partiendo del punto levantado A" terminarán en C y D, formando un triángulo cuya base será CD, y el ángulo del vértice A" será el mismo que se nos pide; y así no habrá mas que construir este triángulo. Pero como *la altura* de este triángulo es precisamente la A"B, porque despues de haber alzado esta recta se halla en el plano vertical RP, que es perpendicular a la base CD; ademas si abatimos este triángulo haciéndolo jirar al rededor de CD como charnela, véremos que el vértice A" no saldrá fuera del plano vertical PR que es perpendicular a la charnela : luego si tomamos sobre PR la distancia BA=BA", hallarémos que CAD es el triángulo pedido, y el ángulo expresado por el mismo nombre es el que mide la inclinacion de los dos planos PQR' y PSR'.

Hubiéramos podido tambien aplicar sobre el plano vertical, la interseccion de los dos planos propuestos; en cuyo caso esta recta hubiera estado representada por la R'P", y levantándole en seguida una per-

pendicular en un punto cualquiera, tal como la A'B', trasladariamos su pie B' a B, y en seguida hariamos de esto el mismo uso que el que hemos hecho arriba.

FIG. 17. 42. Cuando los planos propuestos tienen sus trazas paralelas en uno de los dos planos de proyeccion, como sucede con los planos R'QP y R'ST, la construccion precedente pide una lijera modificacion, que hace que la solucion sea mas sencilla: porque sabemos (n.º 28) que en este caso, la interseccion es la recta horizontal (R'V',RV) paralela a las trazas horizontales. Por consiguiente, si tiramos un plano vertical CRR' perpendicular a esta interseccion, este plano cortará a los planos propuestos, segun dos rectas que formarán con CD un triángulo que tendrá por vértice al punto R' y por altura la vertical R'R: de modo que abatiendo este triángulo sobre el plano horizontal moviéndolo alrededor de su base CD, tendrémos que el vértice R' vendrá a caer en R", y el ángulo CR"D será la medida de la inclinacion de los planos propuestos.

Finalmente si todas las trazas fuesen paralelas a la línea de tierra como se vé en la *fig.* 9., cortariamos a los planos dados con el *plano de perfil* ZXV, del cual hemos hecho ya uso en el n.º 29, y por medio del abatimiento de que nos hemos servido en dicho número, hallariamos el ángulo PA"T, que es la inclinacion de los planos en cuestion.

FIG. 18. 43. *Hallar el ángulo que forman dos rectas dadas* (AB, A'B') *y* (BC, *b'c'*).

Por ángulo de dos rectas, que muchas veces no se encuentran, se entiende el ángulo que comprenderian entre sí, dos rectas tiradas por el mismo punto del espacio paralelas respectivamente a las primeras: principiarémos por examinar si las líneas propuestas se cortan. Si dichas rectas tienen un punto comun, este deberá proyectarse horizontalmeute en B y verticalmente en *b'*. Mas para que estos puntos sean las proyecciones de un mismo punto del espacio, será preciso (nº 10) que la recta B*b'* sea perpendicular a la línea de tierra, cuya condicion vemos que no queda satisfecha en el caso presente; por consiguiente las rectas propuestas no se cortan. En este caso, vamos a tirar una paralela a la línea (BC, *b'c'*) por un punto cualquiera de la otra recta, y para simplificarlo mas, elejiremos el punto que se halla proyectado en B,B'. Esta paralela tendrá tambien por proyeccion horizon-

tal a la recta BC, dada ya, y por proyeccion vertical a la línea B'C' paralela a la *b'c'*; de modo que el problema quedará reducido a hallar el ángulo formado por las dos rectas (AB. A'B') y (BC, B'C') que miraremos como los datos inmediatos de la cuestion.

Construyendo las trazas horizontales A y C de estas rectas, tendremos que la línea AC será la base de un triángulo que tendrá por vértice al punto (B,B') en que se cortan las rectas propuestas, y cuyo ángulo en el vértice será el mismo que buscamos. Pero como la *altura* de este triángulo es evidentemente la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por base la perpendicular BH bajada a la AC, y por altura la vertical que proyecta el vértice a B, cuya vertical es igual a B'K; síguese, que si tomamos a KH"=BH, y en seguida tiramos la B'H", esta recta será la altura del triángulo primitivo. Esto supuesto, si abatimos este triángulo primitivo sobre el plano horizontal, haciéndolo jirar alrededor de su base AC, veremos que el vértice no saldrá nunca fuera del plano vertical HB perpendicular a esta base; luego tomando la altura B'H" desde H hasta B", tendremos que el triángulo que buscamos estará abatido segun AB"C, y el ángulo de esta misma denominacion, será el que forman en el espacio las dos rectas (AB A'B') y (BC, B'C').

44. Cuando una de estas rectas, la segunda por ejemplo, es paralela al plano horizontal, no existirá el triángulo de que nos hemos servido; pero la traza horizontal del plano de las dos rectas propuestas, que en el caso jeneral era AC; será en este caso, una paralela a BC tirada por el punto A; de modo que abatiendo, segun lo hemos hecho arriba, este plano alrededor de su traza, hallarémos tambien el ángulo pedido.

No hablarémos del caso en que ambas rectas son paralelas al plano horizontal, porque en este caso el ángulo que dichas rectas forman en el espacio, es igual al comprendido por sus proyecciones.

45. Finalmente, si en el caso jeneral, se nos propusiese *dividir en dos partes iguales el ángulo que forman dos rectas* que se cortan en el espacio, ejecutariamos esta division despues de haber abatido este ángulo sobre el plano horizontal; en seguida levantariamos el ángulo y la recta que le divide, observando que el punto en que esta última línea va a cortar a la traza horizontal del plano de las rectas dadas, perma- FIG. 18.

necerá inmóvil en todo este movimiento de rotacion. Aconsejamos al lector el ejercicio en las diversas operaciones indicadas en los números 44 y 45.

FIG. 19. 46. *Hallar el ángulo formado por una recta* (AB, A'B') *con un plano* PQR'.

El ángulo que una recta forma con un plano, seria una cantidad indeterminada, si no hubiese un convenio de entender por esta locucion *el ángulo que la recta propuesta forma con su proyeccion ortogonal sobre el plano*; y esta eleccion se funda en que este ángulo es evidentemente *el menor* de todos los que forma la recta con todas las demas líneas que pueden, pasando por su pie, trazarse en el plano de que tratamos. De aquí se sigue que, si desde un punto cualquiera de esta recta bajamos una perpendicular al plano propuesto, el ángulo comprendido entre esta perpendicular y la recta primitiva será *complemento* del que queremos hallar, y será suficiente para deducir de él este último.

Por consiguiente, tirémos por un punto (B,B') tomado arbitrariamente sobre la recta dada, una perpendicular (BC, B'C') al plano PQR', y en seguida construyamos el ángulo formado por las dos rectas (AB, A'B') y (BC, B'C'). Si a este caso aplicamos el método del número 43, veremos que será preciso bajar la perpendicular BH a la AC, tomar a KH"= BH, y trasladar la hipotenusa B'H" desde H a B"; hecho esto, tendrémos que AB"C será el ángulo de las dos rectas. En seguida, construirémos su complemento, tirando, por ejemplo, la B"D perpendicular a la CB"; y por último AB"D será el ángulo formado por la recta (AB, A'B') con el plano PQR'.

47. Este mismo método nos puede servir para hallar los *ángulos de una recta con sus proyecciones*, porque estos son los mismos ángulos que dicha recta formá con el plano horizontal y vertical; solo que las construcciones precedentes padecen, en este caso, simplificaciones que advertiremos con facilidad. Prescindiendo de esto, llegarémos a obtener estos mismos resultados de un modo mas pronto, abatiendo la recta sobre uno de los planos fijos, segun lo hemos ejecutado en el número 17, en el cual, el ángulo ABA" es la inclinacion de la recta (AB, A'B') sobre su proyeccion AB, o sobre el plano hórizontal.

48. *Construir la posicion y magnitud de la línea que mide la menor distancia entre dos rectas colocadas en diferentes planos.*

Sabemos que, en el espacio, pueden mui bien dos rectas no encontrarse sin ser paralelas: en este caso tiene lugar la cuestion de indagar entre todas las líneas que unen dos puntos cualesquiera de ellas, cual es la mas corta; con el objeto de poder elejir mejor la série de operaciones que debemos efectuar para resolver este problema, vamos a indicarlas primeramente en una figura en perspectiva, en la cual AB FIG. 20. y CD representen las dos rectas propuestas. Si, por un punto cualquiera B de la primera, tiramos una recta BE paralela a CD, y en seguida concebimos el plano ABE, este mismo plano será tambien paralelo a la línea CD; y así, si bajamos de un punto cualquiera de esta última recta una perpendicular DF al plano ABE, *no podrá ser la distancia que buscamos menor que* DF. Pero para hacer ver que una recta igual a DF puede, con efecto, unir dos puntos de las líneas propuestas, tiremos por el pie F de esta perpendicular una paralela FG a CD; esta línea FG encontrará precisamente a la AB en un punto tal como G, porque de no ser así la AB seria paralela a CD, lo que es contra la hipotesis admitida. Ahora bien, si en el punto G levantamos la perpendicular GH al plano ABE, dicha perpendicular estará evidentemente contenida en el plano CDFG, que es perpendicular al ABE, y por consiguiente la GH encontrará a la CD. *Esta línea* GH, igual y paralela a DF, *medirá la distancia mas corta* que hai entre las rectas AB y CD, vemos tambien que dicha línea GH será *perpendicular* a un mismo tiempo *a ambas*, por serlo al plano ABE que es paralelo a estas rectas.

Para confirmar *a posteriori* la primera de estas dos consecuencias; basta observar que uniendo dos puntos cualesquiera *m* y *n* de las líneas propuestas, la recta *mn* saldrá fuera del plano CDFG, siempre que el punto *n* sea diferente del G; en cuyo caso *mn* será una oblícua respecto al plano ABE, y como tal, será mas larga que la perpendicular *mp* que es igual con GH. En cuanto al caso en que el punto *n* coincidiese con el G, tendriamos que la recta *m*G seria oblícua respecto a CD, y por consiguiente mas larga que la perpendicular GH, que segun vemos es siempre la mas corta de todas las líneas que pueden unir dos puntos cualesquiera de las rectas propuestas.

49. Realicemos ahora las construcciones que no hemos hecho arriba sino indicar, y nos convencerémos (segun lo anunciamos ya nº 3) de

la diferencia esencial que hai entre los procedimientos de la jeometría ordinaria y los métodos empleados en la jeometría descriptiva, para obtener resultado *completamente determinados*, en la solucion de los problemas relativos a las tres dimensiones del espacio.

FIG. 21. Sean (AB, A'B') y (CD,C'D') las dos rectas dadas; nos cercioramos que no se hallan en el mismo plano, observando, primeramente, que no son paralelas, y en seguida, viendo que los puntos en que se cortan sus proyecciones verticales y horizontales, no estan situados (nº 43) sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. Esto supuesto, elijamos el punto (B,B') de la primera recta, para tirar por él una paralela (BE, B'E') a la segunda, y construyamos las trazas AEQ y QB' del plano que contiene a las líneas (AB, A'B') y (BE, B'E'); en seguida, bajemos desde un punto (D, D') de la segunda recta, una perpendicular (DF, D'F') al plano AQB', y determinemos (nº 30) por medio del plano proyectante DRR' el punto (F, F') en que esta perpendicular encuentra al plano AQB'. Hecho esto, será preciso tirar por el pie (F, F'), y paralelamente a (CD, C'D'), una recta (FG, F'G') que necesariamente deberá cortar (nº 47) a la (AB, A'B'); y por consiguiente los dos puntos G y G' deberán hallarse sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. En seguida tiraremos por el punto (G, G') y paralelamente a (DF, D'F') la línea (GH, G'H'); y como esta debe asimismo encontrar a la recta (CD, C'D'), será tambien indispensable que H y H' se correspondan sobre una misma perpendicular a la línea de tierra. Concluido todo esto, tendremos que GH y G'H' serán las proyecciones de la menor distancia pedida; para hallar, en seguida, su magnitud absoluta, tomaremos (nº 17) sobre la horizontal tirada por el punto G', una parte KG" = GH, y en seguida tiraremos la recta G" H' que finalmente será la verdadera lonjitud de la distancia en cuestion.

50. Podriamos tambien resolver el mismo problema, hallando la interseccion de dos planos perpendiculares al AQB', que pasasen uno por la recta (AB, A'B'), y el otro por la (CD, C'D'). Sabemos que estos planes se determinarian bajando una perpendicular al plano AQB' por un punto de cada una de las rectas propuestas; pero dejaremos al lector el cuidado de ejecutar estas construcciones.

51. Si las dos rectas propuestas fuesen paralelas entre sí, su distancia seria la misma en todos sus puntos, y para obtenerla, bastaria

hallar *la menor distancia de la primera recta a un punto de la segunda*; a la traza horizontal de esta, por ejemplo, pero este es un problema, cuya solucion hemos dado en los números 36 y 37.

Las diversas cuestiones que acabamos de recorrer, contienen los elementos necesarios para resolver los problemas en que no haya mas combinaciones que las de rectas con planos, y hallaremos aplicaciones mui útiles de ellos, en el capítulo siguiente. Aquí solo haremos observar que dadas las proyecciones de todos los cúspides de un poliedro, sabremos determinar la posicion y lonjitud de cada una de sus aristas, la inclinacion de cada cara sobre el plano horizontal, o el ángulo que forman entre sí dos caras; tambien podremos construir el abatimiento, y en sus verdaderas dimensiones, el polígono que forma una cualquiera de sus caras, y hallar en seguida la seccion que produciria en el poliedro un plano cuya posicion conociésemos. Y recíprocamente, si está definida la situacion del poliedro por medio de otras condiciones suficientes en número, pedremos concluir de ellas sus dos proyecciones; pero, como los procedimientos variarán necesariamente con la eleccion de los datos, no citarémos sino un solo ejemplo, que será suficiente para indicar la marcha que debemos seguir en otros casos.

52. *Se nos pide construir la proyeccion horizontal y vertical de un paralelipípedo rectángulo, cuya base se halla sobre un plano inclinado al horizonte la cantidad* ω *y que tiene por traza horizontal a* PQ; *una de las aristas de la base del cuerpo está proyectado horizontalmente en* AB, *y las otras dos aristas contiguas a esta, tienen las lonjitudes dadas* l' *y* l". FIG. 22.

Figurémonos que, por el cúspide B, pasa un plano de perfil PRR' perpendicular a la traza PQ; dicho plano cortará al plano dado segun una recta que formará con PR el ángulo ω; por consiguiente, si abatimos este perfil moviéndolo alrededor de RP, y construimos el ángulo RPR" $= \omega$, y en seguida trasladamos el punto R" a la vertical RR,' tendremos que la recta R'Q será (nº 39) la traza vertical del plano dado sobre el cual reposa la base del paralelipípedo. Ademas, si abatimos este último plano haciéndolo jiral alrededor de PQ, el punto B que está proyectado sobre el perfil en B", se trasportará evidentemente a *b*; de modo que A*b* será la verdadera lonjitud de la arista AB abatida sobre el

plano horizontal. Si en este estado, tiramos la recta A*d* igual a *l'* y perpendicular a A*b*, obtendremos dos de los lados de la base abatida; levantando en seguida esta cara, estos lados estarán proyectados segun AB y AD, y el paralelógramo ABCD será la proyeccion horizontal de la base del paralelipípedo. Esto supuesto, la arista perpendicular a esta base, que parte desde el ángulo B, está proyectada horizontalmente (nº 33) sobre la recta indefinida BP perpendicular a PQ; cuando en el plano de perfil, está representada esta arista en su verdadera magnitud por la línea B"F" igual a *l"* y tirada a ángulo recto sobre PR"; por consiguiente, si proyectamos la estremidad F" à F, BF será la proyeccion horizontal de la arista en cuestion; formando, en seguida, el paralelógamo ABFE, y acabando las otras caras por medio de diversas paralelas, obtendremos facilmente la proyeccion completa ABCDHEFG de todo el cuerpo sobre el plano horizontal.

En cuanto a la otra proyeccion, observaremos que los lados AD y CD se hallan en el plano PQR', y que así (nº 25) sus proyecciones verticales son A'K' y M'N' que, por medio de su encuentro, determinan el punto D', proyeccion vertical del ángulo D (*). Si ademas proyectamos el cúspide C a C', sobre la recta M'N', podremos acabar el paralelógramo A'D'C'B'; y despues de haber tirado por los cuatro ángulos de esta base, perpendiculares a la traza QR', será suficiente proyectar sobre estas rectas indefinidas los puntos E, F, G, H, a E', F', G', H', lo cual deberá ademas producirnos rectas que serán paralelas a los lados de la base inferior A'B'C'D'.

Por último, solo nos resta ya discernir cuáles son las aristas visibles en cada uno de los planos de proyeccion, observando las reglas establecidas números 15 y 16, y recordando que siendo el *punto de vista* diferente en el plano vertical, y en el horizontal (nº 16), una misma arista, tal como en el caso presente la (AD, A'D') puede ser visible sobre uno de los planos e invisible sobre el otro.

(*) *Tambien se podrian hallar los puntos D', C'*, y B' *por sus proyecciones horizontales y sus alturas sobre la línea de tierra: porque estas alturas nos las daria el perfil, en el cual los puntos en cuestion estan todos proyectados sobre la recta PR".*

CAPITULO III.

Resolucion del ángulo triedro.

53. En todo ángulo triedro SABC, el cúspide S nos presenta tres *ángulos planos* y tres *ángulos diedros*: los primeros son los ángulos rectilíneos que forman entre sí las aristas, los otros son las inclinaciones mútuas de las caras. Dados tres, cualesquiera, de estos seis ángulos, se tratan de hallar los otros tres, cuya cuestion nos presenta seis problemas distintos; porque representando por A, B y C los ángulos diedros que tienen por aristas respectivas a SA, SB y SC, y por α, β y γ los ángulos planos o *caras*, que estan opuestas a estos ángulos diedros, se nos pueden dar FIG. 23.

1º Las tres caras o ángulos planos. . . . . α, β, γ
2º Dos caras y el ángulo comprendido . . . . . α, β, C
3º Dos caras y el ángulo diedro opuesto a una de ellas α, β, B
4º Dos ángulos diedros y una de las caras opuestas. . A, B, β
5º Dos ángulos diedros y la cara comprendida. . . . . A, B, γ
6º Los tres ángulos diedros. . . . . A, B, C

Estas son, evidentemente, las únicas combinaciones verdaderamente distintas; y aun las tres últimas pueden reducirse a las otras tres por medio de un ángulo triedro *suplementario*.

54. Desde un punto cualquiera S' tomado *en el interior* del ángulo triedro S, bájese una perpendicular a cada una de sus caras; y para fijar mas las ideas, miremos al plano BSC como horizontal, y a la arista SA como situada encima de este plano. De este modo formaremos otro ángulo triedro S', que tendrá por aristas a la vertical S'A', a una con las otras dos rectas S'B' y S'C' perpendiculares respectivamente a las caras ASC, y ASB; a este nuevo ángulo triedro se da el nombre *suplementario* del primitivo, porque los ángulos de las caras y los ángulos diedros del uno, son suplementos de los ángulos diedros, y ángulos planos del otro. Pero antes de demostrar estas relaciones recíprocas, observaremos que no es indiferente, para formar el nuevo ángulo triedro, el que las

perpendiculares se bajen de este o el otro punto del espacio; porque tres rectas o tres planos que se cortan en un mismo punto S', y estan prolongadas por una y otra parte de este punto, determinan siempre ocho ángulos triedros diferentes, entre los cuales no hai sino dos (simétricos uno de otro y opuestos por el cúspide) que son verdaderamente suplementarios del ángulo dado SABC. Y así, para no cometer error en el modo de prolongar las perpendiculares, hemos recomendado el bajarlas, desde un punto tomado en el interior del ángulo triedro, a las caras de este; en seguida podremos trasportar al lugar del espacio que queramos al ángulo S' formado de este modo.

55. Esto supuesto, y representando por A', B', y C', los ángulos diedros comprendidos entre las caras que se cortan segun S'A', S'B', y S'C', y por α', β', γ' las caras opuestas a estas aristas, veremos que el plano A'S'B', que es perpendicular a las dos caras BSC y ASC, las corta segun dos rectas A'E y B'E que ambas son tambien perpendiculares a la SC, y que en virtud de esto el ángulo A'EB' será la medida del ángulo diedro C. Y como el cuadrilátero plano S'A'EB' tiene dos de sus ángulos que evidentemente son rectos, y son los A' y B', síguese que los otros dos serán suplementarios, y tendremos que

$$A'S'B' + A'EB' = 180^\circ, \text{ o bien} \ldots\ldots\ldots \quad \gamma' + C = 180^\circ,$$

del mismo modo probariamos que. . . . . $\beta' + B = 180^\circ$,

$$\alpha' + A = 180^\circ,$$

considerando a los cuadriláteros S'A'DC' y S'C'FB' como que estan formados por las secciones de las caras A'S'C' y B'S'C' en el ángulo triedro S. Luego *las caras del ángulo triedro* S', son, segun vemos, *suplementos de los ángulos diedros de* S.

56. Consideremos, ahora, los ángulos diedros de S'; las dos caras B'S'A' y C'S'A' cortan al plano BSC, al cual es cada uno de ellos perpendicular, segun las rectas A'E y A'D: luego el ángulo rectilíneo DA'E es la medida del ángulo diedro A'. Pero en el cuadrilátero SDA'E los ángulos D y E son evidentemente rectos, por ser la cara A'SB' perpendicular a SC, y la A'S'C' a la SB; por consiguiente los otros dos ángulos de este cuadrilátero son suplementarios, y tendremos que

DA'E + DSE = 180°, o bien. . . . . A' + α = 180°,
del mismo modo probariamos que. . . . . B' + β = 180°,
C' + γ = 180°,

sirviéndonos para estas últimas ecuaciones, de los cuadriláteros SEB'F y SDC'F. Luego *los ángulos diedros de* S' son los *suplementos de las caras de* S, y podremos decir que este último ángulo triedro es tambien *suplementario del ángulo* S'.

57. Observemos ahora, que si desde el punto S como centro y con un radio arbitrario tal como el SA, describimos una esfera, esta quedará cortada por las caras del ángulo triedro en S, segun los tres arcos de círculo máximo AB,BC, y CA, que entre los tres formarán *un triángulo esférico,* cuyos lados medirán a los ángulos planos α, β, y γ, y sus ángulos no serán otra cosa que las inclinaciones A, B y C de las caras del ángulo triedro. Por consiguiente, la construccion de este último, por el conocimiento de tres de sus elementos, viene a ser la solucion gráfica de los problemas de que trata, por medio del cálculo la trigonometría esférica. Ademas, si trasportamos al centro S, el ángulo triedro S', sus caras cortarán a la misma esfera segun otro triángulo que será el *suplementario* o *polar* de ABC, que tambien se emplea en la trigonometría esférica (*).

(*) *En todo rigor, para obtener el triángulo polar de ABC en la misma situacion, en que ordinariamente se emplea en la trigonometría, seria preciso adoptar el ángulo triedro simétrico del S'A'B'C', el cual se obtiene prolongando las tres aristas de la otra parte del punto S'; es decir, que hubiera sido preciso, desde un principio, levantar en el cúspide S tres perpendiculares a las caras de este ángulo triedro, una a la cara BSC, y situada del mismo lado de esta cara que la arista SA: otra sobre CSA y al mismo lado que la arista SB; finalmente la tercera sobre ASB y al mismo lado que SC. El ángulo triedro construido de este modo, habria cortado precisamente a la esfera segun el triángulo polar de ABC; pero la figura hubiera sido poco intelijible sin el auxilio de los triángulos esféricos: y esta es la razon por qué hemos preferido la construcion del n.º* 54; *con tanta mas razon, cuanto que aquí, en que no se trata sino*

58. Volvamos ahora a los seis problemas que hemos enunciado número 53, y observemos que siempre que se nos den los tres ángulos diedros A, B y C, podremos inmediatamente hallar sus suplementos, que son (nº 55) los ángulos planos α', β', y γ' de otro ángulo triedro S' : pero si por el primer caso del número 53 sabemos deducir de estos nuevos datos los ángulos diedros A', B' y C' no habrá mas que hacer que tomar los suplementos de estos para obtener (nº 56) los ángulos planos α, β, y γ del ángulo triedro primitivo S. En todo esto vemos que el cuarto caso se refiere al primero; así como el quinto se reduce al segundo, y el sesto al tercero. Por consiguiente, vamos ahora a ocuparnos solamente de la resolucion de los tres primeros problemas.

FIG. 24. 59. PRIMER CASO. *Dados los tres ángulos planos α, β, y γ de un ángulo triedro, hallar los tres ángulos diedros* A, B, y C.

Sean A"SB, BSC y CSA', los tres ángulos dados, que supondremos abatidos en el plano mismo de la cara BSC, al cual consideraremos como si fuese el *plano horizontal* del depurado; es evidente que para volver a formar el ángulo triedro, bastará que hagamos jirar las dos caras laterales A"SB y A'SC al rededor de las rectas SB y SC como si estas fuesen unas charnelas, hasta tanto que las dos líneas SA" y SA' lleguen a coincidir una con otra, y su posicion comun en el espacio será la de la tercera arista, cuya proyeccion, desconocida aun, la espresarémos por SA. Para determinarla, tomemos sobre las rectas abatidas SA' y SA" dos distancias cualesquiera, pero iguales, SD'= SD". Hecho esto, es evidente que los puntos D' y D" deberán reunirse cuando formemos el ángulo triedro; y como al jirar al rededor de las rectas SC y SB, dichos puntos no saldrán fuera de los planos verticales D'FD y D"ED que son perpendiculares a estas charnelas, síguese de aquí que los puntos abatidos en D' y D" irán a coincidir con el punto del espacio que tiene por proyeccion horizontal a D, y por consiguiente la tercer arista del ángulo triedro tendrá por proyeccion a SDA.

---

de los ángulos triedros, los que son simétricos unos de otros se componen de los mismos elementos, solo que el órden en que estan dispuestos es diferente, y que las relaciones suplementarias *son asimismo ciertas.*

Por otra parte, el plano vertical FD perpendicular a SC, deberá cortar a las dos caras que pasan por esta arista, segun las rectas FD y FD' que despues de levantadas, comprenderán entre sí un ángulo igual a la inclinacion de estas caras, y formarán con la vertical D un triángulo rectángulo; por consiguiente, si abatimos este triángulo haciéndolo jirar alrededor de FD, y levantamos sobre esta base una perpendicular indefinida DG' que terminarémos por medio de un radio FG' = FD', hallarémos por este medio el ángulo rectilíneo G'FD que será la medida del ángulo diedro C que tratábamos de hallar.

Asimismo, el plano vertical ED cortará a las dos caras que pasan por SB, segun las rectas ED y ED" que despues de levantadas, comprenderán entre sí la medida del ángulo diedro B; y como estas mismas rectas forman tambien con la vertical D un triángulo rectángulo del cual componen la base y la hipotenusa, podrémos construir con facilidad el abatimiento G"ED de este triángulo, y la medida del ángulo en B será el DEG". Observarémos tambien que las dos verticales DG' y DG" deberán hallarse *iguales*, porque una y otra expresan la altura de un solo punto de la arista SA, que es el mismo que está proyectado en D.

Para hallar el tercer ángulo diedro A, tiraremos un plano secante perpendicular a SA por el punto de esta arista que está proyectado en D, y abatido por un lado en D' y por el otro en D". Este plano cortará a las caras laterales segun las rectas D'N y D"M, perpendiculares respectivamente a SA' y SA"; y por una consecuencia necesaria, su interseccion con la cara BSC será la recta MN, que evidentemente deberá ser perpendicular a la proyeccion horizontal SA de la tercer arista. Si ahora construimos con las tres líneas D"M, MN, y ND' el triángulo PMN, el ángulo P del vértice será precisamente la medida del ángulo diedro que tiene por arista a SA.

Observemos ademas que este triángulo, antes de haberlo abatido alrededor de MN tenia su vértice P situado en el punto de la arista SA que está proyectado en D. Y como esta charnela MN es perpendicular, segun lo acabamos de decir, al plano vertical SA, síguese que el punto P no habrá podido salir fuera de este plano, y por consiguiente será preciso que el abatimiento de este punto venga a caer

sobre la prolongacion de la recta SDA que es una verificacion que debemos observar.

60. Las construcciones precedentes son tambien aplicables al caso en que los tres ángulos α, β, y γ, o algunos de ellos son obtusos: solo que es siempre preciso, para la posibilidad del problema, 1º que los tres ángulos α, β y γ compongan una suma menor que cuatro rectos; 2º que ademas el mayor de estos ángulos sea menor que la suma de los otros dos. Con efecto, si los datos de la cuestion no cumpliesen con estas condiciones, veriamos con facilidad que las operaciones gráficas daban en la construccion de los triángulos FDG' y EDF", hipotenusas que serian mas cortas que las bases: mientras que estos triángulos podrán construirse, siempre que las dos condiciones enunciadas arriba, queden satisfechas, y por consiguiente podremos componer el ángulo triedro con los datos del problema.

61. *Reducir un ángulo al horizonte.* Este problema, cuya utilidad se manifiesta en el levantamiento de planos topográficos, tiene por objeto el hallar la proyeccion horizontal de un ángulo α conocido en magnitud, y cuyos lados forman con la vertical bajada desde el vértice, los ángulos dados β y γ. Pero si nos figuramos un ángulo triedro, cuyas tres aristas sean, esta vertical y los dos lados del ángulo propuesto α, en tal caso, conoceremos los tres ángulos planos α, β, y γ de este ángulo triedro, y la proyeccion pedida será manifiestamente el ángulo rectilíneo que mide al ángulo diedro A comprendido entre las dos caras verticales; por consiguiente este problema está incluso en el del número 59, y podrá resolverse del mismo modo, si la suposicion de ser en este caso una de las aristas vertical, no nos proporcionase dar a la figura una disposicion mas cómoda.

FIG. 25. Formemos, en un plano cualquiera, los ángulos ASB $= \gamma$ y ASC $= \beta$ con la vertical AS: dejando invariable la magnitud del segundo ángulo, hagámosle jirar alrededor de SA, hasta tanto que el lado móvil SC forme, en el espacio, un ángulo α con el lado fijo SB; de este modo obtendremos el ángulo dado, en la misma situacion exactamente que la que le señala el problema, y en seguida nos será facil deducir de aquí la proyeccion horizontal. Pero, en este movimiento de revolucion alrededor de SA, el pie C del lado móvil describirá un arco de círculo CC', cuyo centro se hallará en A; y se detendrá en su

movimiento en un punto C' de este arco, colocado de tal modo que su distancia al punto fijo B será evidentemente la base de un triángulo que tendrá por lados rectas iguales a SB y SC, y el ángulo comprendido entre ellas será igual a α. Por consiguiente, si construimos sobre el plano vertical, un ángulo BSC" $= \alpha$, y tomamos a SC" = SC, la recta BC" será la distancia de que hablamos; trasladándola en seguida de B a C' por medio de un arco de círculo, conocerémos la posicion C' en que debe pararse el pie del lado móvil SC, y por consiguiente esta recta estará proyectada horizontalmente segun AC'. Por otra parte, como el lado fijo SB está proyectado sobre AB, concluimos de aquí que el ángulo α, situado en el espacio, tiene por proyeccion horizontal a BAC'; y así este ángulo, que puede ser mayor o menor que α, es el que debemos emplear en una carta topográfica, en la cual deben representarse todos los objetos por sus proyecciones.

62. Segundo caso. *Dados dos ángulos planos α y β de un ángulo triedro, y el ángulo diedro comprendido* C, *hallar las otras partes.*

Sean BSC $= \alpha$ y CSA' $= \beta$ los dos ángulos planos abatidos sobre el plano horizontal; haciendo ahora jirar el segundo ángulo plano alrededor de SC, hasta que forme con la cara BSC, el ángulo diedro C, obtendremos las dos caras de ángulo triedro en su verdadera situacion. Pero, en todo este movimiento de rotacion, un punto cualquiera D' tomado a discrecion sobre la arista móvil, no saldrá fuera del plano vertical D'FM que es perpendicular a la charnela: luego si, construimos, en este plano abatido alrededor de FM el ángulo MFK = C, y tomamos la distancia FG' = FD', es evidente que el punto D' vendrá a colocarse en G', y por consiguiente, que dicho punto se hallará proyectado horizontalmente en D, cuando la cara móvil ASC haya tomado la inclinacion que requiere la cuestion. Ahora bien, el punto del espacio, que tiene por proyecciones a D y G' pertenece a la tercer cara desconocida, y si la suponemos abatida alrededor de SB, el punto (D, G') no saldrá del plano vertical DED" que es perpendicular a esta charnela: y como, ademas, debe tambien permanecer este punto a una distancia del vértice igual a SD', síguese que si con esta distancia describimos un arco de círculo, este arco cortará a la recta indefinida DE en el punto D" que nos determinará el ángule D"SB que será el FIG. 26.

ángulo plano de la tercera cara desconocida. Y como hemos hallado ya los tres ángulos planos del ángulo triedro; el problema n.° 59 nos enseñará el modo de construir los demas ángulos diedros.

Podiamos tambien emplear en la construccion, la distancia MG', que es evidentemente igual a MD", para describir un arco de círculo, cuyo encuentro con el primero nos habria determinado el punto D".

63. Tercer caso. *Dados dos ángulos α y β de un ángulo triedro y el ángulo diedro* B *opuesto a uno de ellos, hallar las otras partes.*

FIG. 27. Sean BSC $= \alpha$ y CSA' $= \beta$ los dos ángulos planos dados abatidos sobre el plano horizontal. Si en un plano vertical EF perpendicular a la arista SB, construimos el ángulo REF = B, y en seguida nos figuramos un plano indefinido que pase por SE y ER, este plano indicará la posicion de la cara incógnita: de modo que para componer el ángulo triedro, no habrá mas que hacer jirar la cara A'SC alrededor de CS, hasta que la arista SA' llegue a colocarse en el plano SER. Durante este movimiento de rotacion, el punto D' de la arista móvil no saldrá del plano vertical D'FM, tirado por el punto F perpendicularmente a la charnela CS; y por consiguiente este punto D' se detendrá sobre la interseccion del plano vertical FM con el plano indefinido SER: pero esta interseccion es una recta que parte del punto M y vienen a encontrar a la vertical F en el mismo punto, evidentemente que, la recta ER levantada: luego, si para hallar esta altura, tiramos la línea FR perpendicular a FE, y trasladamos en seguida FR de modo que forme ángulo recto con FM desde F hasta R', tendremos que la línea MR' será la interseccion de que hemos hablado, y sobre esta línea deberá detenerse el punto D' de la arista móvil SA'. Y así es, que describiendo con el radio FD' un arco de círculo que corte a MR' en G, hallarémos la posicion G de un punto de la tercera arista SA en el plano vertical FM, nos seria facil deducir la proyeccion horizontal D de esta arista.

Observemos ahora que este punto G, situado en el plano vertical MF, pertenece a la cara incógnita, y que cuando se abate esta alrededor de la arista SB, no varia de distancia respecto a los puntos M y S situados sobre la charnela. Y como evidentemente estas distancias son MG y SD'; síguese que si con estas rectas, por radios, describimos dos arcos de círculo, su encuentro D" determinará el abatimiento del

punto G (*), y por consiguiente la cara incógnita será D"SB. Despues de hallada esta cara, recaeremos en el caso n.º 59, y sabremos ya construir las otros partes del ángulo triedro.

64. Notemos, ademas, que el arco de círculo descrito con el radio FD', cortará, en jeneral, a la recta MR' en dos puntos G y *g*; de modo que al jirar la cara A'SC alrededor de CS, podrá tomar dos posiciones, en las que se hallará la arista SA' situada en el plano indefinido SER o en el SMR'; respecto a una de estas posiciones, el punto D' se detendrá en G, y para la otra vendrá a parar a *g*. Por consiguiente, si abatimos este último punto como hemos hecho con el primero, alrededor de SB, dicho punto se trasladará a *d*", y en este caso *d*"SB será el ángulo plano de la tercer cara incógnita. Habrá pues dos ángulos tiedros que se podrán componer con los datos α, β y B, cuyo resultado es enteramente análogo al que se presenta en la construccion de un triángulo rectilíneo en que se conocen dos lados, y el ángulo opuesto a uno de ellos.

No hai necesidad de añadir que si el arco descrito con el radio FD' no hace sino tocar a la recta MR', no habrá mas de una solucion; y que el problema será imposible de resolver, cuando este arco no encuentre en ningun punto a la recta MR'.

65. Sin embargo, importa observar, que no debe admitirse la segunda solucion, cuando el punto *g* caiga sobre MR' y *debajo* de MF, es decir, debajo del plano horizontal (suponemos en esto que se ha tenido cuidado de construir el ángulo dado B, ya sea agudo o ya obtuso, *encima* del plano de proyeccion). Con efecto, el ángulo triedro que en este caso se hallaria, estaría evidentemente compuesto de los ángulos planos α y β, y de un ángulo diedro suplemento de B: pero, como se nos dá aquí este último gráficamente, y no por el valor de su *seno*, no puede haber en tal caso ambigüedad sobre su magnitud, y por consiguiente no nos es permitido la adopcion indiferente de B o 180° -- B. FIG 27.

Por la misma razon, seria preciso desechar las dos soluciones, y de-

(*) *Tambien podriamos hallar el abatimiento D" combinando uno de estos dos arcos con la recta DD" tirada por la proyeccion horizontal D del punto G, perpendicularmente a la charnela SB.*

clarar el problema imposible, con las cantidades dadas, cuando los dos puntos G y *g* cayesen ambos debajo de la horizontal MF, lo cual no podrá suceder sino cuando el ángulo diedro B sea obtuso.

OBSERVACION. Aun cuando los tres últimos problemas del número 53 puedan convertirse en los tres primeros por medio de un ángulo triedro suplementario, segun lo hemos hecho ver en el n.º 58, es interesante y útil algunas veces hallar una solucion directa. En virtud de esto vamos a esponerla; prevenimos, sin embargo, a los lectores que principian a estudiar la Jeometría descritiva, que esta solucion, supone el conocimiento de los planos tanjentes a las superficies curbas; y así es que harán mui bien en diferir la lectura de lo que sigue, hasta que hayan estudiado lo menos los capítulos II y III del libro segundo.

LAM. 8. FIG. 1. 66. CUARTO CASO. *Dados dos ángulos diedros* A *y* B *de un ángulo triedro y una de las caras opuestas* β, *hallar las otras partes.*

Adoptemos por plano horizontal el de la cara incógnita γ, y tracemos sobre él el abatimiento ASC" de la cara dada β; tiremos en seguida perpendicularmente a la arista SA, el plano vertical D"EF, y tracemos sobre este el ángulo D'ED igual al ángulo diedro A que se nos da en la cuestion. Hecho esto, si hacemos jirar la cara ASC" alrededor de AS, hasta que llegue a acomodarse sobre el plano SED' tendremos que el punto D" se trasportará a D', cuyo punto se proyecta horizontalmente en D; y para acabar de componer el ángulo tiedro, no tendremos mas que hacer pasar por la arista (SD, ED') un plano que forme con el plano horizontal un ángulo igual al ángulo diedro B. Para conseguir esto, tiremos en el plano vertical EF la recta D'F, de modo que forme el ángulo D'FD = B; y en seguida, y despues de haber hecho jirar esta recta alrededor de la vertical D'D para enjendrar por este medio un cono de revolucion, cuya base será el círculo DF, tiremos un plano tanjente a este cono de modo que pase por la arista (SD, ED'). Este plano tendrá por traza a la recta SGB tirada desde el punto S tanjencialmente al círculo, cuyo radio es DF, y esta será la tercera arista del ángulo triedro de que tratamos y determinará la cara ASB = γ. En cuanto a la tercer cara α, que en el caso presente está abatida segun BSC", veremos facilmente que se construye tomando sobre la perpendicular DG una lonjitud GD"' igual a la jeneratriz D'F del cono a que es tanjente esta cara.

67. Quinto caso. *Dados dos ángulos diedros* A *y* B *de un ángulo triedro, y la cara comprendida* γ, *hallar las otras partes.* LAM. 8. FIG. 2.

Despues de haber trazado sobre el plano horizontal un ángulo ASB = γ para representar la cara conocida, tiremos un plano vertical EF perpendicular a la arista SA, y tracemos en él el ángulo F'EF igual al ángulo diedro A; del mismo modo construyamos en un plano perpendicular a la arista SB, el ángulo G'KG = B. Hecho esto, tendremos que los planos SEF' y SKG' serán los que forman las caras desconocidas: y para hallar otro segundo punto D de la proyeccion SDC de su interseccion, será suficiente que los cortemos con un mismo plano horizontal cualquiera. Para esto, tomaremos las alturas iguales EH' = KL'; y tirando, en seguida, las rectas H'F' y L'G' respectivamente paralelas a las dos líneas de tierra EF, y KG, hallaremos las dos secciones horizontales F'D y G'D, las cuales nos darán a conocer el punto D que buscamos, por medio de su encuentro. Finalmente, para abatir las dos caras que se cortan segun SDC, tomaremos las perpendiculares MD" = EF' y ND"' = KG', y estas dos caras tendrán evidentemente por verdadera magnitud a ASC" y a BSC"'.

68. Sesto caso. *Dados los tres ángulos diedros* A, B, *y* C, *de un ángulo triedro, hallar las tres caras.*

Señalemos sobre el plano horizontal que supondremos coincidir con el de la cara incógnita γ, la recta arbitraria DA, para que represente una de las aristas de esta cara; y sobre un plano vertical perpendicular a DA tracemos el ángulo Y'AX igual al ángulo diedro dado A: el plano Y'AD será tambien el que contiene a la cara β. Bajemos en seguida, de un punto T' tomado arbitrariamente en el interior del ángulo Y'AX, las perpendiculares T'O y T'I, a las caras γ y β, y tracemos los ángulos T'FO = B y T'G'I' = C; hecho esto, si hacemos jirar estos ángulos alrededor de los ejes T'O y T'I', enjendrarán dos conos de revolucion, a los cuales deberá evidentemente ser tanjente la cara incógnita α; de modo que la cuestion se reduce a tirar un plano que toque a un mismo tiempo a estos dos conos, cuyo cúspide comun se halla en T', y sus bases son los círculos descritos con los radios OF e I'G'. La solucion directa consistirá, en hallar la traza *horizontal* del segundo cono I'T'G'; y tirar en seguida una *tanjente comun* a esta curba y al círculo cuyo radio es OF; pero recurriendo a las considera- LAM. 8. FIG. 3.

ciones siguientes, podremos evitar el trazado aproximativo de una curba por medio de puntos.

Inscribamos una esfera al cono T'OF, de modo que el círculo horizontal MFN sea un círculo menor de ella: el centro ω' de esta esfera, se hallará tirando la recta Fω' normal al cono de que se trata; y para tener otra segunda esfera, igual a esta, y asimismo inscrita en el otro cono T' I' G', será preciso tirar la línea T' H' = ω' F de suerte que forme ángulo recto con T' G', y concluir el paralelógramo T' H' K' φ', que será el que nos dé a conocer el centro φ' y el radio φ' K' de esta nueva esfera. Hecho esto, figurémonos un cilindro que esté circunscripto a las dos esferas dichas; este las tocará segun dos círculos perpendiculares a su eje que es la recta φ' ω'; y como el plano que toque a los dos conos a un mismo tiempo, debe ser necesariamente tanjente a las dos esferas; síguese que dicho plano es tambien tanjente al cilindro de que tratamos, y la cuestion se reduce a tirar por el punto T' un plano que sea *tanjente a esta sola superficie.*

Por consiguiente, el método directo seria el trazar, en el plano ω' V' perpendicular al eje φ' ω', un círculo con un radio igual a ω' F; y en seguida tirar una tanjente a este círculo por el punto en que terminase sobre este plano la paralela al eje tirada por el punto T'. Todo esto podria ejecutarse en el abatimiento sobre el plano horizontal; pero hai todavia otro medio mas corto. Con efecto, debiendo el plano que buscamos ser tanjente a un mismo tiempo al cilindro, a la esfera ω' y al cono T'FO, debe hallarse su punto de contacto con la esfera, 1º sobre el círculo horizontal MFN que es la línea de contacto de la esfera y del cono: 2º sobre el círculo máximo contenido en el plano ω' V' que es la línea de contacto de la esfera con el cilindro. Pero como estos dos círculos se cortan manifiestamente segun una cuerda, que está proyectada verticalmente en el punto M', y representada en su verdadera posicion por MM'N sobre el plano horizontal; síguese que M es el punto de contacto y BMS la traza horizontal del plano tanjente pedido: su traza vertical, que debe pasar por el cúspide T', será desde luego BT'C'.

Ya que conocemos la magnitud ASB = γ de la cara horizontal y la proyeccion SC de la arista segun la cual se cortan los dos planos SAC' y SBC', no habrá mas que abatir estos dos últimos alrededor de las

charnelas AS y BS, y hallaremos facilmente las dos caras ASC"$=\beta$ y BSC"'$=\alpha$. Observaremos que la arista abatida segun SC" deberá ser tanjente al círculo descrito desde el punto I" con un radio igual a I'G'; porque este círculo es la base del segundo cono T'I'G' al cual es tambien tanjente al plano SBC'.

LIBRO II.

DE LAS SUPERFICIES Y SUS PLANOS TANJENTES.

CAPITULO PRIMERO.

De la jeneracion de las superficies y de su representacion gráfica.

69. Hemos anunciado (nº 7) que para representar gráficamente una superficie, no era preciso, como en las líneas, tratar de construir las proyecciones de los diferentes puntos de este lugar jeométrico sobre los dos planos fijos de proyeccion: con efecto, en virtud de que sobre una superficie y partiendo de un punto dado, podemos caminar en una infinidad de direcciones, el medio precedente no tendria otro resultado que recargar los planos fijos de una multitud de puntos y líneas, cuya union no podriamos percibir, y cuyo compexo, sobre todo, no pintaría de ningun modo al ojo del observador, ni la forma de la superfice, ni su curbatura mas o menos pronunciada, ni tampoco el número de sus napas (1). Por consiguiente emplearemos otro procedimiento (nº 93), deducido de la naturaleza misma de esta magnitud, de la cual debemos ante todo dar una definicion exacta.

70 Por la palabra *superficie* no debemos entender solamente una serie de puntos o de curbas tan próximas unas de otras cuanto que-

---

(1) *La voz napa que nuevamente introducimos tanto en este tratado como en el de matemáticas de Francoeur traducido para servir de testo en el Instituto nacional, es tomada del griego, en cuya lengua significa el declivio o falda de los montes, y de aquí por analojía la hemos aplicado a las superficies.*

ramos, y que no tienen entre sí ninguna dependencia fija: es preciso aun que estos puntos o estas líneas esten sujetas a alguna trabazon comun y continua, cuya espresion analítica no seria otra cosa que la ecuacion de la superficie, y cuya definicion jeométrica debe enunciarse así.

Una superficie es el lugar de las diversas posiciones que toma en el espacio cualquiera línea móvil que cambia de situacion, y aun de forma segun una lei determinada y continua.

La línea móvil se llama JENERATRIZ; y por esta frase, *una lei determinada*, es preciso entender ciertas condiciones que, respecto a cada punto dado en el espacio, no dejen nada arbitrario en la forma ni en la posicion de jeneratriz. Y como el medio mas cómodo para espresar (a lo menos en parte) la lei de este movimiento, es señalar una o mas líneas fijas, llamadas DIRECTRICES, sobre las que constantemente deberá apoyarse la jeneratriz en todas sus posiciones: síguese que para difinir completamente una superficie particular es preciso indicar la naturaleza de la jeneratriz, el modo en que se mueve, y las directrices sobre quienes debe resbalar mientras dura su movimiento (*). Con solo cam-

---

(*) *Efectivamente por medio de la traduccion al análisis de este modo de enjendrarse, o de una propiedad equivalente, es como siempre se halla la ecuacion de la superficie* (*Véase l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions, chap. XIV.) *Recíprocamente, cuando un lugar jeométrico está definido inmediatamente por la ecuacion* $F(x, y, z) = 0$, *si cortamos esta superficie con diversos planos, por ejemplo horizontales, obtendremos las curbas*

$$(1)\ z = \alpha,\ y\ F(x, y, \alpha) = 0\ (2)$$
$$z = \alpha'\ y\ F(x, y, \alpha') = 0$$
$$z = \alpha''\ y\ F(x, y, \alpha'') = 0$$

de las que una de ellas cualesquiera que sea, espresa lo que viene a ser la primera, cuando atribuimos a la constante α *los valores sucesivos* α', α''; *por consiguiente, estas diversas curbas son las posiciones sucesivas que tomaria la curba* (1) *y* (2), *si se la hiciese mover en planos paralelos, cambiando tambien sus dimensiones, segun una lei que dependeria del modo*

biar estas directrices, hallaremos diversas superficies que todas pertenecerán a la *misma familia*: debemos ademas conocer que cada superficie individual es susceptible de ser ejendrada de una infinidad de modos. Vamos a citar muchos ejemplos, tanto para aclarar la difinicion jeneral, cuanto para adquirir desde luego el conocimiento de los lugares jeométricos de que tendremos que hacer un uso frecuente.

FIG. 28. 71. UNA SUPERFICIE CONICA, es el lugar de todas las posiciones que toma una recta móvil SA (fig. 28) sujeta a pasar siempre por un punto fijo S, y a apoyarse constantemente sobre una curba dada ABC, cuya curba puede ser de *doble curbatura*, es decir, que no tenga situados todos sus puntos en un mismo plano. Segun esta difinicion, la recta móvil SA es una jeneratriz constante de forma, y variable solo de posicion, mientras que el punto fijo y la curba ABC son las direcces: ademas debiendo considerarse a esta línea SA como prolongada hastrita el infinito por una y otra parte del punto S que se llama *cúspide* o *centro* enjendrará las dos *napas* opuestas e indefinidas SABC, S α β γ. Si sustituyésemos a la curba ABC cualquiera otra directriz, aun cuando cambiásemos el cúspide S, obtendriamos diversas superficies individuales que todas pertenecerian a la *familia de los conos*.

72. Pero estas superficies admiten tambien otros modos de enjendrarse. Con efecto, si cortamos el cono SABC con varios planos, paralelos, hallaremos secciones *semejantes* A' B' C', A" B" C", es decir, curbas en que existirán puntos como O', O", de tal naturaleza que los radios vectores, respectivamente paralelos, O'A' y O"A", O'B' y O"B", O'D' y O"D".... tendrán entre sí una razon constante: esta proposicion, que es cierta sea cual fuere la directriz ABC, se demuestra facilmente por la teoría de las líneas proporcionales. Con el objeto de fijar las

---

en que entrase la constante α en la ecuacion (2), *asi es que eliminando este parámetro entre las ecuaciones* (1) *y* (2) *recaeriamos, evidentemente, en la ecuacion* $F(x, y, z) = 0$ *que por consiguiente se halla ser el lugar de todas las posiciones de la primera curba móvil. Añadamos ademas que como podemos adoptar una infinidad de direcciones para los planos secantes paralelos, o tambien emplear otras superficies secantes, debe haber para cada superficie una infinidad de modos de ejendrarla.*

ideas, supondremos que ABC es una elipse, cuyos dos semi ejes son OA $= a$, y OB $= b$; segun esto, las otras secciones A'B'C', A"B"C", que suponemos paralelas a esta base, serán tambien elipses, cuyos ejes serán asimismo paralelos a los de ABC, y ademas darán

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots.$$

Esto supuesto, si hacemos mover la elipse ABC de modo que, 1º su centro recorra la recta SO; 2º que en todo el movimiento permanezcan siempre los ejes paralelos a sus posiciones primitivas: 3º que dichos ejes vayan aun mismo tiempo disminuyendo, y que esta diminucion sea proporcional a las distancias SO, SO', SO"....; satisfechas que sean estas condiciones; es evidente que esta elipse móvil coincidirá sucesivamente con las A'B'C', A"B"C"....; y segun esto, será respecto a la superficie cónica propuesta, una jeneratriz *variable de forma y de posicion.* Pero para reducir estas diversas condiciones a un enunciado mas simple, bastará recordemos que una curba de segundo grado, queda determinada, en su plano, por el conocimiento de cinco de sus puntos; por consiguiente, si trazamos sobre el cono cinco aristas fijas como las SA, SB, SC, SD y SE, podremos decir que para enjendrar la superficie, es preciso hacer mover a la elipse variable ABC, de modo que su plano sea siempre paralelo a sí mismo, y que constantemente se apoye sobre estas cinco rectas miradas como otras tantas directrices.

Finalmente, supuesto que está a nuestro arbitrio tomar los planos secantes paralelos a una direccion cualquiera, y que tambien podriamos cortar al cono con cualesquiera otras superficies, por ejemplo, con esferas descritas desde el punto O como centro y de un radio variable, admitiremos como conclusion evidente que hai una infinidad de líneas planas o de doble curbatura, que podremos adoptar por jeneratrices de una misma superficie cónica.

73. UNA SUPERFICIE CILINDRICA es el lugar de las diversas posiciones que toma *una recta móvil* AA' *que resbala sobre una curba fija* ABC, permaneciendo siempre *paralela a una direccion dada.* Pero no solo es admisible este primer modo de describir la superficie, FIG. 29.

en el que es constante de forma la jeneratriz AA'; sino que como todas las secciones paralelas al plano ABC son curbas manifiestamente idénticas, podremos tambien mirar la superficie como que la ha recorrido *la curba* ABC *moviéndose paralelamente a sí misma* (*) *apoyándose siempre* en el mismo punto de ella *sobre la recta* AA', esta será, en el caso presente una directriz de la curba móvil ABC. Si en seguida variamos la direccion de las secciones paralelas, hallaremos una infinidad de jeneratrices diferentes, propias todas ellas para describir el cilindro: ademas estas superficies pueden considerarse como un caso particular de los conos; tal es el de alejarse el cúspide a una distancia infinita.

74. Observemos, de paso, que si fuese la directriz de un cono o de un cilindro una recta, dicha superficie se reduciría a un *plano*, y este puede definirse como que es el lugar de las posiciones que toma una recta móvil sujeta, 1.° a resbalar sobre una recta fija, 2.° a pasar constantemente por un punto dado, o sino a permanecer siempre paralela a su primera direccion.

FIG. 30. 75. UNA SUPERFICIE DE REVOLUCION es ejendrada por una curba cualquiera GG'G" que jira alrededor de una recta fija DZ, de modo que cada uno de sus puntos G describe *un círculo*, cuyo plano es *perpendicular al eje* DZ, y su radio es *la distancia mas corta* GO que hai desde este punto al eje. Observemos que estos diferentes radios GO, G'O' G" O", aun cuando todos son perpendiculares a DZ, no por eso son paralelos entre sí cuando la jeneratriz GG'G" es de doble curbatura; o ann cuando siendo plana, no se halle el eje DZ sobre el mismo plano que la curba. Ademas de esto diremos, que se llaman *paralelos* de la superficie, a los diferentes círculos, tales como los GMA, G'M'A'..... que estos radios describen.

76. Si por el eje DZ, hacemos pasar un número cualesquiera de planos tales como los ZOA, ZOM..... nos resultarán secciones como

---

(*) *Decimos que una curba se mueve* paralela a sí misma, *siempre que dos de sus cuerdas, sean las que fueren, permanecen siempre paralelas a sus direcciones primitivas. Esta condicion envuelve evidentemente en sí el paralelismo del plano de la curba; pero esto mismo espresa ademas que esta curba* no jira *en su plano môvil.*

las AA'A", MM'M", que se llaman los *meridianos*, o mas bien *curbas meridianas* de la superficie, y que en cuanto a su forma son necesariamente idénticas. Con efecto, estos planos meridianos cortan a los *paralelos* segun radios que forman entre sí ángulos que evidentemente son iguales, como lo vemos en los AOM, A'O'M', A"O"M"; por consiguiente, si hacemos jirar el plano ZOM una cantidad angular MOA, tendremos que, todos los radios OM, O'M', O"M", coincidirán a una con los OA O'A', O"A", y las curbas meridianas se confundirán una con otra.

77. Segun esto resulta que, la meridiana AA'A" al jirar alrededor de DZ, recorre toda la superficie de revolucion, y puede mirarse como una nueva jeneratriz que reemplaza a la curba primitiva GG'G". Esta última, será con efecto, distinta del meridiano, siempre que no tenga todos sus puntos situados en un mismo plano que pase por DZ, segun podemos observarlo en la figura de que estamos tratando, que está espresada como construida en perspectiva sobre el plano ZOBB" A"A; y en razon a este convenio hemos punteado las partes *de los paralelos* y de la curba GG'G" que estan detras de este *cuadro*. Fuera de esto, podremos, construir siempre el meridiano por el conocimiento de cualquiera jeneratriz, pues para ejecutarlo bastará hallar los puntos en que un plano tal como el ZOB corta a los diferentes *paralelos* descritos por los puntos de GG'G"; y mas adelante (n.º 148) daremos un ejemplo de esta operacion.

78. Las superficies en que ahora nos ocupamos, admiten tambien otra especie de jeneracion que nos es interesante conocer. Supuesto que todo plano perpendicular al eje DZ, da por seccion un círculo cuyo centro se halla sobre este mismo eje (nº 75), y que tiene un punto comun con la curba GG' o con la meridiana BB', podremos en virtud de esta propiedad, mirar a la superficie de revolucion con *el lugar de las diferentes posiciones que toma un círculo môvil, que se mantiene siempre perpendicular a la recta* DZ, *cuyo centro recorre esta misma recta, al propio tiempo que su radio varía de modo que la circunferencia se apoya constantemente sobre la curba fija* GG'G", en cuyo caso esta línea es *una directriz*, a la que puede sustituirse el meridiano BB'B", y el círculo móvil es *una jeneratriz* variable al mismo tiempo de forma y de posicion. Esta definicion, cuya traduccion es mas facil FIG. 30.

en analísis (*), presenta la ventaja de que bajo este punto de vista, todas las superficies de revolucion forman una misma familia (nº 70) que admiten todas *una jeneratriz de una especie constante*, esta es el círculo que siempre se mueve perpendicularmente al eje, y que está dirijida en su movimiento por el meridiano que es el único que cambia de una superficie individual a otra.

79. Y así segun adoptemos por meridiano a una recta, una elipse una hipérbola o una parábola, obtendremos *un cono*, *un cilindro, un elipsoide, un hiporboloide o un paraboloide* DE REVOLUCION, con tal que siempre el eje de rotacion coincida con uno de los diámetros principales de la curba, porque de no ser así, aun cuando siempre seria de revolucion la superficie, la especie a que pertenecería seria mas complicada. Por ejemplo, si jirase un círculo alrededor de una recta situada en su plano, pero que no pasase por su centro, produciria *un toro* que es un jénero de superficie anular que dentro de poco tendremos ocasion de estudiar (nº 138).

80. Estos diversos ejemplos, esceptuando el último, no son aun sino casos particulares de superficies mas jenerales que sin ser de revolucion, nos serán útiles en lo subcesivo, y cuya jeneracion nos importa conocer. De esta naturaleza son LAS SUPERFICIES DE SEGUNDO GRADO que nos ofrecen cinco *jéneros* distintos, sin que en este número contemos ni a los conos, ni a los cilindros, ni tampoco a los planos, por ser variedades mui sencillas para ocuparnos de nuevo en ellas.

FIG. 34. 81. ELIPSOIDE. Sea una elipse ACDF construida sobre los semi ejes OA $= a$ y OC $= c$: la supondremos trazada en un plano vertical que tomaremos por *cuadro*, en el cual representaremos a la superficie en perspectiva, de aquí resultará que las líneas *punteadas* indicarán las porciones de curba situadas detras del plano de esta elipse, y conservaremos presente la idea de esta hipótesis en todo este capítulo. Si en un plano perpendicular a OC, construimos otra elipse A'B'D' que tenga por semi ejes a la ordenada O'A' $= a'$ de la primera elipse, y a una recta O'B' $= b'$ que tomaremos de una magnitud arbitraria,

(*) *Véase l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions, *chap. XIV.*

pero perpendicular a O'A'; y hacemos en seguida mover a la curba A'B'D', de modo que permaneciendo siempre sus ejes paralelos a sí mismos, conserven constantemente la misma razon primitiva $\frac{a'}{b'}$, y que uno de ellos coincida sucesivamente con las cuerdas D'A', D"A" DA.... de la elipse fija CAF; decimos en este caso que, el lugar jeométrico enjendrado de este modo, será la superficie denominada *elipsoide*. Cuando el plano de la elipse móvil pase por el centro O, adquirirá esta el máximo de magnitud, porque el semi eje variable a' será en este caso igual a la ordenada máxima OA $= a$ de la elipse fija; y si representamos por OB $= b$, la lonjitud que en este caso adquiere el segundo eje b', tendremos que las tres líneas

$$AD = 2a, \; BE = 2b, \; CF = 2c$$

serán las que se llaman *diámetros principales* o *ejes* del elipsoide. Ademas debemos notar que esta superficie será cerrada por todas partes, porque pasados los puntos C y F, tendrá la elipse móvil sus dos ejes imajinarios (*).

82. Si la elipse jeneratriz A'B'D' fuese un círculo, es decir, si hubiésemos tomado a O'B' igual a O'A', la superficie seria en este caso (nº 78) un elipsoide de revolucion, que tendría por meridiano a la curba directriz CAF; y dos de los diámetros principales de la superficie, es decir, los OA y OB serian iguales entre sí. Finalmente en el caso de que los tres ejes OA, OB, y OB tuviesen todos la misma lonjitud, el elipsoide dejeneraria en una esfera.

83. HIPERBOLOIDE *de una napa* Sustituyamos a la elipse directriz una hipérbola A'A"A, cuyo semi eje real sea OA $= a$, y el semi eje imajinario OC $= c$; construyamos en seguida, lo mismo que FIG. 35.

(*) *Si espresamos por medio del analísis esta especie de jeneracion, hallaremos que la ecuacion del elipsoide referido a sus ejes es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

*Véase l'*Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions, *chap. IX.*

anteriormente, una elipse A'B'D', en un plano perpendicular a OC, y sobre dos ejes de los cuales uno sea la cuerda A'D' de la hipérbola; haciendo ahora mover a esta elipse siguiendo la misma lei que anteriormente, enjendrará el *hiperboloide de una napa*, llamada así porque evidentemente esta superficie no tiene sino una sola napa, pero esta es indefinida lo mismo que lo es la hipérbola directriz. Cuando el plano de la elipse móvil pase por el centro O, llegará a su *mínimo*, porque en este caso el eje variable D'A' llegará a ser igual a DA, que es la menor de las cuerdas de la hipérbola: esta es la razon por qué a la curba ABDE se le da el nombre de *elipse de la garganta*, y las tres rectas

$$AD = 2a,\ BE = 2b,\ CF = 2c$$

son los tres ejes del hiperboloide; pero como la última CF no encuentra a la superficie, se le da el nombre de *eje imajinario*, sin embargo de que la cantidad real $2c$ no es sino el coeficiente de la espresion imajinaria que nos da el analísis al determinar los puntos de la superficie que se hallan situados sobre la recta indefinida OCO' (*).

84. Cuando son iguales los dos ejes *reales* OA y OB, tenemos que el hiperboloide es de revolucion (nº 78), porque en este caso se convierte la elipse jeneratriz A'B'D' en un círculo; y así en este caso particular, podrá considerarse enjendrada la superficie por la revolucion de la hipérbola A'A"A *alrededor de su eje imajinario* OCO'.

FIG. 36. 85. HIPERBOLOIDE *de dos napas*. Construyamos tambien sobre los semi ejes $OA = a$ y $OC = c$, una hipérbola, colocada de modo que OC sea el eje real; hagamos, lo mismo que anteriormente, mover la elipse A'B'D': esta enjendrará otra especie de hiperboloide que tendrá dos napas indefinidas, y separadas una de otra por un intervalo en el cual no existirá ningun punto de la superficie. Con efecto, entre los puntos C y F tendremos que la cuerda variable A'D', que sirve de eje a la elipse móvil, será imajinaria, y necesariamente, sucederá lo mismo con el segundo eje O'B', que debe conservar con el primero

---

(*) *La ecuacion del hipérbole de una napa referida a sus ejes es*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c^2} = 1.$$

una razon constante: de modo que siendo la jeneratriz totalmente imajinaria en este intervalo, no dará ningun punto real de la superficie. Sin embargo, como respecto al punto O, sabemos que el semi eje O'A' llegará a ser igual a OA. $\sqrt{-1}$, si queremos construir el coeficiente real del otro eje, que es asimismo imajinario, deberemos tomar sobre una perpendicular al plano AOC, una lonjitud OB, de modo que se verifique que

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB.\sqrt{-1}}{OA.\sqrt{-1}} = \frac{OB}{OA}:$$

en este caso las dos rectas AD $= 2a$ y BE $= 2b$ serán las que se llaman *ejes imajinarios* del hiperboloide de dos napas, en tanto que CF $= 2c$ será el *eje real* (*).

86. Para que esta hipérbola fuese de revolucion, bastaria que los dos ejes *imajinarios* OA y OB fuesen iguales, porque esta hipotesis contendria la relacion O'A' = O'B', que cambia a la elipse jeneratriz en un círculo. En este caso podria enjendrarse la superficie por la revolucion de las dos ramas CA"A' y FA"' de la hipérbola primitiva, *alrededor de su eje real* COF.

87. PARABOLOIDE *elíptico*. Adoptemos ahora por directriz fija a una parábola D"OA", haciendo mover perpendicularmente a su eje OX a una elipse A'B'D', cuyo primer eje O'A' $= a'$ sea la ordenada variable de esta parábola, y el segundo O'B' $= b'$ de una magnitud arbitraria, pero que conserve con el primero una razon constante. En este movimiento, la elipse móvil enjendrará una superficie compuesta de una sola napa indefinida en el sentido de OX, que se llama *paraboloide elíptico*, porque todas las secciones planas que se pueden trazar en ella, no son nunca sino *parábolas o elipses* (**). FIG. 37.

(*) *La ecuacion del hiperboloide de dos napas, referida a sus ejes, y tomando al que es real por eje de las* z, *seria*

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$$

(**) *La ecuacion de este paraboloide, referida a su vértice y al eje único OX como eje de las* x, *es*

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = x.$$

88. Cuando son iguales los dos ejes de la elipse jeneratriz, esta superficie es de revolucion (nº 78) en cuyo caso puede ser ejendrada por el movimiento de la parábola OA'A", que jira alrededor de OX.

FIG. 38. 89. PARABOLOIDE *hiperbólico*. Finalmente, conservando siempre por directriz a la parábola D"OA", sustituyamos a la elipse jeneratriz de que hasta ahora hemos hecho uso, una hipérbola D'H', A'G', construida en un plano perpendicular a OX, y sobre dos semi ejes O'A', O'B', cuya razon sea constante, mientras que el primero, que es el eje real de esta hipérbola, va siendo subcesivamente igual a las diferentes ordenadas O'A', O"A"..... de la parábola fija. Al moverse así la hipérbola móvil, siendo siempre paralela a sí misma, describirá dos napas abiertas a derecha e izquierda separadas por el hueco interior del cilindro D"OA", cuyas napas se estenderán al infinito, como sucede con la parábola en el sentido de O'X: pero si hacemos mover la hipérbola móvil desde O', hácia el punto V, su eje real O'A' disminuirá, y será nulo en O; por consiguiente las dos napas de que acabamos de hablar, se reunirán en este punto, y al mismo tiempo la hipérbola se reducirá, en esta posicion, a dos rectas indefinidas KO*k*, y LO*l*, que se hallarán enteramente sobre la superficie, y serán paralelas a las asíntotas de todas las hipérbolas precedentes.

Encima del punto O, en O''' por ejemplo, reaparecerá la hipérbola jeneratriz, pero en una situacion H'''B'''G''' inversa con relacion a sus asímptotas. Con efecto, los ejes que gráficamente hemos representado por O' A' y O'B', debian en todo rigor estar espresados por

$$a' = O'A',\ b' = O'B'\ \sqrt{-1};$$

Luego, supuesto que en el punto O''' la ordenada de la parábola es imajinaria, y que segun esto el primer eje de la hipérbola móvil se convierte en $a''' = O'''A'''.\ \sqrt{-1}$, es indispensable que el segundo eje, para conservar con el otro una razon constante, tome la forma de

$$b''' = a'''.\frac{b'}{a'} = O'''\,A'''.\frac{O'B'}{O'A'}$$

cuya cantidad es real, y está representada en la figura por O''' B'''. Esto nos dice que, encima del punto O, el eje real O'''B''' de la hipérbola jeneratriz tiene una direccion perpendicular al plano A'OD', y

que aun en esta situacion describirán las dos ramas de esta curba dos napas indefinidas, colocadas una de ellas delante de este plano y la otra detras, pero que reuniéndolas con las precedentes por medio de las rectas KO*k* y LO*l*, no presentará su conjunto sino una sola superficie sin ninguna interrupcion, cuyas curbaturas estarán en sentido opuesto, como sucede, poco mas o menos, con la garganta de una polea. A la superficie de que tratamos se le ha dado el nombre de *paraboloide hiperbólico*, porque nos enseña el analísis que todas las secciones planas que pueden trazarse sobre esta superficie, son siempre *parábolas o hipérbolas*, entre las cuales es preciso tambien comprender los casos particulares en que esta seccion es una recta aislada o dos rectas que se cortan (*).

90. Conviene que observemos aquí que, el paraboloide hiperbólico no podrá nunca ser un cuerpo de revolucion: porque segun lo que acabamos de decir sobre la naturaleza de las secciones planas, ninguna de estas curbas es jamas cerrada, y por consiguiente no puede ser circular.

91. El modo segun que acabamos de indicar la formacion del paraboloide hipérbolico presenta, verdaderamente, una especie de discontinuidad gráfica, supuesto que encima del punto O, es imajinaria la parábola que servia de directriz, pero como el analísis esplica facilmente esta dificultad, hemos preferido conservar este modo de je-

---

(*) *Para leer la fig.* 38 *debemos tambien recordar que la suponemos trazada sobre el plano vertical D"OA" como cuadro de perspectiva; y así es que todas las líneas* punteadas *estan detras de este plano. Ademas, como es bastante dificil dar una idea clara de la forma de este paraboloide con un dibujo en perspectiva, haremos bien en consultar un modelo de bulto, que podremos construir facilmente por medio de hilos tendidos en línea recta segun una lei determinada; véanse los números* 555, 566 *y la fig.* 120. *En cuanto a la ecuacion del paraboloide hiperbólico, referida al punto O considerado como oríjen de las coordenadas, y al eje OX como eje de las* x, *veremos que es*

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = x.$$

neracion, porque presenta mas analojía con las superficies precedentes, justifica mejor las denominaciones impuestas a los dos paraboloides, y manifiesta claramente la existencia de las dos rectas OL y OK situadas sobre el segundo. Sin embargo, citaremos otro modo de enjendrar estas superficies, enteramenre continuo y comun a los dos paraboloides.

FIG. 37. Sobre el mismo eje OX, y en planos perpendiculares, constrúyanse dos parábolas A'''OD''' y B'''OE''' que tengan el mismo vértice, sean cuales fueren sus parámetros, pero que sus concavidades esten vueltas hácia un mismo lado: hagamos en seguida resbalar una de las dos paralelamente a sí misma (nº 73) sin alterar su forma, pero de modo que su vértice permanezca constantemente sobre la otra parábola fija: y de este modo obtendremos *el paraboloide elíptico.*

FIG. 38. Tómense dos parábolas A''OD'' y B'''OE''' construidas del mismo modo que las de arriba, pero que tengan sus concavidades vueltas en sentido contrario: hágase tambien resbalar paralelamente a sí misma, a la curba A''OD'' constante de forma, de modo que su vértice recorra la otra parábola fija; y por este medio se producirá *el paráboloide hiperbólico* (*).

92. Para completar el conocimiento de los lugares jeométricos de que con mas frecuencia se hace uso, nos queda que hablar de las SUPERFICIES DESARROLLABLES y de las SUPERFICIES GAUSAS (1), pero, ademas de que no pueden comprenderse bien claramente las propiedades características de estas dos superficies sino despues de haber visto los

---

(*) *Véase* Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions, chap. VIII.

(1) *Por dos razones, en nuestro concepto mui poderosas, hemos creido deber sustituir este nombre a la denominacion de Gauchas con con que jeneralmente se han designado estas superficies; la primera porque creemos que al introducir una voz nueva en un idioma, debe procurarse que esta no se confunda con ninguna otra ya recibida y de significado enteramente diferente; la presente si no tenia este inconveniente en Europa, no sucede así en América; y la segunda, porque la denominacion que adoptamos es mas conforme con la etimolojía griega* gausos, *que significa* torcido al través.

planos tanjentes, nos parece mejor dejar al lector el tiempo necesario para que se familiarice con los ejemplos citados hasta aquí por medio de numerosas aplicaciones, y de variadas construcciones; y mas adelante nos ocuparemos especialmente en estas dos clases de superficies que tan importantes son.

93. Volvamos ahora a la cuestion indicada número 69, cuyo objeto era hallar un modo de *representar gráficamente una superficie.* Pero, supuesto que, segun la definicion jeneral dada en el número 70, estas magnitudes son producidas por el movimiento de una línea determinada, para conseguir el objeto propuesto, bastará *señalar sobre los planos de proyeccion diferentes posiciones de la* JENERATRIZ, *bastantes en número y próximas unas a otras para que este sistema de curbas pueda pintar a la vista la continuidad de la superficie, su curbatura, y tambien la estension de sus napas.* Ademas, entre las jeneratrices de diferentes especies que siempre puede admitir una misma superficie deberá preferirse aquella que por su sencilla o su regularidad, sea la mas acomodada para dar una imájen mas clara de ella; y algunas veces, para mejor conseguir este objeto, se trazarán a un mismo tiempo dos sistemas de jeneratrices, como lo son en las superficies de revolucion los meridianos y los paralelos. Con efecto, por medios enteramente semejantes a estos, es como ya hemos figurado las diferentes superficies en los dibujos en perspectiva de que hemos hablado en este capítulo.

94. Ademas, es tambien mui útil señalar las *trazas* de la superficie, es decir, sus intersecciones con los planos de proyeccion: así como tambien los *contornos* dentro o fuera de los cuales estan proyectados todos los puntos de esta superficie, siempre y cuando existan semejantes límites; porque estos contornos son una especie de perfiles que hacen ver jeneralmente de un modo mui sensible las formas de los objetos; pero para enseñar a determinar exactamente estos contornos, es preciso que antes hayamos hablado de los planos tanjentes. Observemos aun que, cuando anticipadamente conozcamos bien la forma de la superficie, podremos, para simplificar los dibujos, limitarnos a emplear solamente alguno de los medios de descripcion, cuyos detalles acabamos de dar.

CAPITULO II.

De los planos tanjentes en jeneral.

95. Se dice que un plano es *tanjente* a una superficie en un punto dado, *cuando este plano contiene las tanjentes a todas las curbas que se tracen sobre dicha superficie y pasen por el punto en cuestion*: pero antes es preciso demostrar que en jeneral existe en cada punto de una superficie un punto que goza de esta propiedad, porque no conocemos *a priori* la razon por qué estas varias tanjentes no puedan formar un cono, como efectivamente sucede en ciertos puntos *singulares*. Vamos por consiguiente a probar que *tres curbas cualesquiera, trazadas por un punto dado sobre una superficie, tienen siempre las tres tanjentes tiradas a cada una por el punto indicado, colocadas sobre el mismo plano.*

FIG. 31. Sea GM*g* la forma y posicion de la jeneratriz (n.º 70) cuando pasa por el punto dado M; sea DM*d* una curba trazada sobre la superficie, por la cual deba resbalar constantemente la jeneratriz, cuando en su movimiento describa este lugar jeométrico: y finalmente sea MX otra tercer curba *cualquiera* situada tambien sobre la superficie. Si trasportamos la jeneratriz a otra posicion tal como G'M'*g*', no por eso dejará de encontrar a la curba MX en un punto tal como P', con tal que el punto M' se tome sobre la directriz DM*d* bastante próximo del M. En este caso uniendo los puntos M, M', y P' por medio de rectas indefinidas, conocemos que estas tres líneas serán secantes respecto a las curbas MD, MX y G'*g*', y que las tres estarán evidentemente situadas sobre un mismo plano. Hagamos ahora mover a la jeneratriz G'*g*' sobre MD, aproximándola a su situacion primitiva G*g*, pero observando siempre la lei que regla la variacion de forma y de posicion de esta curba en la superficie que consideramos; figurarémonos en seguida que el plano de las tres secantes jire al rededor del punto M, de modo que pase al mismo tiempo que la jeneratriz, por los puntos M" y P", M"' y P"',..... en que esta corta subcesivamente a las curbas MD y MX; y así *este plano móvil contendrá constantemente a las tres secantes variables.* Pero cuando la jeneratriz haya vuelto a la posicion GM*g*, el

punto M' que se mueve sobre MD, se confundirá con M: y en este mismo instante el punto P' de la curba MX ha debido reunirse evidentemente con el punto M; y por una consecuencia necesaria, se habrán tambien confundido los puntos P' y M' sobre la curba variable G'*g*'. Luego en este caso las tres secantes movibles habrán llegado a ser las tanjentes respectivas a las curbas MD, MX, y MG, y si nos acordamos que estas tres secantes estaban situadas en un mismo plano en cada una de las posiciones subcesivas, concluiremos de aquí, que habiendo llegado a ser tanjentes las MT, MT' y MT", estas se hallarán aun situadas en un mismo plano, el cual no es otra cosa que el límite de las posiciones que subcesivamente iba tomando el plano movible de las tres secantes (*).

(*) *Observaremos que nos parece indispensable establecer este teorema (demostrado de este mismo modo desde el año de* 1817 *en las lecciones que dimos en la Escuela politécnica), para poder tomar, en lo subcesivo, del método infinitisimal las consideraciones abreviadas que tan útiles son y a las que tendremos que recurrir mui pronto (nº* 158*). Con efecto, solo despues de haber probado rigurosamente que todas las tanjentes, en un mismo punto de una superficie, estan situadas en un solo plano, es cuando podemos mirar a la superficie como compuesta de* elementos superficiales *que sean* planos, *porque entonces estos estan formados por los elementos* lineales *comunes a las curbas de la superficie y a sus tanjentes. En cuanto a la demostracion precedente, se ha objetado contra ella que si en el caso presente la recta M' P' es, con respecto a la curba G'g', una secante cuyos puntos de seccion van a reunirse; no permanece constante la forma de la línea G'g' en el intervalo que para esto se necesita, y que jeneralmente se admite esta condicion, cuando se define a la tanjente como que es el límite de una secante. Para responder a todo esto, es suficiente decir que si se admite esta permanencia de forma en la jeometría plana, no es sino de un modo tácito, y porque en ella no tratamos sino de curbas dadas e invariables, pero que si, sin salir de un plano, trazásemos un círculo que cortase a una recta, y en seguida hiciésemos disminuir el radio hasta que los dos puntos de seccion llegasen a reunirse, no tendriamos duda ninguna de que en este*

Ademas de esto, como la curba MX tenia, en todo lo que precede, una posicion arbitraria sobre la superficie, sígnese de aquí que el plano tirado por las tanjentes de las dos líneas MG y MD, contendrá a la tanjente de cualquiera otra curba que pase por M; y así es que este plano TMT', será *tanjente a la superficie*, segun la definicion que hemos dado al principiar este artículo.

96. Cuando una superficie presenta dos o mas napas que se cortan, como sucede en un cono cuya base es una curba de nudo, parece desde luego que los puntos de interseccion de estas dos napas presentan una escepcion a la propiedad de que goza en jeneral el plano tanjente; pero conoceremos que esta circunstancia está contenida en los casos ordinarios, si observamos que todas las tanjentes en un mismo punto de la interseccion, deben distribuirse sobre las dos napas, del mismo modo que lo estarian sobre dos superficies independientes que se cortasen en este mismo sitio, y cada una de las cuales tuviese su plano tanjente distinto uno de otro.

97. Sin embargo, algunas veces se hallan verdaderas escepciones

---

caso el círculo variable *llegase a ser tanjente a la recta. Y así es que la permanencia de forma no es absolutamente necesaria; y querer exijirla, seria restrinjir gratuitamente el carácter jeneral de la tanjente a una curba. Por consiguiente es preciso definir a la tanjente como el límite de las posiciones que toma una secante cuyos dos puntos de seccion se han aproximado indefinidamente, con tal que estos puntos esten situados sobre la misma rama de la curba, y que esta última no haya variado de forma y posicion sino segun* una lei continua; *esto mismo es lo que sucede en el caso presente con la curba G'g', ya que la misma superficie se supone continua.*

Añadamos por último que, será preciso tambien mirar a dos curbas cualesquiera como tanjentes una de otra siempre que habiendo sido secantes se hayan modificado en posicion o en forma segun una lei, hasta hacer coincidir en uno sus dos puntos de seccion; porque es evidente que estas dos curbas habrán adquirido una tanjente comun, *que será el límite de las posiciones de la recta móvil que pasa por los dos puntos comunes a las curbas secantes.*

de la propiedad del plano tanjente; pero estas no tienen lugar sino en *los puntos singulares* de la superficie, en que ya sea la jeneratriz o ya la directriz llega a convertirse en un punto único *que no admite tanjente.* Por ejemplo, en el cúspide de un cono, las diversas aristas que en él se cortan son líneas rectas situadas sobre la superficie, y ellas mismas son sus propias tanjentes; sin embargo, estas rectas estan de dos en dos situadas en planos evidentemente distintos. Por consiguiente el cúspide de un cono es un punto singular de esta superficie para el cual *no existe plano tanjente.* Pero si observamos que la jeneratriz paralela a la base del cono (n.º 72) se achica cada vez mas al aproximarse al cúspide, y al llegar a él concluye por reducirse a un punto, y este propiamente hablando no admite ninguna tanjente, conoceremos la razon por qué cesa, de ser aplicable a este mismo caso particular la demostracion jeneral del n.º 95. La misma causa de escepcion se hallaria partiendo de la definicion de las superficies cónicas dada nº 71, porque en tal caso una de las directrices de la recta móvil seria el punto único, llamado *cúspide* del cono y una directriz de esta naturaleza no es susceptible de tener tanjente.

Una circunstancia análoga se presenta en las superficies de revolucion, cuya meridiana corta al eje formando un ángulo *obtuso* o *agudo,* y tambien nulo: en el punto de esta superficie que está situado sobre el eje de revolucion *no hai plano tanjente,* antes al contrario las tanjentes a las diversas posiciones del meridiano forman un cono recto. Esto es lo mismo que veremos si hacemos jirar un círculo alrededor de sus cuerdas.

98. Es importante observar que, la definicion que del plano tanjente hemos dado nº 95, no exije absolutamente que este plano no tenga sino un solo punto comun con la superficie. Esto ciertamente sucede con las superficies *convexas* en todas direcciones, en los demas casos puede el plano tanjente encontrar a la superficie en diferentes puntos y aun cortarla segun una curba que pase por el punto de contacto, como veremos en el *toro* nº 138 y en las superficies gausas. Esta circunstancia no impide el que este plano contenga las tanjentes a todas las curbas trazadas por el punto en cuestion sobre la superficie, y por consiguiente *tocará* realmente a la superficie en este sitio; al propio tiempo que en otros puntos tendrá varios comunes con ella, y será jeneralmente *secante.*

99. Sin embargo, hai cierto jénero de superficies en las cuales el plano que es tanjente en un punto, es necesariamente *tanjente en toda*
FIG. 32. *la lonjitud de una recta.* Con efecto, consideremos el cilindro ABC cuya base es una curba cualquiera; si por la jeneratriz AB y la tanjente BT a la base, tiramos un plano, decimos que este plano no solo contendrá a todas las tanjentes en el punto B de las diversas curbas que pasen por este punto y esten trazadas sobre la superficie (que es lo mismo que hemos demostrado ya nº 95), sino que contendrá tambien a las tanjentes a todas las demas curbas que por los diferentes puntos de la AB se tracen sobre el cilindro, para probar esta asercion, bastará hacer ver que el plano ABT contiene a la tanjente MV tirada a una curba cualquiera MX. Si tiramos por AB y un punto D próximo a B el plano ABR, este plano cortará, manifiestamente, al cilindro segun una recta DE paralela a AB, y a la curba MX en un punto G situado sobre DE: de modo que este plano contendrá a las dos secantes BDR y MGS. Hagámosle ahora jirar alrededor de AB de modo que el punto D se aproxime al B; y tendremos que los puntos de seccion D y G cambiarán sobre las curbas, pero se hallarán siempre a la par sobre una recta móvil que *constantemente será parábola a* AB; luego cuando uno de estos puntos D se haya confundido con B, en ese mismo instante coincidirá tambien el otro G con el M; es decir que cuando el plano móvil haya tomado la posicion ABT, tambien la secante variable MGS que siempre se halla en este plano, se habrá convertido en la tanjente MV. Y así es que esta última recta está contenida en el plano ABT.

Concluyamos de aquí *que, cuando un plano toca a un cilindro en un punto cualquiera, tambien es necesariamente tanjente en todo el largo de la jeneratriz rectilínea que pasa por el punto de contacto.*

100. En las superficies cónicas, goza tambien el plano tanjente de esta misma propiedad, y se demuestra de un modo análogo, observando que en este caso los puntos de seccion D y G estan constantemente situados sobre una misma recta variable, pero que siempre encuentra a AB en el cúspide del cono. Finalmente, veremos mas adelante, que existe esta misma propiedad en una clase de superficies llamadas *desarrollables,* de las cuales no son los cilindros y los conos sino jéneros particulares.

101. Apesar de esto sería un error creer que este contacto del pla-

no tanjente en todo el largo de una recta, proviene de que las superficies de que acabamos de hablar admiten en su formacion jeneratrices rectilíneas; porque hallaremos pronto superficies enjendradas tambien por una recta, y llamadas *gausas*, en las que el plano tanjente no cumple con las verdaderas condiciones de contacto sino *en un solo punto* aun cuando contenga a una recta de la superficie (*véanse* los números 142 y 154).

102. El teorema demostrado nº 99, nos ofrece una consecuencia importante que en lo sucesivo tendremos muchas veces que recordar; tal es la de que, *cuando se proyectan sobre un plano una curba* MX *y su tanjente* MV, *son tambien tanjentes una a otra las proyecciones de estas dos líneas.* Con efecto, para proyectar la curba MX, deberemos imajinarnos (nº 4) que pasa un cilindro MBCX por esta línea y que es perpendicular al plano dado, al cual corta segun una curba BC que será la proyeccion de MX. Para proyectar, en seguida, la recta MV será preciso tirar el plano VMB, que siendo evidentemente *tanjente* en M al cilindro, deberá tambien serlo (nº 99) en B, y por consiguiente este plano contendrá a la tanjente BT de la base BC. Luego esta tanjente se hallará en la interseccion del plano proyectante con el plano de esta base, y será tambien la proyeccion de MV. FIG. 32.

Hallaríamos tambien la misma consecuencia, si proyectásemos la curba y su tanjente por medio de rectas oblicuas al plano dado, siempre que estas fuesen paralelas entre sí.

103. Reasumiendo lo que ya se ha dicho sobre los planos tanjentes, debemos concluir de todo ello que, para construir el plano que toque a una superficie cualquiera en un punto dado, bastará en lo sucesivo que hallemos *las tanjente a dos curbas*, trazadas sobre la superficie que pasen por el punto dado, prefiriendo siempre en cada ejemplo, aquellas cuyo trazado presente mas facilidad; haremos en seguida pasar un plano por estas dos tanjentes, cuya operacion la practicaremos segun se ha dicho en el nº 22. Mui pronto daremos ejemplos de estas construcciones.

Cuando por el punto dado, pasase *una recta* que toda ella estuviese *situada sobre la superficie*, esta recta será ella misma su propia tanjente; y en este caso deberá estar contenida en el plano tanjente, y podrá emplearse para construir este plano; pero no siempre deberemos

concluir de aquí que este plano *toca* a la superficie en toda la lonjitud de esta recta (n.º 101).

104. *La normal* a una superficie es la recta perpendicular al plano tanjente, tirada por el punto de contacto de este plano. La construccion de esta normal será por consiguiente facil (nº 33) siempre que se hayan determinado las trazas del plano que toca a la superficie en el punto de que se trata.

FIG 33. 105. Este es el lugar de dar una regla jeneral que sirva para determinar *el contorno aparente* de un cuerpo, es decir la línea que, sobre la superficie de este cuerpo, separa las partes visibles al observador de las que no puede percibir. Para esto sea O la posicion que ocupa el ojo del espectador: imajinémonos tirados por este punto y tanjencialmente a la superficie todos los planos que sea posible tirarle; estos planos tocarán a la superficie en los puntos A, B, C.... que formarán una curba en la cual terminarán todos los rayos visuales OA, OB, OC.... tanjentes a la superficie; y segun esto la línea ABCD será el límite de la porcion que puede percibir el observador colocado en O. Pero este contorno aparente cambiaría de forma y de posicion variando el punto de vista: supongamos que este se traslada a O', por ejemplo, y en este caso el contorno aparente será A'B'C'D'. Por consiguiente, seria preciso en cada caso, fijar la posicion del punto de vista, y consiguiente a esto determinar en seguida el contorno aparente, lo cual daria lugar a operaciones gráficas, que si bien enseñaremos a ejecutar en la perspectiva, no servirian en el caso presente sino para complicar inútilmente el dibujo. En lugar de que si conservamos la hipótesis admitida ya núm. 16, y en virtud de la cual *se considera el punto de vista de cualquiera proyeccion horizontal a una distancia infinita sobre la vertical* OO', que pasa por cualquiera de los puntos del objeto; los planos tanjentes cuyos puntos de contacto con la superficie nos daban a conocer a la curba ABC..... serán, en este caso, todos *verticales*, y su determinacion será mas facil; o mas bien, se efectuará por lo comun de un modo mui sencillo, como lo reconocemos en los depurados siguientes.

106. De aquí resulta que *el contorno aparente de una superficie proyectada sobre el plano* HORIZONTAL, *se obtiene determinando los puntos de contacto de todos los planos tanjentes que son* VERTICALES.

En cuanto a la proyeccion vertical de esta misma superficie, tiene su punto de vista particular, que se considera (nº 16) *a una distancia, infinita colocado sobre una perpendicular al plano vertical*; de donde se sigue que, el contorno aparente, relativo a esta proyeccion, no será el mismo que el del plano horizontal; pero se obtendrá hallando *los puntos de contacto de la superficie con todos los planos tanjentes que son* PERPENDICULARES AL PLANO VERTICAL.

107. Ahora podremos tambien completar las reglas que hemos indicado en los números 15 y 16, respecto a la puntuacion de las líneas principales. Porque de todo lo que precede se sigue que, las líneas o porciones de líneas que sobre una superficie cualquiera, se hallan *encima del contorno aparente* respecto a la proyeccion horizontal serán *las únicas partes visibles* de esta proyeccion; y en cuanto al plano vertical, *los únicos puntos visibles* serán los que se hallen *delante del contorno aparente* relativo a este último plano. Pero no debemos olvidar que una misma línea podrá mui bien ser visible en una de sus proyecciones e invisibles en la otra, por ser en los dos casos diferente el punto de vista: de modo que será indispensable emplear con dicernimiento, en cada plano, los dos modos de puntuacion que hemos indicado para las *líneas principales*, teniendo siempre presente que no se aplican las distinciones precedentes a las *líneas auxiliares* (nº 15, 2º).

108. Ademas, siempre que en un depurado entre un plano *indefido*, ya sea tanjente o ya secante, *no lo consideramos como si realmente existiese*, y solo supondremos que se ha querido *dar a conocer* o *hallar sus trazos*: porque de no ser así, este plano ocultaria, casi siempre, una gran parte, y a veces la totalidad de la superficie, lo cual tendria el grave inconveniente de no dejar distinguir sobre esta superficie, objeto principal del depurado, las partes superiores o anteriores de las opuestas; de modo que la forma de los objetos se espresaría con menos claridad en el dibujo gráfico. Esta restriccion deberá sobreentenderse siempre en lo subcesivo, sin que tengamos necesidad de recordarla a cada paso.

CAPITULO III.

De los planos tanjentes a los cilindros y a los conos.

FIG. 39. 109. *Se nos propone tirar un plano tanjente a la superficie de un cilindro cualquiera, por un punto dado sobre su superficie.*

Sea AECG la directriz del cilindro, que supondremos situada en el plano horizontal, y aun cuando en el caso presente esta línea es un círculo, el método que vamos a esponer es aplicable a cualquiera otra curba; sea tambien (*ab*, *a'b'*) la recta a quien debe ser constantemente paralela la jeneratriz rectilínea, cuando resbale sobre la AECG. Principiaremos por determinar el contorno aparente de la superficie, que en el plano horizontal estará marcado por los puntos de contacto de todos los planos tanjentes *verticales* (nº 106). Pero como cada plano de este jénero contendrá una arista (*) del cilindro, y tendrá por traza horizontal a la proyeccion de esta misma recta, es decir, una paralela a *ab*; y ademas este plano tocará al cilindro en todo el largo de esta jeneratriz (nº 99), su traza deberá por consiguiente ser tanjente a la base AECG; luego, si tiramos a esta curba las tanjentes AB y CD paralelas a *ab*, estas mismas serán las trazas de los planos tanjentes

---

(*) *Para simplificar el lenguaje, damos algunas veces el nombre de* aristas *de un cilindro o de un cono, a las diversas posiciones de la jeneratriz rectilínea; pero nunca debemos aplicar a estas líneas el nombre de* elementos, *porque los elementos de una magnitud deben ser siempre homojéneos con ella misma: así es que, los elementos de una superficie son otras pequeñas superficies cuya suma compone la superficie de que se trata. Ademas de esto, vamos mui pronto a emplear* (nº 159) *esta voz de* elemento *en su verdadera acepcion, en cuyo caso, no hai duda que, de su doble significado resultaría una confusion de ideas mui perjudicial a la teoría de las superficies gausas. Tambien emplearemos algunas veces el nombre de* base *para señalar la directriz de un cilindro y de un cono, principalmente cuando esta curba esté situada en el plano horizontal.*

verticales, y al mismo tiempo las proyecciones horizontales de sus líneas de contacto que serán las dos jeneratrices (AB, A'B') y (CD, C'D'). Y así, estas dos líneas formarán el contorno aparente del cilindro sobre el plano horizontal, y cualquiera arista de esta superficie que esté *debajo* de estas rectas, es decir que termine en el semicírculo AGC, será *invisible* en la proyeccion horizontal.

En cuanto al contorno aparente sobre el plano vertical, nos lo darán (nº 106) los planos tanjentes que sean perpendiculares a este plano de proyeccion; por consiguiente, sus trazas horizontales deberán ser perpendiculares a la línea de tierra y tanjentes como las de arriba a la base AECG; en virtud de esto estas trazas serán EE' y GG'. En seguida, como estos planos tocarán necesariamente al cilindro segun las jeneratrices EF y GH, cuyas proyecciones verticales son las rectas E'F' y G'H' paralelas a *a'b'*, síguese que, estas dos jeneratrices formarán el contorno aparente de la superficie sobre el plano vertical; de modo que cualquiera otra arista que se halle *detras* de estas rectas, o que termine en el semicírculo EAG, será *invisible* en proyeccion vertical.

110. Resolvamos, ahora, el problema propuesto, suponiendo que M es la proyeccion horizontal del punto dado; y en concepto de que este debe hallarse sobre la superficie, no podremos tomar arbitrariamente la segunda proyeccion de este punto, porque esta va a resultar de la primera. Con efecto, por el punto en cuestion, situado sobre la superficie del cilindro, pasa necesariamente una jeneratriz que estará proyectada horizontalmente en la recta ML paralela a *ab*; y como ML va a encontrar a la base del cilindro en L, este punto debe ser la traza horizontal de esta jeneratriz, cuya proyeccion vertical será por consiguiente L'K' paralela a *a'b'*; y así es que, proyectando el punto M a la recta L'K', hallaremos las dos proyecciones M y M' del punto asignado sobre la superficie del cilindro.

Esto no obstante, hai en este caso otra segunda solucion; porque como la recta ML corta a la base en dos puntos L y V, podremos tambien decir que V es la traza de otra arista proyectada asimismo sobre MV, pero que tendrá por proyeccion vertical a V'K", de modo que, si referimos el punto M a esta última recta en el punto M", habrá sobre el cilindro otro segundo punto (M, M") que estará, así como el primero (M, M'), proyectado horizontalmente en M.

FIG. 39. 111. Sentado esto, construyamos èl plano tanjente respecto al punto (M, M'). Este plano contendrá a la jeneratriz (ML, M'L'), y por consiguiente pasará su traza por el pie L de esta recta; y como ademas, debe tocar al cilindro en todo el largo de esta jeneratriz (nº 99), dicho plano contendrá necesariamente la tanjente a la base en el punto L, es decir, a la línea LQ, que precisamente será la traza horizontal del plano pedido. Para hallar la otra traza, determinaremos el punto K en que la recta (ML, M'L') contenida en este plano, penetra al plano vertical, y QK' será la traza vertical del plano tanjente. Pero si como en el depurado que presentamos, sucede, que la traza PQ vaya a cortar a la línea de tierra a una distancia grande, tiraremos por el punto (M, M'), una recta auxiliar que sea paralela a la traza horizontal LQ, y cuyas proyecciones serán, evidentemente, la MX paralela a QL y la M'X' paralela a la línea de tierra; construyendo en seguida el punto X' en que esta auxiliar va a penetrar al plano vertical, deberá este punto pertenecer tambien a la traza vertical del plano tanjente, que será la X'K'. Será mui bueno que empleemos en todos casos este medio, como un verificador del resultado.

En cuanto al plano tanjente relativo al punto (M, M") observaremos que en este caso la jeneratriz de contacto está proyectada en MV y M" V'; luego tirando por el pie V de esta recta una tanjente VS a la base del cilindro, esta será la traza horizontal de este nuevo plano tanjente. La traza vertical SK" se determinará, como arriba, hallando el punto K" en que la jeneratriz de contacto penetra al plano vertical; o sino, recurriremos tambien a la hirizontal (MY, M" Y') que nos dará otro tercer punto Y' de esta traza.

112. Observamos, ademas, que conteniendo los dos planos tanjentes PQR' y PSR', que acabamos de construir, a dos jeneratrices del cilindro que son paralelas entre sí, no podrán cortarse estos planos si no segun una recta paralelas a estas jeneratrices. Por consiguiente, si construimos (nº 27) la interseccion (PR, P'R') de estos dos planos, deberá esta recta ser exactamente paralela a (*ab a'b'*), lo que nos proporcionará otra nueva verificacion de las operaciones gráficas anteriores.

113. En conformidad con las razones espuestas en el nº 108, nos hemos propuesto, en el presente depurado, el construir solo las tra-

zas de los planos tanjentes, sin mirar a estos como realmente existentes; pero en el supuesto de que estas líneas subsisten, será preciso *puntuar* las partes de ellas que esten ocultas por las proyecciones del cilindro, tanto sobre el plano horizontal como sobre el vertical. En cuanto a las aristas del cilindro, hubieramos podido *puntuar* de todas ellas las que nos han servido de líneas *auxiliares* para llegar a hallar los planos tanjentes; pero hemos preferido mirar a todas estas rectas, como otras tantas *jeneratrices* que realmente existentes, cuyo conjunto espresa mejor la forma de la superficie; segun esto, estas líneas se han debido representar por medio de una línea *seguida o puntuada* en razon de ser visibles o invisibles: cuya distincion ejecutamos practicando las reglas enunciadas en el nº 109.

114. Si queremos construir la curba que forma la penetracion del cilindro en el plano vertical, bastará para conseguirlo, hallar las trazas de las diferentes jeneratrices de esta superficie, sobre el plano de que trata, y de este modo hallaremos la línea F'K'D'H'K"B' que, en el ejemplo de que tratamos, es una elipse; esta deberá *tocar* en los puntos K' y K", a las trazas de los planos tanjentes, porque estos contienen (nº 99) las tanjentes a todas las curbas situadas sobre el cilindro, y tiradas por los diversos puntos de su arista de contacto. Para hallar el punto *mas alto* y *mas bajo* de la curba F'K'D'H'..... bastará construir las dos jeneratrices correspondientes a los puntos de la base T y *t* en los cuales la tanjente es *paralela a la línea de tierra*. Porque, respecto a cada una de estas jeneratrices, a la (TV, T'V') por ejemplo, el plano tanjente correspondiente cortará al plano vertical segun una recta que evidentemente será paralela a la línea de tierra, y por consiguiente horizontal; ademas, debiendo tocar necesariamente esta interseccion a la curba F'K'D'H'.... se sigue claramente que el punto V' es precisamente el punto en que *la tanjente es horizontal*. Observemos ademas que, esta consecuencia es tambien cierta en un cilindro cualquiera, aun cuando su base sea otra curba arbitraria diferente del círculo.

115. Por último añadiremos que, si se hubiese elejido por directriz del cilindro, una curba cualquiera situada en el espacio y definida por medio de sus dos proyecciones sobre los planos fijos, hubieramos podido reducir la cuestion al caso del núm. 109, tirando por los diver-

sos puntos de esta curba rectas paralelas a la recta (*ab, a'b'*), y determinando en seguida las trazas de estas jeneratrices sobre el plano horizontal; de este modo hubieramos hallado la base AELG, que es la misma que desde un princpio hemos elejido.

116. *Tirar un plano tanjente a un cilindro, por un punto dado fuera de esta superficie.*

FIG. 39. Concibamos que respecto a este cilindro existen los mismos datos que anteriormente, y sea (N, N') el punto señalado en el espacio; tiraremos por este punto y paralelamente a las jeneratrices, una recta (NP, N'P'), la cual evidentemente deberá hallarse contenida en su totalidad en el plano tanjente que buscamos, porque este, cualquiera que él sea, contendrá tambien precisamente a una arista del cilindro. Luego, si construimos la traza horizontal P de esta recta, tendremos conseguido un punto de la traza del plano pedido; y debiendo esta tocar a la base del cilindro (nº 99), será alguna de las tanjentes PLQ o PVS que por el punto P pueden tirarse a esta base. Habrá por consiguiente dos planos que resolverán el problema, y sus trazas verticales se hallarán facilmente, porque cada uno de estos planos contendrá a la recta (PN', P'N') y a la arista que parte del punto de contacto L o V (*). Podriamos tambien figurarnos, como lo hemos hecho en el nº 111, que por el punto dado (N, N') se habia tirado una horizontal situada en el uno o en el otro de los planos tanjentes, y construir en seguida la traza vertical de esta recta.

117. *Hallar un plano que sea tanjente a un cilindro y paralelo a una recta dada.*

FIG. 40. Sea AECG la base del cilindro sobre el plano horizontal, y (EF, E'F') una de las jeneratrices: construiremos el contorno aparente de

---

(*) *Sucede en el caso presente que los puntos de contacto* L *y* V *se hallan sobre una misma paralela a la recta* ab, *porque hemos querido que la figura del problema precedente sirva tambien para este; pero cuando se tome el punto* (N, N') *enteramente arbitrario, no tendrá jeneralmente lugar esta circunstancia, ademas de que esto no hará variar en nada los raciocinios que nos han servido para resolver el problema que nos ocupa.*

esta superficie sobre los dos planos fijos, segun lo hemos practicado en el núm. 109; si en seguida, representamos por (*mn, m'n'*) la recta dada, será preciso tirar, por un punto de esta línea, una paralela (*ma, m'a'*) a las jeneratrices del cilindro, y hacer pasar, en seguida, un plano por estas dos rectas. Este plano, que tendrá por traza horizontal a *an*, deberá ser paralelo al plano tanjente que buscamos, porque este último plano contendrá a una arista del cilindro, y será tambien paralelo a las dos rectas proyectadas en *ma* y *mn*; luego la traza de este plano tanjente será una de las dos tanjentes PQ o TS tiradas a la base paralelamente a *an*. Por consiguiente habrá tambien en este caso dos soluciones, y las trazas verticales QR' y SV', se hallarán mui fácilmente por medio de las aristas de contacto que serán (PR P'R') respecto a uno de los planos, y (TV, T'V') respecto al otro. En el caso presente los dos planos tanjentes serán evidentemente paralelos entre sí, y por consiguiente sus trazas verticales deberán tambien ser paralelas una a otra.

118. Al terminar estos problemas relativos a los cilindros, observaremos que, no se nos podria exijir que un plano fuese tanjente a estas superficies y pasase al mismo tiempo por una recta dada. Porque por el solo hecho de que un plano tocase a un cilindro en un punto, seria forzosamente, segun hemos visto núm. 99, tanjente en todo el largo de la jeneratriz que pasase por este punto; de modo que esta primera condicion contiene implícitamente dos, en virtud de las cuales el plano que buscamos debe efectuar el contacto en dos puntos de la superficie; si a esta obligacion añadimos aun la de pasar por una recta o dos puntos tomados fuera de la misma superficie, tendremos aquí *cuatro* condiciones distintas, cuando solas tres son necesarias para determinar la posicion de un plano. Sin embargo, si la recta dada fuese paralela a las aristas del cilindro, lo que en sustancia equivaldria a fijar un solo punto, quedaria el problema reducido al del núm. 116.

119. *Tirar un plano tanjente a una superficie cónica por un punto dado sobre ella.*

Sea ACBD la curba directriz que supondremos trazada en el plano horizontal, y (S,S') el cúspide del cono; principiaremos por determinar el contorno aparente de esta superficie sobre el plano ho- FIG. 41.

rizontal, para lo que determinaremos (núm. 106) todos los planos tanjentes que pueden ser *verticales*. Y como los planos de esta naturaleza tienen por traza horizontal a la proyeccion misma de la jeneratriz que se halla sobre ellos, síguese que esta traza pasará por el punto S; y como ademas debe tocar a la base, en atencion a que tambien en este caso tiene lugar el contacto del plano tanjente en todo el largo de una jeneratriz (núm. 100), concluimos de aquí que las tanjentes SA y SB tiradas desde el punto S, son las trazas de los planos tanjentes verticales, y que estos tocan al cono segun las dos aristas (SA,S'A') y (SB,S'B'), que son las que forman el contorno aparente de la superficie cónica con relacion al plano horizontal. De modo que cualquiera jeneratriz que se halle *debajo* de estas, es decir que termine en la porcion ADB de la base, será *invisible* sobre el plano horizontal.

En cuanto al contorno aparente sobre el plano vertical, le hallaremos por medio de los planos tanjentes al cono que sean perpendiculares a este plano de proyeccion (núm. 106); segun esto y como las trazas horizontales de estos planos deben ser perpendiculares a la línea de tierra, y tanjentes al mismo tiempo (núm. 100) a la base ACBD, concluiremos que las rectas CC' y DD' son estas trazas. Y como ademas, estos planos tocarán al cono evidentemente segun las jeneratrices (CS,C'S') y (DS,D'S'), síguese que estas dos rectas formarán el contorno aparente de la superficie proyectada sobre el plano vertical; y por consiguiente toda arista que se halle *detras* de estas rectas, o que termine en la porcion CAD de la base, será *invisible* en la proyeccion vertical.

120. Volvamos ahora al problema primitivo, y supongamos que sea M la proyeccion horizontal del punto dado. No debe tomarse arbitrariamente la otra proyeccion; porque supuesto que el punto en cuestion pertenece a la superficie, debe hallarse sobre una jeneratriz determinada que no puede tener por proyeccion horizontal sino la línea SM; por consiguiente esta recta tendrá por traza horizontal al punto E o al G, y en virtud de esto su proyeccion vertical será S'E' o S'G'. Luego si referimos a ellas el punto M por medio de una perpendicular a la línea de tierra, hallaremos para el punto dado las dos soluciones (M,M') y (M,M'').

FIG. 41. 121. Sentado esto, construyamos el plano tanjente que pase por

el primero de estos dos puntos. Este plano contendrá a la jeneratriz (SE,S'E') y tocará al cono en toda la lonjitud de esta recta (núm. 100); por consiguiente, tendrá por traza horizontal a la tanjente PEQ de la base. En cuanto a su traza vertical, deberá pasar por el punto (F,F') en que la arista de contacto penetra al plano vertical, y por el punto Q en que la traza PE va a cortar a la línea de tierra; pero como este punto Q se halla en el caso presente fuera del cuadro, salvaremos este inconveniente, suponiendo que por el punto (M,M') y en el plano tanjente que buscamos, se tira una horizontal (MX,M'X') la cual irá a penetrar al plano vertical en X', y nos proporcionará otro nuevo punto de la traza pedida QX'F'.

Así mismo, como respecto al punto (M,M''), es (SG,S'G') la arista de contacto, tendremos que la tanjente GV será la traza horizontal del plano tanjente de que al presente tratamos; y su traza vertical VF'' se determinará hallando el punto F'' en que la arista de contacto (GS,G'S') va a penetrar al plano vertical: o bien, segun lo hemos practicado anteriormente, nos valdremos de una horizontal (MY,*M*''Y') situada en el plano tanjente de que tratamos.

122. Observamos que los dos planos tanjentes que acabamos de determinar, contienen cada uno de ellos una jeneratriz del cono y que en virtud de esto pasarán ámbos por el cúspide (S,S'); de aquí resulta que si construimos (núm. 27) su interseccion, que se ve proyectada segun PR y P'R', sucederá, necesariamente, que la primera de estas líneas pasé por S y la segunda por S', esto nos proporcionará una verificacion de las construcciones anteriores. Ademas, las trazas verticales deberán *tocar* en F' y F'' a la curba segun la cual costa el plano vertical al cono, cuya curba se construirá determinando los puntos en que las diferentes jeneratrices van a penetrar a este plano de proyeccion.

123. *Tirar un plano tanjente a una superficie cónica por un punto dado fuera de ella.*

Sea tambien ABC la base del cono y (S,S') el cúspide; determinaremos como anteriormente el contorno aparente de la superficie sobre cada uno de los planos fijos, y representaremos por (N,N') el punto elejido en espacio. Como el plano tanjente que buscamos debe contener a una jeneratriz, pasará precisamente por el cúspide FIG. 42.

(S,S') y por consiguiente contendrá a la recta (SN,*S'N'*): luego si determinamos el pie (P,P') de esta recta y tiramos por él las dos tanjentes PEQ, PGV a la base, estas serán las trazas horizontales de los dos planos tanjentes que cumplen con la cuestion. En cuanto a las trazas verticales, las determinaremos por medio de la recta (SN,S'N') contenida en los dos planos, o bien por medio de las aristas de contacto de estos planos, que evidentemente son (SE, S'*E'*) y (SG,S'G'). Tambien podriamos emplear una horizontal auxiliar tirada por el punto (N,N') en cada cono de los planos tanjentes, del mismo modo que lo hemos practicado ya varias veces.

124. *Hallar un plano que sea tanjente a un cono y paralelo a una recta dada.*

FIG. 42. Conservemos para este problema los mismos datos que anteriormente, y sea *(mn,m'n')* la recta a quien debe ser paralelo el plano tanjente. Como este plano ha de pasar precisamente por el cúspide, si por este punto y paralelamente a *(mn,m'n')* tiramos la recta (SP,S'P'), tendremos que esta recta estará contenida en el plano pedido; por consiguiente la traza (P,P') de esta recta pertenecerá a la traza horizontal del plano tanjente, y segun esto esta traza será una de las dos tanjentes PEQ,PGV tiradas a la base. Habrá tambien dos soluciones en este problema, y las trazas verticales de estos planos se determinarán lo mismo que en el número precedente.

125. Supuesto que todo plano que es tanjente a una superficie cónica en un punto, toca precisamente a esta misma superficie en todo el largo de una recta (núm. 100), la observacion que hicimos en el núm. 118 se aplica tambien aqui, y asi resulta que no podria exijírsenos el que un plano fuese tanjente a un cono y pasase al mismo tiempo por una recta o por dos puntos dados, a no ser que la recta que uniese estos dos puntos, pasase tambien por el cúspide, porque en tal caso todo se reduciria a no asignar sino un solo punto (núm. 123.)

Al concluir este capítulo, le agregaremos algunos problemas cuya solucion no haremos mas de indicar.

126. *Tirar por una recta dada un plano que forme con el plano horizontal un ángulo determinado α.*

Bajaremos desde un punto cualquiera de la recta, una perpendi-

cular y una oblicua al plano horizontal, dirijiendo esta paralelamente al plano vertical, y de modo que su proyeccion sobre este último plano forma el ángulo α con la línea de tierra. Hecho esto, figurémonos que esta oblicua jira al rededor de la vertical, y en en este movimiento describirá un cono recto cuya traza horizontal será un círculo que es mui fácil determinar, y cuyas aristas estarán todas inclinadas sobre el horizonte la misma cantidad α; por consiguiente, si a este cono le tiramos un plano tanjente que pase por la recta dada, se convierte el problema propuesto en el del núm. 123, y hallaremos, manifiestamente, un plano que cumplirá con las condiciones pedidas en la cuestion.

127. *Tirar un plano tanjente a un cilindro dado cuya inclinacion con el plano horizontal sea* α. Construiremos, como lo hemos hecho en el problema precedente, un cono de revolucion cuyas aristas formen el ángulo α con el plano horizontal; en seguida tiraremos por el cúspide una recta paralela a las jeneratrices del cilindro, y haciendo pasar por esta recta un plano tanjente al cono (núm. 123), no quedará mas que hacer que tirar un plano tanjente al cilindro paralelo a este último; cuyo problema lo resolveremos como el del núm. 117, tirando una tanjente a la base del cilindro paralela a la traza horizontal del plano que toca al cono, conocemos mui bien que este problema será imposible, siempre que la paralela tirada por el cúspide del cono auxiliar, termine en el interior de su base.

Si se nos propusiese *la misma cuestion respecto a un cono* definido por una base cualquiera, seria preciso modificar la solucion tomando por cúspide del cono de revolucion el mismo punto que sirve de cúspide a la superficie cónica dada por el problema; y en seguida se deberá tirar una tanjente comun a las bases de estos dos conos, y esta será la traza horizontal del plano pedido.

128. *Tirar por un punto dado una recta que sea tanjente a una superficie cônica y paralela tambien a un plano dado.* En primer lugar construiremos un plano que toque al cono y pasa por el punto que indica la cuestion; en seguida, cortaremos a este plano con otro tirado desde el mismo punto paralelamente al plano dado; hecho esto, la interseccion de los dos planos construidos de este modo, nos dará patentemente una recta que cumplirá con la cuestion.

CAPITULO IV.

De los planos tanjentes a las superficies de revolucion, cuando se nos dá el punto de contacto.

FIG. 43. 129. Supuesto que por cada punto M tomado sobre una superficie de revolucion (núm. 75) pasan siempre un meridiano AMD y un paralelo FMG, si construimos las tanjentes MT y MV a estas curbas, y hacemos pasar un plano por estas dos rectas, este será (núm. 103) el plano tanjente de la superficie en el punto M.Y como la tanjente MV, situada en el plano del círculo FMG, es evidentemente perpendicular a un mismo tiempo al radio MO, y al eje AO; síguese que tambien será perpendicular al plano meridiano AOM, y por consiguiente el plano tanjente que contenga a MV, será tambien perpendicular al meridiano. Y como esta consecuencia es independiente de la naturaleza de la curba AMD y de la posicion del punto M, resultará de aquí el teorema notable siguiente: *En toda superficie de revolucion, el plano tanjente es siempre perpendicular al plano meridiano que pase por el punto de contacto.*

130. Tirando por el punto M una normal MN a la superficie, esta recta que es perpendicular al plano tanjente, estará contenida precisamente en plano meridiano AMD; luego en toda superficie de revolucion, *la normal encuentra al eje.*

Ademas, este encuentro tiene lugar en un mismo punto del eje cuando las normales como MN,PN,FN.... corresponden a un mismo paralelo. En efecto, cuando el plano meridiano AMD jira al rededor del eje, llevando consigo a las rectas MN y MT, no deja nunca la primera de ser perpendicular a la segunda; ademas, esta recta móvil MN, que siempre está contenida en el plano meridiano, es lo mismo que este (núm. 129) sucesivamente perpendicular a cada una de las tanjentes tales como MV del paralelo; luego segun vemos MN es siempre perpendicular a dos tanjentes, y por consiguiente normal a la superficie, en todas las posiciones que ocupe cuando jire al rededor del eje AD. Y como en todo este movimiento permanece inmóvil el punto N de la normal MN, resul-

ta de aquí que *todas las normales tiradas por los diferentes puntos de un mismo paralelo, forman siempre un cono recto cuyo cúspide está sobre el eje:* pero este cúspide varia cuando de un paralelo pasamos a otro.

Despues de haber hecho notar estas propiedades jenerales y comunes a todas las superficie de revolucion, vamos a ocuparnos en el plano tanjente.

131. *Tirar por un punto dado sobre una superficie de revolucion cuyo meridiano es conocido, un plano que sea tanjente a esta superficie.*

Para simplificar las construcciones, elijamos el plano horizontal de FIG. 44. modo que sea perpendicular al eje de revolucion: en cuyo caso, como esta recta es vertical, se proyectará horizontalmente en el punto O, y verticalmente segun la recta O'Z'. Sea ademas A'B'D' la proyeccion del meridiano *principal,* es decir de el que es paralelo al plano vertical, y que está proyectado horizontalmente en OB paralela a la línea de tierra: en el caso presente este meridiano es una elipse, de la cual uno de los diámetros principales coincide con el eje de rotacion, y por consiguiente la superficie enjendrada será un elipsoide de revolucion (núm. 79); pero los raciocinios y construcciones, serán enteramente semejantes cuando la curba meridiana sea cualquiera otra. El mayor de los paralelos, o *el equador* de la superficie, es visiblemente el círculo descrito por el semi-eje C'B', que se proyecta horizontalmente segun un círculo BKE igual al primero, y forma el *contorno aparente* de la superficie respecto al plano horizontal (núm. 106); con efecto, en toda la estension del equador (B'E', BKE) serán los planos tanjentes *verticales* porque cada uno de ellos contiene a la tanjente del meridiano, la cual es una vertical como la B'B. En cuanto al contorno aparente de la superficie respecto al plano vertical, será el meridiano *principal* (A'B'D'E',BE); porque este contorno debe estar formado (núm. 106) por los puntos de contacto de todos los planos tanjentes perpendiculares al plano vertical; y como los planos tanjentes en toda la estension de esta curba meridiana son (núm. 129) perpendiculares todos a su plano, síguese que tambien lo serán al plano vertical de proyeccion. No añadiremos mas posiciones de la jeneratriz para espresar (núm. 93) la fir-

ma de la superficie; por que está suficientemente indicada con lo que precede; pero sin embargo veremos mas adelante (núm. 137) el modo de construir las proyecciones tantas curbas meridianas cuantas se quieran trazar.

132. Sentado esto, sea M la proyeccion horizontal del punto dado sobre la superficie; no podremos tomar arbitrariamente la segunda proyeccion de este punto, supuesto que debe estar situado en el punto de encuentro de la vertical levantada en M y del meridiano que está proyectado segun OK. Pero si hacemos jirar a este al rededor del eje (O,O'Z') hasta tanto que coincida con el meridiano principal OB, en este caso estará proyectado verticalmente segun A'B'D'; y como en virtud de este movimiento la proyeccion M habrá descrito el arco MG, concluiremos de aquí que la proyeccion vertical del punto que buscamos está representada en la actualidad en los puntos G' o G". Si ahora restituimos el meridiano móvil a la posicion OK, el punto de que tratamos que durante este movimiento no ha variado de altura, permanecerá proyectado verticalmente sobre la horizontal G'F' o la G"F", de donde se sigue que en su posicion primitiva, estaba proyectado en M' o en M"; y asi es que hai dos puntos (M,M') y (M,M") sobre la superficie, que ámbos están proyectado horizontalmente en M.

FIG. 44. 133. Consideramos el primero de estos puntos (M,M'), y para determinar el plano tanjente en él, le sujetaremos a pasar por dos tanjentes a la superficie (núm. 103), a saber: por la tanjente al meridiano y la tanjente al paralelo; pero como la proyeccion de la curba meridiana relativa al punto (M,M') no se nos da inmediatamente, y segun esto no podemos tirarle directamente una tanjente, aplicaremos el plano vertical OMK sobre el meridiano principal OB. De este modo el punto (M,M') se trasportará a (G,G') y en esta situacion será fácil construir la tanjente G'H' que penetrará al plano horizontal en el punto H sobre la OB; si en seguida restituimos el meridiano móvil a su primitiva posicion OMK, y tendremos que el pie H de esta tanjente describirá, patentemente, un arco de círculo terminado en T, mientras que el punto de contacto G' se restituirá a M'; luego proyectando el punto T a la línea de tierra, hallaremos que M'T' y MT son las proyecciones de la tanjente al meridiano que pasa

por el punto (M,M'). Observemos, ademas que esta tanjente prolongada debe encontrar al eje de la superficie en el mismo punto Z' en que termina la recta G'H'.

En cuanto al paralelo relativo a este punto (M,M'), está evidentemente proyectado sobre el círculo GMF y sobre G'F'; por consiguiente su tanjente es la horizontal (MV,M'V') perpendicular al plano meridiano OMK. Ahora bien, el plano que contenga a las dos tanjentes determinadas de este modo, tendrá por traza horizontal a una recta TU que pasa por el pie T de la primera tanjente, tirada paralelamente a MV que es una horizontal contenida en este plano tanjente; en seguida tendremos la traza vertical UV' de este mismo plano, construyendo el punto V' en que la recta (MV, M'V') va a penetrar al plano vertical.

Por un medio enteramente semejante hallaremos el plano tanjente relativo al punto (M,M"), aplicando en primer lugar el punto M" a G" sobre el meridiano principal y tirando por este la tanjente G"L'. Refiriendo en seguida el pie (L,L') de esta recta al meridiano OK, vendrá a parar a R; y como la tanjente al paralelo es en este caso (MV,M"V"), síguese que las trazas del plano tanjente serán RS paralela a MV y SV".

134. Bueno será observemos que, segun la direccion de la tanjente MV al paralelo, todo plano tanjente a una superficie de revolucion, tendrá siempre *su traza horizontal perpendicular a la del plano meridiano* que pase por el punto de contacto, a lo ménos mientras sea vertical el eje de la superficie.

135. Observemos ademas que como los dos planos tanjentes en (M,M') y en (M,M") tienen sus trazas TU y RS paralelas, deberán cortarse segun una horizontal; y por un efecto de la simetria de la snperficie de que tratamos, esta horizontal estará situada en el plano del equador E'B'. Con efecto, como las tanjentes G'H' y G"L' a la elipse meridiana, necesariamente se encuentran en un punto *æ* situado sobre el eje de esta elipse, este punto transportado a ß en el meridiano OK a una con las dos tanjentes, les será siempre comun, y permanecerá en el plano del equador E'B': luego la horizontal que resulta de la interseccion de los dos planos tanjentes, pasará por el punto ß; y por esta misma razon es por la que

las trazas verticales de estos planos deben cortarse en un punto P' situado sobre la recta E'B'6 prolongada.

FIG. 44. 136 Para obtener la *normal* de la superficie de revolucion en el punto (M,M), recordaremos (núm. 130) que todas las normales en todos los puntos de un mismo paralelo, van a cortar al eje en el mismo punto, y que ademas cada una de ellas está contenida en el plano meridiano que pasa por el punto de contacto. Asi es que, despues de haber aplicado sobre el meridiano principal el punto M' a G' tiraremos por este último una recta G' N' perpendicular a la tanjente G' H'; y en seguida, uniendo el pie N' de esta normal con el punto dado M', obtendremos la normal N' M' correspondiente a este último punto. Esta por lo ménos es su proyeccion vertical; y en cuanto a su proyeccion horizontal, evidentemente cae sobre O M.

Observemos ahora que, siendo esta normal perpendicular al plano tanjente TUV', las trazas de este último deberán ser respectivamente perpendiculares a las rectas O M y N' M' y (núm. 33), lo cual nos proporciona una verificacion de las construcciones efectuadas ya respecto al plano tanjente, o tambien, si queremos, un medio de hallar *a priori* sus trazas, porque en tal caso solo se trata de tirar por un punto conocido (M, M') un plano perpendicular a la recta (M O, M' N'). *Vease* núm. 36.

137 Hemos visto (núm. 132) que era fácil, partiendo de la proyeccion horizontal M de un punto de la superficie, deducir de ella la proyeccion vertical M' o M"; si ahora aplicamos el mismo procedimiento a otros varios puntos tales como K, M, Q.... tomados en el plano meridiano O K, podremos, por este medio, construir la proyeccion vertical de la curba meridiana contenida en este plano, y esta curba deberá ser tanjente a las rectas T' M' y R' M", repitiendo en seguida la misma operacion con otros planos meridianos diferentes de O K, hallaremos tantas posiciones cuantas queramos de la clipse móvil A'B'D', todo lo cual serviria para completar la representacion gráfica de la superficie.

Asi es que si se nos diesen las proyecciones de una *jeneratriz* cualquiera de una superficie de revolucion, construiriamos fácilmente por medio de operaciones análogas, el meridiano principal, o cualquiera otra seccion meridiana por este medio. Podremos proponernos, como ejemplo, el caso en que esta jeneratriz es *una recta que no encuentra al eje*; y en tal

caso hallaremos que la meridiana es una hipérbola, segun lo veremos mas adelante (núm. 148).

138 *Del plano tanjente al* TORO. Si hacemos jirar un círculo (A'B'C'B",ABC) al rededor de una recta (O"Z',O) que no pasa por su centro, pero que está situada en su plano, veremos que este meridiano circular enjendrará una especie de *superficie anular* llamada *toro*, cuyos puntos estarán todos proyectados horizontalmente entre el *equador* descrito con el radio OC=O'C' y el *círculo de la garganta* descrito por el radio OA=O'A': pero es preciso que observemos bien que los dos semi círculos B'C'B" y B'A'B" enjendrarán dos napas de forma mui diferentes, aun cuando ambas lleguen a reunirse en la estension de las circunferencias que recorren las extremidades B' y B" del diámetro vertical. La napa exterior es *convexa*, es decir que todas las curbas que se tracen en ella y pasen por un mismo punto (N,N') estarán situadas a un mismo lado del plano tanjente en este punto. Con efecto, para determinar este plano, es preciso construir la tanjente N'P del meridiano, y por el pie P de esta recta, tirar una perpendicular PP' a la traza ON del meridiano (núm. 134); pero vemos que la meridiana B'N'B" y el paralelo N'I', están ambos a la izquierda del plano tanjente N'P'P; y aun cuando hemos elejido el punto (N'N') sobre el meridiano principal, con el objeto de hacer mas sencilla la proyeccion del plano tanjente, está bien de manifiesto que tendrán lugar las mismas circunstancias respecto a cualquiera otro punto de la napa esterior, por el hecho de ser de revolucion y por consiguiente simétrica en toda la rotacion efectuada alrededor del eje (O"Z',O). FIG. 45.

Por el contrario, si tomamos un punto (M,M') situado en la napa interior, veremos que el plano M'TT tanjente en este punto, atravesará a la superficie; porque el meridiano B'M'B" se hallará patentemente a la derecha de este plano, miéntras que el paralelo M'V' estará a la izquierda; y asi es que el plano M'T"T cortará al toro segun una curba que formará nudo, y en la proyeccion horizontal está representada por (MHEGE "*heje*" M) cuya construccion enseñaremos mas adelante (*véase* núm. 267). Pero esta interseccion no impide que el plano M'T"T contenga a las tanjentes del meridiano, del paralelo, y de todas las demas curbas trazadas sobre la superficie que pasa por el punto (M,M'); de modo que este plano es realmente tanjente a

al toro en este sitio, y secante en todos los otros puntos comunes; cuya circunstancia estriba en que la napa interior es una superficie *no convexa* o de *curbaturas opuestas*, enteramente comparable a la garganta de una polea.

139. Como en el depurado que presentamos, hemos querido representar los principales paralelos de la superficie, una parte de la traza vertical M'T' del plano tanjente de la napa interior se halla ciertamente oculta por el toro, pero sin embargo de esto hemos debido dejarla de línea seguida, porque esta traza recibe la proyeccion vertical de la curba de interseccion, cuya rama anterio *hrefg* es visible en el plano vertical.

140. Hiperboloide de revolucion *de una napa*. Hemos llamado así (núm. 84) a la superficie que describe una media hipérbola, cuando jira alrededor de su eje imajinario; pero esta superficie que goza de varias propiedades mui notables, puede tambien ser enjendrada por *una recta sujeta a jirar por un movimiento de revolucion* (núm. 75) *alrededor de otra recta fija que no está situada en el mismo plano que la primera.*

FIG. 47. Para demostrarlo, representemos la recta fija por OZ, y la móvil por ADM; sea OD la menor distancia que será horizontal, si miramos al eje OZ como vertical. Esta línea OD descrivirá en su movimiento de revolucion alrededor de OZ, un círculo horizontal EDF que evidentemente será el menor de los paralelos, o el *círculo de la garganta* de la superficie; y la tanjente PD a este círculo, será precisamente la proyeccion horizontal de la recta móvil ADM; de donde se sigue que esta recta irá a penetrar a un plano meridiano cualquiera ZOX, en un punto M situado sobre la vertical levantada en el punto P (*). Pero si construimos de este modo todos los puntos M,M',F.... en que sucesivamente encuentra al plano fijo ZOX la recta móvil A DM en sus diversas posiciones, hallaremos la *meridiana* MM'F de la superficie enjendrada por esta recta; y por consiguiente la cues-

(*) *Consideramos que la figura está construida en perspectiva; tomando como cuadro de ella a este plano ZOX; y por consiguiente todas las líneas principales situadas detras de este plano, son las que se han puntuado.*

tion queda reducida a probar que esta curba MM'F es una hipérbola que tiene por semi eje real a la distancia OF=OD. Para conseguirlo, refiramos un punto cualquiera de ella M a coordenadas paralelas a los ejes OX y OZ; y como la distancia OD permanece invariable en todo el movimiento de la recta, lo mismo que sucede con el ángulo MDP formado por esta misma con el horizonte, hagamos a

$$OP=x,\ PM=z,\ OD=\delta \text{ y tanj. } MDP=\alpha.$$

en cuyo caso los triángulos rectángulos MPD y ODP nos darán

$$\text{tanj. } MDP=\frac{MP}{DP}=\frac{MP}{\sqrt{OP^2-OD^2}}$$

o sustituyendo los valores señalados arriba,

$$\alpha=\frac{z}{\sqrt{(x^2-\delta^2)}};\ \text{y de aquí } \alpha^2x^2-z^2=\alpha^2\delta^2$$

cuyo equacion nos prueba que la meridiana es ciertamente una hipérbola que tiene por semi eje real a $x=\delta$: luego el lugar recorrido por la recta móvil ADM es efectivamente una hipérbola de revolucion de una napa.

141. Esta misma superficie puede tambien orijinarse por otra *segunda jeneratriz* rectilínea; con efecto si trazamos en el plano vertical MDP y tanjente al círculo de la garganta, una recta BDN de modo que forme con la vertical DV un ángulo NDV igual a VDM, al jirar esta línea BDN alrededor de OZ, enjendrará tambien *la misma superficie* que ADM, porque dos puntos cualesquiera, M y N, tomados a la misma altura sobre estas rectas describirán el mismo círculo MNL. Para aprobar esta última asercion, será suficiente que unamos de dos en dos los puntos M,N,Z,V, en los cuales encuentra un mismo plano horizontal a las diferentes líneas de que acabamos de hablar; y por medio de los triángulos rectángulos MVD y NVD que evidentemente son iguales, demostraremos que tambien lo son los otros triángulos rectángulos ZVM y ZVN; de lo cual concluiremos que ZM=ZN y que en virtud de esto tambien los dos puntos M y N se hallan a la misma distancia del eje OZ. De aquí resulta que en el hiperboloide hai dos sistemas de rectas como las

$$A, A_2, A_3 \ldots \text{ y } B, B_2. B_3 \ldots$$

el primero de los cuales está compuesto de las posiciones sucesivas

que toma la jeneratriz AD, y el segundo de posiciones sucesivas análogas ocupadas por BD. Ademas de esto, supuesto que todas estas rectas están colocadas de dos en dos en planos verticales parecidos al MDN,, síguese de aquí que *todas las jeneratrices de los dos sistemas se proyectan sobre el círculo de la garganta, segun las tanjentes a esta circunferencia.*

142. Por cada punto R de la superficie pasan dos de estas rectas; porque las jeneratrices AD y BD pasarán en dos épocas diferentes de su revolucion, por este punto R; y ocuparán sobre dicha superficie dos posiciones RA_3 RB_2 que serán necesariamente distintas, por estar la primera situada a la izquierda, y la segunda a la derecha del plano meridiano ZOR. De aquí se sigue que, el plano tanjente en R estará determinado (núm. 103) por las dos rectas RA_3 y RB_2, porque estas dos líneas se hallan sobre la superficie, y son ellas mismas sus propias tanjentes. Pero es mui importante observar que, aun cuando el plano tanjente A_3RB_2 contiene a toda la recta R B_2 no por eso *sera tanjente en ningun otro punto de esta línea*; porque en D_2, por ejemplo, será el plano tanjente $A_3D_2B_2$, y como este último no puede coincidir con A_3RB_2, porque las dos jeneratrices A_3R y A_2D_2 pertenecen al mismo sistema, y siendo así no podrán estar contenidas en un mismo plano, segun vamos a demostrar.

FIG. 47. 143, *Dos rectas* AD y A_2D_2 *pertenecientes al mismo sistema de jeneratrices, no se hallan nunca sobre un mismo plano.* Con efecto, como estas rectas se hallan proyectadas horizontalmente sobre las tanjentes DT y D_2T que se cortan en T, no podrán tener comunes sino los puntos que están situados en la vertical TS; y como esta vertical va a encontrar a A_2D_2 en S encima del círculo de la garganta, y a AD debajo de él en S', porque las partes inferiores de estas dos jeneratrices pertenecientes al mismo sistema, están ámbas inclinadas a la izquierda de sus meridianos respectivos ZOD_2 y ZOD, y como ademas el punto T se halla entre estos dos meridianos. Síguese que 1.° no podrán encontrarse las rectas AD y A_2D_2; 2.° tampoco dichas rectas son paralelas, porque sus proyecciones horizontales se cortan en T; y así queda demostrado que dos jeneratrices del sistema A no están jamas situadas sobre un mismo plano.

Cuando se comparan las proyecciones horizontales de dos de estas rectas que pasan por los estremos de un mismo diámetro del círculo de la garganta, vemos ciertamente que son paralelas: pero una de estas jeneratrices estará en el espacio inclinada a la derecha del plano meridiano tirado por esté diámetro, y la otra a la izquierda de él, de modo que estarán mui distantes de ser paralelas; y ademas está tambien de manifiesto que tampoco en este caso se podrán cortar.

De un modo enteramente semejante demostrariamos que tampoco las rectas B, B_2, B_3.... del segundo sistema no pueden hallarse de dos en dos sobre un mismo plano.

144. *Cada recta del sistema* A *corta* (sin cambiar de posicion) *a todas las rectas* B, B_2, B_3.... *del otro sistema.* Esto es evidente respecto a las líneas AD y BD que se hallan en mismo plano vertical; pero comparemos a AD con cualquiera otra recta B_2D_2 del otro sistema. Estas dos líneas están tambien proyectadas sobre las tanjentes DT y D_2T al círculo de la garganta y como estas se cortan en T, la vertical TS' irá precisamente a encontrar a las rectas AD y D_2B_2 de que se trata, mas este encuentro tendrá lugar con respecto a cada una de ellas por la parte de abajo del círculo de la garganta, en virtud de que DA está inclinada a la izquierda del meridiano ZOD, y D_2B_2 a la derecha del meridiano ZO D_2 mientras tanto que el punto T se halla entre los dos. Ademas segun la forma de la meridiana, es evidente que una recta como la TS' que es paralela al eje OZ, no puede penetrar a la superficie si no en dos puntos, luego *solo uno* de estos S' se hallará sobre la napa inferior al círculo de la garganta; por consiguiente este punto único deberá coincidir con aquellos en que la vertical TS' ha encontrado ya a las jeneratrices DA y D_2B_2 que están sobre esta napa: luego estas jeneratrices se cortan efectivamente en el punto S'.

Solo deberemos observar que cuando se comparan dos rectas pertenecientes una al sistema A y otra al B, que pasan por las estremidades de un mismo diámetro del círculo de la garganta, estas rectas tendrán sus proyecciones paralelas, y ellas mismas lo serán tambien en el espacio, de modo que no tendrá lugar su encuentro si no a una distancia infinita, pero a lo ménos estas do jeneratrices estarán aun situadas sobre un mismo plano.

De un modo análogo demostraremos que cada jeneratriz del sistema B corta, sin cambiar de posicion, a todas las jeneratrices del sistema A, o a lo ménos se halla en un mismo plano con cada una de ellas.

145. Se designa bajo el nombre de *Superficie Gausa*, a toda superficie enjendrada por *una recta que se mueve de modo que sus posiciones consecutivas no estén de dos en dos en un mismo plano.* Y como considerando al hiperboloide de que tratamos, ya sea como el lugar de las diferentes posiciones $A, A_2, A_3, \ldots$ que toma la jeneratriz AD en su movimiento de revolucion al rededor de OZ, o ya como el lugar de las diversas rectas $B, B_2, B_3 \ldots$ del otro sistema, y vemos (núm. 143) que satisfacen a la definicion precedente; concluimos de aquí que el hiperboloide de revolucion de una sola napa pertenece a la clase jeneral de superficies denominadas *gausas*; de las cuales nos ocuparemos de un modo especial en el libro VII.

FIG. 47. 146. Si por el centro O del hiperboloide, tiramos dos rectas O *a* y O *b* paralelas a las jeneratrices DA y DB, dichas rectas formarán ángulos iguales con la vertical OZ, y por consiguiente describirán al jirar al rededor de OZ, un solo y mismo cono recto cuyas aristas todas serán respectivamente *paralelas a las jeneratrices* $A, A_2, A_3, \ldots$ y $B, B_2, B_3 \ldots$ del hiperboloide. Este será el *cono asintótico* de esta última superficie; porque para deducirle de esta, será a toda luz suficiente hacer a

$$OD = \delta = o \text{ en la equacion } \alpha^2 x^2 - z^2 = \alpha^2 \delta^2,$$

que representa (núm. 140) el meridiano del hiperboloide, y como por esta hipótesis, hallamos para el meridiano del cono recto la equacion $z = \pm \alpha x$; es decir dos rectas que ciertamente son las asíntotas de la hipérbola precedente.

147. Ademas, cuando se hace variar la distancia δ, sin cambiar a α o a la inclinacion de la jeneratriz AD, obtendremos diversos hiperboloides cuyos meridianos son todos curbas *semejantes*; porque los ejes de la hiperbola son δ y $\alpha\delta$, y su razon es α cuya cantidad es independiente de la distancia δ. De aquí resulta que todos estos hiperboloides son superficies semejantes y concéntricas: y como esta semejanza debe tambien estenderse al cono asintótico respecto al cual δ es nula, podremos asegurar que, cuando un mismo

plano corte al hiperboloide y al cono asintótico, las secciones que de este modo resulten en las dos superficies, serán *curbas semejantes y concéntricas.* (*) Esta observacion nos será útil mas adelante.

148. Despues de haber dado a conocer la naturaleza y principales propiedades del hiperboloide enjendrado por la revolucion de una recta, ocupémonos ahora en la representacion exacta de esta superficie por medio de dos planos de proyeccion. Miraremos siempre al eje fijo como vertical, y en este caso sus proyecciones serán O y IO'Z'; en cuanto a la recta móvil tomémosla en una situacion FIG. 46. cualquiera, y sean sus proyecciones ADB y *A'D'*δ; en seguida construyamos la meridiana de la superficie, determinando los puntos en que el plano vertical OG es penetrado por las posiciones subcesivas de la recta (AB, *A'*ϱ). Pero desde luego, en la presente situacion, esta recta penetra al plano OG en el punto (M,M") cuyo punto pertenece a la curba pedida, la cual deberá *tocar* en este punto a la proyeccion A'M"ϱ. Con efecto, aun que la tanjente a la meridiana y la recta (AB,A'ϱ) sean en el espacio mui diferentes una de otra, sin embargo, estas rectas están ambas situadas en el plano tanjente a la superficie en el punto (M,*M'*); y como este plano es precisamente perpendicular (núm. 129) al plano meridiano OG, y por consiguiente al plano vertical de proyeccion, sucederá en el caso presente que A'ϱ se confundirá con la proyeccion vertical de la tanjente, y que segun esto la misma recta A'ϱ tocará a la proyeccion de la curba meridiana en M".

En seguida, un punto cualquiera *(n,n')* de AB, describirá durante el movimiento de revolucion, un arco que se preyectará sobre *n*N y sobre la horizontal *n'*N'; luego, cuando este punto *(n,n')* llegue al plano vertical OG, estará proyectado en (N,N'), y así será en esta posicion un nuevo punto de la curba meridiana G'N'M'G", todos los demas se construirán del mismo modo. Aplicando este mismo procedimiento a la estremidad (D,D') de la horizontal (OD,O'D'), que es perpendicular a un mismo tiempo al eje y a la jeneratriz, y mide su distancia mas corta, hallaremos el punto (F,F') de la meridia-

(*) *Vease* l' Analyse appliquée á la géometrie des trois dimensions, chap. IX.

na que está mas próximo al eje; y este mismo es el punto que en la revolucion completa de la recta movil, describirá el menor de los paralelos de la superficie, *o el círculo de la garganta*, que en el caso presente está proyectado en DFE y E'F'. Asi mismo, como el pie (A,A') de la jeneratriz describirá un círculo ALG que será la traza horizontal de la superficie, nos dará el punto (G,G') del meridiano: y aun cuando esta curba deba evidentemente estenderse de un modo ilimitado, porque la recta jeneratriz tiene una lonjitud indefinida, sin embargo, para dar una idea mas clara de la superficie, supondremos que la recta móvil está terminada en los dos puntos (A,A') y (B,ß), que distan igualmente del punto (D,D') que es el que describe el círculo de la garganta, de modo que la porcion de superficie que representamos aquí, estará terminada por dos círculos iguales que están proyectados horizontalmente en GAH. y verticalmente sobre G'H' y G"H". Por lo demas, hemos demostrado (núm. 140) que el meridiano G'F'G" es una rama de hipérbola que tiene por eje real al diámetro E'F' del círculo de la garganta; y deberemos abservar tanto aquí *como en toda superficie de revolucion*, que el meridianano principal G'F'G" forma precisamente el contorno aparente de la superficie respecto al plano vertical, porque todos los planos tanjentes en todos los puntos de este meridiano son perpendiculares a dicho plano (núm. 129). Por una razon semejante, veremos que el contorno aparente del hiperboloide con respecto al plano horizontal, es el círculo de la garganta DFE en cuyos puntos, todos los planos tanjentes son evidentemente verticales.

149. Para completar la representacion gráfica de este hiperboloide,
FIG. 46. en atencion al modo de resultar enjendrado por una línea recta, será preciso construir cierto número de posiciones de esta jeneratriz rectelínea: y como esta recta debe constantemente permanecer a la misma distancia del eje (O,O'Z'), síguese que su proyeccion horizontal será siempre tanjente al círculo DFE; en virtud de esto, tiremos a discrecion, la tanjente $A_2D_2B_2$, y en seguida proyectemos su pie A_2 a la línea de tierra en A'_2, y el punto de contacto D_2 sobre E'F' en D'_2; hecho esto, hallaremos que $A'_2D'_2ß_2$ será la proyeccion vertical de la recta que horizontalmente está proyectada en A_2B_2. Ademas de esto, el estremo $ß^2$ que se halla sobre el círculo superior G"H", deberá eviden-

temente estar proyectado en B_2 cuya circunstancia nos proporciona un medio de comprobacion. Por un modo enteramente análogo se construirán las otras posiciones de la jeneratriz, y sus proyecciones verticales deberán tambien *tocar* a la hipérbola meridiana, segun lo hemos demostrado en el número precedente respecto a la primera recta ADB; solo tendremos que observar que cuando se elija la proyeccion horizontal de modo que sea paralela a la línea de tierra, como sucede con KL, resultará que la proyeccion vertical correspondiente Q'ʒ será *la asíntota* dela hipérbola, porque efectivamente semejante jeneratriz no encontrará al plano meridiano OG sino a una distancia infinita, sin dejar por esto de ser tanjente a la hipérbola meridiana en la proyeccion vertical.

150. Con el objeto de hallar resultados mas simétricos, se ha dividido, en el presente depurado, al círculo GAH en catorce partes iguales, y desde luego se han trazado las cuerdas AB, A_2B_2, A_3B_3.... de modo que subtendan un mismo número de arcos parciales; de este modo estas cuerdas, que precisamente son iguales, se ha hallado que tambien son tanjentes a un mismo círculo EDF, en seguida se han deducido las proyecciones verticales, por el medio que hemos dicho en el número precedente. Aun cuando estas cuerdas terminan de dos en dos en los mismos puntos de division sobre el círculo GAH, distinguiremos con facilidad las partes situadas debajo del círculo de la garganta de las partes superiores a él, y como las primeras son invisibles sobre el plano horizontal, están en el caso presente representadas por *líneas puntuadas*. En cuanto al plano vertical, las porciones de jeneratrices situadas del otro lado del plano meridiono GOH que es el que encierra el contorno aparente de la superficie (núm. 148) respecto a este plano de proyecciou, son las únicas invisibles, y que por consiguiente han debido *puntuarse*.

151. Sabemos tambien (núm. 141) que el hiperboloide admite otro sistema de jeneratrices rectelíneas, que así mismo se proyectan sobre las tanjentes AB, A_2B_2.... al círculo de la graganta. pero que tienen en el espacio una posicion inversa respecto a la vertical. Por ejemplo, la que entre estas nuevas rectas se proyecte segun BDA (*), tendrá su pie en

(*) *Para indicar mas claramente la situacion de las diversas rec-*

(B,B') y su estremidad superior en (A,α) y cortará a la recta ADB del primer sistema en el punto (D,D') ; y así tendrá por proyeccion vertical a B'D'α, cuya línea contiene tambien la proyeccion vertical de otra recta LMC del primer sistema. A causa de evitar esta coincidencia no hemos querido representar a un mismo tiempo, en el depurado, las jeneratrices de los dos sistemas, porque de no hacerlo así, hubiera sucedido que las partes de la línea seguida de las unas hubieran caido sobre las partes puntuadas de las otras, y así no hubiera sido posible distinguir las porciones visibles de las invisibles en cada uno de estos sistemas. Ademas, será siempre fácil, aun en el depurado presente, hallar las rectas del sistema B siempre que las necesitamos, pues para ello bastará tomar las porciones llenas por las puntuadas, y recíprocamente, segun lo acabamos de indicar respecto a la recta BDA. Podremos tambien multiplicar mas las jeneratrices, con el fin de obtener mayor *efecto* en el dibujo ; pero hemos creido que en el caso presente debiamos hacer algun sacrificio en esta parte, para presentar mas claridad en la posicion de los puntos y líneas notables que es preciso señalar al lector.

Fig. 46. 152. *Del plano tanjente al hiperboloide.* Sea R la proyeccion horizontal del punto de contacto, señalado por la cuestion : para hallar la otra proyeccion, observaremos que por el punto que consideramos sobre la superficie pasa una jeratriz del sistema A, la cual está proyectada horizontalmente segun una tanjante PRA al círculo de la garganta, y verticalmente segun P'α ; si ahora proyectamos el punto R a R' sobre esta última recta, habremos determinado completamente el punto de contacto (R,R'). Pero tambien habrá otra segunda solucion ; porque supuesto que podemos tirar por el punto R otra segunda tanjente B RQ al círculo de la garganta, la cual representará tambien una jeneratriz del sistema A proyectada verticalmente segun B'Q," no tendremos mas que proyectar el qunto R a R" sobre esta última línea, y obtendremos otro segundo punto (R,R") que estará situado sobre el hiperboloide, y que así mismo tendrá su proyeccion orizontal en R.

---

tas, tendremos siempre cuidado de citar en primer lugar, la letra que señala la estremidad inferior de la recta de que hablamos.

153. Sentado esto, tomemos en consideracion el punto (R,R') y recordemos (núm. 142) que por este punto unico deben pasar dos jeneratrices del hiperboloide; una de ellas es la recta (PRA,P'R'α) empleada ya y perteneciente al sistema A; y la otra perteneciente al sistema B y proyectada en (QRB,Q'R'β). Luego el plano tanjente en (R,R') deberá contener a estas dos rectas, y por consiguiente la traza horizontal de este plano será QPS. Para determinar la otra traza SV' será suficiente que nos figuremos que en este plano tanjente y por el punto (R,R') se ha tirado una horizontal cuyas proyecciones serán RV paralela a la traza QPS, y R'V' paralela a la línea de tierra; en seguida construiremos el pnnto (V,V') en que esta horizontal va a panetrar al plano vertical.

En cuanto al plano tanjente correspondiente al punto (R,R") estará determinado por las dos rectas de los dos sistemas opuestos que se corten en este lugar:

La una es (BRQ,B'R"Q") para el sistema A.

y la otra (ARP,A'R"P") para el sistema B.

Así es que la traza horizontal de este plano será la línea AB, y la traza vertical se hallará, del mismo modo que arriba, con el auxilio de una horizontal tirada en este mismo plano por el punto (R,R").

154. Volvamos a considerar el plano tanjente PSV' que toca al hiperboloide en el punto (R,R'), y observemos que su traza horizontal PQ es perpendicular al plano meridiano OR que pasa por el punto de contacto, que es lo mismo que debe suceder (núm. 134) en toda superficie de revolucion cuyo eje es vertical: pero este plano tanjente PSV' no es tanjente al hiperboloide en cualquiera otro punto, tal como (T,T') de la recta (PRA,P'R'α) que se halla en él, supuesto que su traza horizontal PQ no podrá ser perpendicular al meridiano OT. Ademas, por este punto (T,T') de la recta (PRA,P'R'α) que pertenece al sistema A, pasa una jeneratriz (HTB_2,$H'T'\beta_2$) del sistema B, la cual está evidentemente situada *fuera del plano* de que hablamos, porque el pie de esta jeratriz está en H fuera de la direccion de PQ. Por consiguiente el plano PSV' no cumple, con respecto a punto (T,T'), con la definicion de verdadero contacto, que estriba en contener a las tanjentes de todas las líneas situadas sobre la superficie; cuando en el punto (R,R') este plano contiene no solo a las dos jeneratrices que se cortan en él, sino

Fig. 46.

tambien a la tanjente del paralelo que es precisamente (RV,R'V'), la tanjente al meridiano y las de todas las demas curbas que por este punto se tracen sobre el hiperboloide.

Hemos probado ya esta propieda singular del plano tanjente al hiperboloide gauso en el núm. 142; pero hemos creido deber insistir aquí sobre esta circunstancia y apoyarla en nuevas consideraciones, porque es importante nos formemos una idea bien clara de la posicion de un plano que así como el presente es *tanjente en un punto* (R,R') *y secante en todos los otros puntos* comunes con la superficie, a la cual corta segun las dos rectas (PRA,P'R'α) y (QRB,Q'R'β).

155. Todos los problemas relativos a los planos tanjentes que hemos resuelto en este libro, se reducen a las superficies *cilíndricas, cónicas, o de revolucion.* No agregaremos nuevos ejemplos relativos a otros jéneros de superficies, porque en todo los casos el método se reduce a emplear el procedimiento jeneral indicado núm. 103, que en lo subcesivo encontraremos muchas ocasiones de aplicar; pero nos queda que tratar la cuestion del plano tanjente, *cuando no se nos dá el punto de contacto* sobre la superficie. Este problemo lo hemos resulto inmediatamente respecto al cilindro y al cono, porque su solucion en ambos casos es mui sencilla para que la difirieramos, pero no sucede lo mismo con las otras superficies, y algunas veces es necesario ayudarse para su resolucion de los métodos relativos a las intersecciones de las superficies; esta es la razon porque hemos reservado los problemas de este jénero para tratarlos en uno de los libros siguientes.

LIBRO III.

DE LAS SUPERFICIES DESARROLLABLES Y DE LAS INVOLUTAS.

CAPITULO PRIMERO.

De las superficies desarrollables.

156. Decimos que una superficie es DESARROLLABLE cuando suponiéndola flexible pero inestensible, puede desdoblarse y estenderse sobre un plano sin padecer fractura ni duplicacion. Pero conocemos bien que cualquiera superficie, una porcion de esfera por ejemplo, no goza de esta propiedad, y por esta razon deberá haber en el modo de enjendrar una superficie desarrollable, alguna condicion particular que le permita prestarse a esta trasformacion, esto es lo mismo que esplicaremos mui pronto (núm. 175.) Pero ántes de elevarnos a estas jeneralidades, creemos útil examinar primero dos jéneros particulares de superficies que pueden *desarrollarse*, de este modo sobre un plano; estas son las de los cilindros y los CONOS. Es ya llegado el momento de que introduzcamos las consideraciones del método infinitisimal que despues de bien entendido, nos presentará todo el rigor deseable, ofreciéndonos para lo sucesivo la doble ventaja de abreviar los razonamientos y prestarse con facilidad a las construcciones gráficas de la Jeometria descriptiva.

157. Siendo la tanjente de una curba el límite de las posiciones que toma una secante, cuando dos de sus puntos de seccion se aproximan indefinitivamente, podemos considerar a la tanjente como una recta que pasa por dos puntos que se hallan *infinitamente próximos* sobre la curba, o que tiene un *elemento* comun con ella; de este modo, es cierto que sustituimos a la curba propuesta, un polígono inscripto cuyos lados y ángulos esteriores son infinitamente pe-

queños, y cuyo lado prolongado reemplaza a una tanjente, pero cualquiera propiedad que sea cierta en un poligono de esta naturaleza, independientemente de la magnitud absoluta de sus lados y de los ángulos comprehendidos, subsistirá igualmente si aumentamos mas y mas estas pequeñas cuerdas aproximándolas a la curba: por consiguiente, esta propiedad tendrá así mismo lugar cuando de ella pasemos al límite, es decir, cuando consideremos a la curba en cuestion y sus verdaderas tanjentes.

158. Ademas de esto, hemos demostrado rigorosamente (núm. 95) que, en cualquiera superficie, todas las curbas trazadas de suerte que pasasen por un mismo punto, tienen todas sus tanjentes en este mismo punto situadas en un solo plano: luego este plano que hemos llamado *tanjente*, se podrá considerar como que tiene comun con la superficie un *elemento superficial* formado por la reunion de los *elementos lineales* comunes a las curbas y a sus tanjentes; este será el elemento de contacto, que en jeneral será *infinitamente pequeño en todos sentidos*, a no ser que la superficie sea de tal jénero que el plano tanjente sea el mismo para muchos puntos consecutivos.

FIG. 48. 159. Por ejemplo, sabemos (núm. 79) que en un cilindro el plano BAT es tanjente en el todo el largo de una misma jeneratriz AMB; luego en el caso presente este plano tendrá comun con la superficie un *elemento superficial* ABB'A' indefinido en lonjitud, pero comprehendido entre las dos jeneratrices infinitamente próximas que pasan por los puntos A y A' comunes a la base AC y a su tanjente AT. Vemos que hacemos distincion tanto aqui, como en la nota del núm. 109, entre el *elemento* de la superficie y la *jeneratriz*; esto es esencial: porque en las superficies gausas, reconoceremos que esta última recta será comun tambien a la superficie y al plano tanjente, miéntras que el elemento superficial indefinido en lonjitud no se hallará todo entero en este plano.

Así mismo, una superficie cónica tocada por un plano tanjente lo efectua en todo el largo de una jeneratriz (núm. 100) tiene comun con este plano un elemento superficial indefinido en lonjitud, pero comprehendido entre dos jeneratrices infinitamente próximas.

160. UNA SUPERFICIE CILINDRICA PUEDE SIEMPRE DESARROLLARSE,

porque figurémonos, que se ha cortado esta superficie con un plano perpendicular a sus jeneratrices, segun una curba CA que se llama la *seccion recta* del cilindro (*) que miraremos como si fuese su base, o como la directriz de la recta móvil enjendradora de esta superficie; sustituyamos en seguida, por un instante, a esta curba un polígono inscrito CAA'A", y de este modo transformaremos el cilindro en un prisma recto. Hecho esto, podremos hacer jirar la cara B"A"A'B' alrededor de la arista B'A' como charnela, hasta que llegue a colocarse en la prolongacion del plano de la cara B'A'AB; y en virtvd de este movimiento el lado A'A" se habrá trasladado a A'*a*" situado en la prolongacion de AA', porque ámbos continuarán siendo siempre perpendiculares a la arista A'B'. En seguida podremos hacer jirar la cara compuesta BA*a*"*b*" alrededor de la charnela AB hasta que llegue a ocupar la posicion del plano prolongado de la cara siguiente; y continuando de este mismo modo, llegaremos a conseguir que todas las caras del prisma se hallen situadas en un plano único, y todas estén a continuacion unasde otras, de modo que la superficie prismática estará *desarrollada*, sin haber cambiado de superficie. Ademas, observemos que todos los lados del poligono CAA'A" formaran, despues del desarrollo, una sola y misma línea recta, a la que todas las aristas del prisma continuarán siendo perpendiculares, segun ya lo hemos probado respecto a los primeros lados AA' y A'A", y que la lonjitud de esta recta será igual a la suma de los lados del poligono primitivo, al propio tiempo que las diversas aristas AB,A'B'.... conservarán las mismas lonjitudes que tenian anteriormente. FIG. 48.

161. Es ademas evidente, que todas estas consecuencias serán así mismo ciertas, sea cual fuere la magnitud de los ángulos y de FIG. 48.

(*) *Llamaremos muchas veces,* cilindro recto, *en obsequio a la brevedad, aquél en que se tome por base o por directriz a la seccion recta, sin querer espresar por esto que esta seccion es un círculo; ademas, esta denominacion no indicará nada de particular en la naturaleza del cilindro, pues estamos bien persuadidos que cualquier superficie cilíndrica puede referirse a este caso cortándola, como lo hemos hecho aquí, con un plano perpendicular a sus jeneratrices.*

los lados del poligono que se sustituya a la curba CAA'; por consiguiente tendrán tambien lugar en el cilindro que es límite de los prismas inscritos, o sí esta misma idea la queremos espresar de un modo diferente, en un cilindro que no es otra cosa que un prisma cuya base es un *poligono infinitesimal.* Podemos por consiguiente asegurar, 1.° que toda superficie cilíndrica es desarrollable: 2.° que efectuada esta transformacion, *la seccion perpendicular* a las jeneratrices, *es una recta* cuya lonjitnd es igual al perimetro de esta seccion: 3.° qne *las jeneratrices permanecen perpendiculares a esta recta,* conservando siempre sus mismas lonjitudes primitivas, tanto en la parte superior como en la inferior de esta base.

FIG. 49. 162. Si hubiese trazada una curba cualquiera GMM' sobre el cilindro, esta curba estará reemplazada en el prisma, por un poligono GMM'M" cuyos lados no variarian tampoco de lonjitud, cuando con las caras sobre que se hallan sigan el movimiento de rotacion de estas alrededor de las aristas subcesivas: pero dicho poligono cambiaria de forma, porque el ángulo interior MM'M" (*) se convertiria en el MM'*m*". Con todo, como en este desarrollo, el lado M'M" jira, por un movimiento de revolucion alrededor de la charnela B'M', síguese de aquí que el ángulo B'M'M" permanecerá constante e igual al B'M'*m*',: esto mismo sucederá con el ángulo BMM' o TMA que será siempre invariable, resultando ademas que en el estado de límite un lado de este ángulo, el TMM', se convertirá en tanjente a la curba que está reemplazada, en el caso presente, por el poligono GMM'. Si ademas observamos que todas estas propiedades son independientes de la mayor o menor pequeñez de las caras del prisma, y que por consiguiente deben ser tambien ciertas en el límite de este prisma o en el cilindro de la *fig.* 48, concluiremos de aquí
FIG. 48. que, 1.° cuando se desarrolla un cilindro en cuya superficie se ha trazado una curba cualquiera GM, esta línea se cámbia en otra curba que llamaremos *la transformada* de la primera, y sus arcos

---

(*) *El suplemento de este ángulo; es decir el M'M't, comprehendido entre dos tanjentes consecutivas, se llama* ángulo de continjencia *y puede servir para apreciar la* curbatura *de la curba en este lugar segun lo esplicaremos mui luego (núm.* 198*).*

tienen *la misma lonjitud absoluta* que los de la curba primitiva; 2.° las porciones de las jeneratrices MA,M'A'.... comprehendidas entre esta curba y la seccion recta CAA' permanecen de la misma magnitud, y son siempre perpendiculares a la recta que es el desarrollo de esta base CAA'. 3.° Cada tanjente MT a la curba primitiva, forma con la jeneratriz MA, *un ángulo que permanece invariable*; y ademas, se halla que esta misma recta MT despues de efectuado el desarrollo es tambien, *tanjente a la transformada*. Esta última asercion se justifica, con observar que en el desarrollo del prisma, no deja nunca de ser la línea MT prolongacion de un lado del poligono transformado.

Mui pronto veremos, en varios de los depurados, el modo con que se hace uso de estas diversas propiedades, para ejecutar gráficamente el desarrollo de un cilindro, y para construir sobre este desarrollo las transformadas de las curbas que primitivamente se hayan trazado sobre este cuerpo.

163. Hemos dicho que una curba cualquiera GMM', trazada sobre un cilindro, se cambiaba, despues de desarrollada esta superficie, en otra línea que jeneralmente es tambien curba; sin embargo de esto, hai casos particulares en que está transformada puede ser *rectilínea*, y para hallar mas fácilmente las condiciones relativas a este caso, sustituyamos otra vez el prisma recto y el poligono GMM' de la *fig.* 49 a la curba y al cilindro propuestos. Para que en este caso el lado M'M", trasportado a M*m*", esté sobre la prolongacion de MM', es preciso y evidentemente suficiente que sea FIG. 49.

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{B'M'}m'' = \mathrm{A'M'M} = \mathrm{BMM'}$$

y como hemos visto (núm. 162) que el primero de estos ángulos permanecia igual al ángulo primitivo B'M'M", síguese que la condicion precedente se convertirá en esta otra:

$$\textit{ángulo}\ \mathrm{B'M'M''} = \mathrm{BMM'};$$

esto mismo sucederia con los otros lados consecutivos comparados entre sí; por consiguiente, todos los lados del poligono GMM'M"

823585

deben cortar a las aristas del prisma bajo un ángulo constante. Si ahora transportamos al cilindro estas relaciones, que deben siempre tener lugar en el prisma, por mas pequeñas que sean sus caras, y si recordamos (núm. 157) que las prolongaciones de los lados del poligono vienen a ser, en el estado de límite. las tanjentes de la curba continua hácia a cual converje este poligono, deduciremos de aquí este teorema; *para que una curba* GM *trazada sobre un cilindro, sea* RECTILINEA *despues de haber desarrollado esta superficie, es preciso, y suficiente que todas las tanjentes de esta curba formen un ángulo constante con las jeneratrices del cilindro.*

A las curbas que cumplen con esta última condicion se las denomina HELICES, sea cual fuere la base del cilindro sobre que se hallen trazadas; y asi es que las helices son las únicas curbas que en el desarrollo de la superficie cilíndrica que las contiene, se tranforman en líneas rectas.

FIG. 48. 164. Estas curbas gozan ademas de esta otra notable propiedad: *un arco cualquiera de helice* tal como GM *es la línea mas corta que se puede trazar sobre el cilindro, entre sus estremidades* G *y* M. Con efecto, si comparamos con ella cualquiera otra cuaba comprehendida entre los puntos G y M, este último arco, despues de desarrollado el cilindro no será rectilineo; luego, segun esto, será mas largo que el arco de helice que se habrá transformado en recta: pero hemos visto (núm. 162) que en este desarrollo conservan las *transformadas* la misma lonjitud que las curbas primitivas; luego tambien antes del desarrollo del cilindro, era el arco de helice mas corto que cualquiera otra línea que pasase por los puntos G y M.

165. Observaremos aquí que todas las curbas que se vuelven rectilíneas despues de desarrollado el cilindro, en su primitivo estado eran *de doble curbatura,* es decir, que tres tanjentes inmediatas, o tres elementos consecutivos, no se hallaban en un mismo plamo. Con efecto, volvamos a examinar el poligono de la *fig.* 49, y consideremos tres lados consecutivos de él, como por ejemplo, los KM,MM' y MM", que supondremos estar dirijidos de tal modo que formen con las aristas del prisma ángulos iguales entre si, y que representaremos α. Si estos tres lados pudiesen hallarse en un solo plano, sucederia lo mismo sin la menor duda, con tres rectas tiradas por un punto cualquiera G, paralelamente a estos tres lados: pero como cada una

de estas tres paralelas formará el mismo ángulo α con la arista GD, síguese que estarán situadas sobre la superficie de un cono recto cuyo eje será GD; y conocemos mui bien que una superficie de esta naturaleza no podrá tener tres de sus jeneratrices sobre un mismo plano, porque en tal caso se hallarian en línea recta tres puntos de la circunferencia que le sirve de base. Luego es así mismo imposible que los tres lados consecutivos KM,MM', y M'M" se hallen en el mismo plano, y como esta proposicion tiene siempre lugar, cualquiera que sea la pequeñez de los lados, es así mismo cierta respecto a las prolongaciones de estos, cuando el poligono dejenera en una curba continua, en cuyo caso estas prolongaciones sno las tanjentes mismas de la curba. Y así es que las helices son siempre líneas de doble corbatura.

166. Solo debemos esceptuar de esta conclusion jeneral, un solo caso, que es el de ser recto el ángulo α; porque entónces el mismo cono que nos acaba de servir para establecer la proposicion procedente se reduce a un plano. Ademas, la helice particular correspondiente a la presente hipotesis $\alpha=90°$, no es evidentemente otra cosa que la *seccion recta* CAA'; y con efecto sabemos (núm. 161) que esta seccion es rectilínea despues de desarrollado el cilindro; pero a lo ménos pedemos asegurar que *de todas las curbas* PLANAS *trazadas sobre un cilindro, no hai mas de la* SECCION RECTA *que despues de efectuado el desarrollo de esta superficie sea rectilínea.*

167. Con motivo de las helices que segun ya lo hemos visto, no son curbas planas, haremos observar que en toda línea de doble corbatura GKM, situada de un modo cualquiera en el espacio, si tres elementos próximos KM,MM'M'M" no se hallan en un mismo plano, por lo ménos satisfarán esta condicion dos elementos consecutivos MM' y M'M"; y al plano MM'M" se le da el nombre de *plano osculador* de la curba en el punto M. Respecto al punto K, el plano osculador será el KMM', y así en seguida; de modo que los diferentes planos osculadores se cortan de dos en dos segun un elemento intermedio, y no coinciden todos en uno sino cuando la curqa es plana. Ademas de esto, segun las consideraciones espuestas mas arriba, todo manifiestamente se reduce a definir el plano

osculador, como que es el que pasa por dos tanjentes infinitamente próximas.

168. Observemos aun, que una curba continua, sea o no plana, no tiene nunca mas de una sola tanjente en un punto dado, pero que puede evidentemente tener una infinidad de normales, es decir, de rectas perpendiculares a la tanjente, tiradas todas ellas por el punto de contacto de esta última, todas estas normales forman necesariamente un plano que es perpendicula a la tanjente, al cual se da el nombre de *plano normal* de la curba en el punto en cuestion. Esto es precisamente lo inverso de lo que sucede en una superficie, esta admite, en cada uno de sus puntos una infinidad de tanjentes cuyo compuesto forma el plano tanjente, y una sola normal que es perpendicular a este plano.

169. UNA SUPERFICIE CONICA PUEDE SIEMPRE DESARROLLARSE. Sin pasar ya por todas las consideraciones intermedias que hemos creido de absoluta necesidad considerar en el cilindro, miremos la base
FIG. 50. del cono, sea cual fuere, como un poligono *infinitesimal* CAA'A", y al cono mismo como una pirámide en la que cada cara SAA', sea un elemento superficial infinitamente angosto, que será comun (núm. 159) a la superficie y al plano tanjente, en todo el largo de la jeneratriz SA. En este estado, podremos hacer jirar la cara SA'A" alrededor de la arista SA; hasta que venga a colocarse en el plano de la cara SA'A", y a continuacion de esta, y en seguida hacer jirar el sistema de estas dos caras al rededor de la arista SA hasta que se hallen a continuacion del plano de la cara precedente. Continuando del mismo modo, hallaremos por resultado un sector poligonal (*) compuesto de todas las caras de la pirámide, colocadas unas a continuacion de otras y situadas sobre un mismo plano que por consiguiente tendrá la misma superficie que area la pirámide: es ademas evidente que en esta transformacion, los lados y ángulos de las caras SA'A",SAA'.... parmanecerán invariables, lo mismo que los de cualquiera otro triángulo SM'M", SMM'.... miéntras que los ángulos

(*) *O mas bien, el sistema de dos sectores opuestos por el vértice, si desarrollamos al mismo tiempo la pirámide superior SBB'B" que reemplaza la segunda napa del cono.*

AA'A",MM'M" variarán de magnitud, y como todas éstas circunstancias son tambien ciertas sea cual fuere la pequeñez de las caras de la pirámide, subsistirán las mismas en el límite del cuerpo. es decir en un cono en cuya superficie serán los poligonos CAA'A" y GMM'M" curbas continuas, y cuyas tanjentes serán las prolongaciones de los elementos AA' y MM'.

170. De aquí resultan evidentemente las consecuencias siguientes: 1.° *toda superficie cónica es desarrollable*, y en esta transformacion, *las jeneratrices*, o cualquiera porcion de estas rectas, *no varia de lonjitud*.

2.° La base del cono, o cualquiera otra curba trazada sobre su superficie, se convierte en una línea cuya curbatura no es la misma que la de la curba primitiva, a la que se da el nombre de transformada de la primera: pero *los arcos* de esta transformada *conservan la misma lonjitud* absoluta que los de la curba primitiva. Si esta última tubiese todos sus puntos a una distancia constante del cúspide, la transformada será *un arco dc círculo* descrito con esta distancia por radio.

3.° *Cada tanjente* de la curba primitiva forma con la jeneratriz del cono, *un ángulo* que permanece *invariable* en el desarrollo de esta superficie y esta primera recta es tambien *tanjente a la transformada*. Mas adelante veremos el modo de emplear estas varias propiedades, para ejecutar gráficamente el desarrollo de una snperficie cónica.

171. Para que una curba GMM', trazada sobre un cono, sea *rectilìnea* despues de desarrollada la superficie, es suficiente que dos elementos consecutivos tales como MM' y M'M" tengan sus direcciones de modo que

$$\text{ángulo } SM'M''=SM't;$$

y como las prolongaciones de estos elementos son las tanjentes de la curba primitiva, que equivale a decir, que *dos tanjentes consecutivas* de esta curba *deben formar ángulos iguales con la jeneratriz intermedia:* pero estos ángulos no son constantes en todas las tanjentes, como sucedia en el caso del cilindro (núm. 163).

172. Toda curba que satisfaga a la condicion precedente, goza- FIG. 50.

rá tambien de la propiedad de ser *la línea mas corta* que se puede trazar entre dos puntos dados en la superficie cónica; y esto se demuestra por las mismas razones dadas en el núm. 164; pero esta curba no presentará la forma de una espiral que va elevándose cada vez mas hácia el cúspide S del cono. Con efecto, el ángulo SMM' será menor que el SM'M'', supuesto que este último igualará al SM*t*: y como la inclinacion SM*t* de cada tanjente con la jeneratriz correspondiente, es un ángulo agudo que va siempre aumentando, síguese que la distancia SM llegará a ser un mínimo cuando este ángulo sea recto, y en este caso obtendremos el punto de la curba mas próximo al cúspide S; mas adelante dicha curba se alejará cada vez mas del cúspide, porque el ángulo SM*t* será obtuso, y continuará creciendo. Así es, que por ejemplo, sobre un cono de revolucion, la línea mas corta entre dos puntos de la base circular, no es el arco de este círculo comprehendido entre los dos puntos dados, sino que es una especie de curba *hiperbólica* cuyo vértico se halla a igual distancia de los dos puntos en cuestion, y que despues de efectuado el desarrollo del cono se convertirá en una cuerda del *círculo* en que se *transforme* la base primitiva. Los dos radios paralelos a esta cuerda, eran en el cono primitivo, las jeneratrices *asìntotas* de la curba en cuestion.

173. Por el contrario, una curba trazada sobre una superficie cónica cualquiera que esta sea, y que goce de una propiedad análoga a la de la helice (núm. 163), es decir, *cuyas tanjentes todas formasen un ángulo constante con la jeneratriz* que pasa por el punto de contacto, presentaria la forma de una espiral que indefinidamente se aproximaria al cúspide, el cual seria respeto a ella *un punto asintótico*: porque en el desarrollo, esta curba se convertiria evidentemente en una *espiral logarìtmica*, porque sabemos que esta última curba tiene la propiedad de cortar a todos sus radios vectores bajo un un mismo ángulo.

Si este ángulo fuese recto la transformada seria un círculo: en cuyo caso como todos los radios vectores eran iguales, resultaria que la curba primitiva trazada sobre el cono no podia ser sino una *curba esférica*, es decir que resultaria de la interseccion del cono propuesto con una esfera que tubiese por centro el cúspide del cono (*véase* núm. 319).

174. De cualesquiera superficies desarrollables. Jeneralicemos ahora las consideraciones que hemos empleado en los conos y cilindros, y supongamos que una superficie ha sido enjendrada, por *una recta que se ha movido de modo que dos posiciones consecutivas* o infinitamente próximas *se han hallado siempre en un mismo plano.* Mui pronto indicaremos (núm. 180) los diversos modos de satisfacer a esta condicion; pero por de pronto, será suficiente admitir que se ha cumplido con ella de un modo cualquiera, y que AB,A'B',A"B".... son las posiciones infinitamente próximas de la recta móvil. En este caso, y en conformidad con la definicion de la superficie, tendremos que las dos jeneratrices consecutivas AB y A'B' se cortarán necesariamente (*) en cierto punto M'; así mismo a la jeneratriz A'B' la encontrará la A"B" en otro punto M", y a esta última la encontrará la siguiente en otro punto M" &c, de suerte que estas intersecciones subcesivas darán oríjen a un poligono MM'M"M"'....; o mas bien, ya que suponemos que las jeneratrices están infinitamente próximas, nos resultará una curba continua VMM'M"U a la que evidentemente serán tanjentes todas estas rectas; que se llama *arista de retroceso* de la superficie, por una razon que mui pronto explicaremos (núm. 178). FIG. 51.

175. Esto supuesto, decimos que la superficie enjendrada segun la ley precedente es *desarrollable.* Con efecto, como las dos jeneratrices consecutivas AMB y A'M'B' se halla sobre el mismo plano, comprehenden entre sí una zona angular de la superficie, infinitamente estrecha, pero indefinida en lonjitud, que es precisamente *plana*; porque si consideramos las diferentes curbas trazadas sobre la superficie, tendremos que como los elementos lineales AA',PP'.... tienen dos puntos comunes con las rectas AM y A'M', se hallarán todos en el plano de estas dos jeneratrices. Así mismo, las jeneratrices A'M'B' y A"M"B" comprehenden otro *elemento superficial* que es *plano y de una lonjitud indefinida*; y así de los demas. En vista de

(*) *Estas rectas podrian mui bien ser paralelas; pero considerando en este caso su punto de seccion como situado al infinito, siempre hallariamos que este caso particular estaba comprehendido en la especie jeneral.*

esto, si hacemos jirar el primer elemento alrededor de la recta A'M'B' sirviendo esta de charnela, hasta que llegue al plano prolongado del segundo elemento; y en seguida abatimos, jirando alrededor de A"B", el sistema de estos dos elementos sobre el plano prolongado del tercero, concluiremos, continuando de este modo, por desarrollar sobre un solo plano toda la superficie propuesta, sin que haya discontinuidad y sin alterar su superficie. Ademas, es mui evidente que 1.° por esta transformacion, no habrán variado de ningun modo las lonjitudes de las porciones de jeneratrices MA,M'A',.... como tampoco las de los arcos AA', A'A",....; 2.° que los ángulos MAA', o MAT, MA'A" o MA'T",.:.. formados por las jeneratrices con las tanjentes de una curba cualquiera AD trazada sobre la superficie, permanecerán tambien *invariables;* 3.° que por el contrario los *ángulos de continjencia* tales como TA'T", o sus suplementos como AA'A" cambiarán de magnitud, y que así la curba AD tendrá por *transformada* una línea cuya curbatura no será la misma que era primitivamente. Segun esto queda demostrado que toda superficie que satisfaga a la condicion del núm. 174, será desarrollable.

176. Recíprocamente, es necesaria esta condicion; porque para que una superficie pueda estenderse sobre un plano sin que se rompa ni duplique, es evidentemente necesario que se componga de elementos superficiales planos, que solo estén unidos de *dos en dos* por bordes rectilíneos indefinidos, para qne estas rectas puedan servir de charnelas alrededor de las cuales pueda hacerse jirar estos elementos superficiales y trasladarlos a un plano único, colocándolos unos a continuacion de otros. Porque si la recta que es interseccion de dos elementos contiguos, estubiese limitada por el encuentro con otro elemento, resultaria en el lugar donde se efectuase un ángulo tiedro o poliedro, cuyas caras no podrian estenderse sobre un plano, sin que dejasen entre sí intersticios; y como esta misma circunstancia se repetiria en cada punto en que se reuniesen mas de dos elementos superficiales, no habria ya continuidad en el desarrollo de la superficie, y esta estaria alterada.

177. De aquí resulta inmediatamente que *el plano que toca a una superficie desarrollable* en un punto cualquiera P, *es tanjente en todo el largo de la jeneratriz* APMB que pasa por este punto. Con

efecto, supuesto que (núm. 175) todas las curbas AD,PX,BC,.... tienen sus elementes lineales AA',PP',BB'.... situados en el mismo plano que dos rectas infinitamente próximas tales como AM'B,A'M'B', síguese de aquí que este plano contiene a todas las tanjentes en los puntos A,P,B.... y no es por consiguiente sino un solo plano AM'B' o BAT, que toca a la superficie desarrollable, en todo el largo de la jeneratriz AMB. Y así, cuando en adelante, queramos construir el plano tanjente relativo a un punto Q, dado sobre una superficie, será suficiente le hagamos pasar *por la jeneratriz* AQB *y por la tanjente* AT *a una curba trazada sobre esta superficie por un punto cualquiera de* AB.

Esta proposicion que hemos demostrado ya (núms. 99-100) respecto a los cilindros y conos; es por consiguiente comun a todas las superficies desarrollables; y merece tanta mas atencion, cuanto no se verifica en las *superficies gausas*, aun cuando estas admiten tambien jeneratrices rectilíneas. Ademas, nos va a servir mui pronto para indicar un nuevo método de enjendrar estas superficies desarrollables, mirándolas como *envolventes* de un plano móvil (núm. 183).

Observemos tambien que el plano AM"A' o BAT que es tanjente a la superficie desarrollable, coincide precisamente con *el plano osculador* de la arista de retroceso VMU, supuesto que las dos jeneratrices AM' y A'M' son tanjentes a esta curba.

178. Hemos dicho que la curba VMU formada por las intersecciones subcesivas de las jeneratrices, se llama *la arista de retroceso* de la superficie desarrollable; y para percibir mejor la exactitud de esta denominacion, no tenemos mas que mirar a cada jeneratriz AB como compuesta de dos partes MA y MB, una de ellas situada debajo y otra encima del punto de contacto M; espresar en seguida con el nombre de *napa inferior*, a la porcion de superficie enjendrada por las partes MA.M'A',M"A",.... al propio tiempo que las partes MB,M'B',M"B",.... formarán la *napa superior* (*). En cuyo caso, si FIG. 51.

(*) *Estas partes de jeneratriz se prolongarán indefinidamente; pero, para hacer mas sensible la forma opuesta de las dos napas, supondremos aquí que estas rectas se terminan en dos planos horizontales que cortan a la superficie segun las curbas AD y BC de las*

queremos pasar de una napa a otra, caminando sobre la superficie de un modo continuo y en una direccion cualquiera (ménos en la direccion de la jeneratriz), notaremos fácilmente que este paso no puede ejecutarse sino siguiendo una curba $\beta N\alpha$, que presentará *un punto de retroceso* en el lugar en que encuentra a la línea VMU.

Como la observacion de esta circunstancia es mui importante, tratemos ahora de hacerla mas sencible, proyectando toda la figura sobre un plano horizontal, sea cual fuere; sea pues *vnu* (*fig*, 52) la
FIG. 51. base del cilindro vertical que pasa por la curba VNU, y *ab,a,b'*,....
y 52. las proyecciones de las jeneratrices, que necesariamente serán tanjentes a *vnu*. Desde luego se infiere que ninguna de estas rectas puede penetrar al cilindro vertical *vnu*, y que en virtud de esto, las dos napas de la superficie desarrollable quedan fuera de este cilindro, sobre el cual vienen a poyarse al largo de la curba VNU. Ademas, si miramos a este cilindro como un cuerpo sólido, y a la jeneratriz proyectada sobre *ab* como una recta *inflexible*, que rueda, *sin resbalar*, sobre este cilindro permaneciendo tanjente a la curba VNU, es evidente que esta recta móvil recorrerá la superficie desarrollable de que tratamos. Pero percibimos bien en este movimiento que un punto cualquiera β, unido fijamente a la parte superior *mb* de la jeneratriz, irá en primer lugar aproximándose al cilindro, y llegara a β' cuando la jeneratriz se proyecte sobre *a'b'*, y a *n* cuando se proyecte en *a"b"*. Pero despues de esta posicion, el punto jenerador estará situado *debajo del punto de contacto* de la jeneratriz, siempre que continue rodando sobre el cilindro vertical; de modo que el punto móvil principiará desde entónces a separarse cada vez mas de este cilindro y se hallará en α''' cuando la posicion de la jeneratriz sea *a'''b'''*, y en α'''' cuando esta posicion sea *a''''b''''*,.... En todo lo cual vemos claramente que la curba $\beta\beta'n\alpha'''$ descrita por el punto β, se compondrá de dos ramas que producirán un retroceso en *n* y que una de estas ramas $\beta\beta'n$ estará situada sobre la napa superior de la superficie, y la otra $n\alpha'''$ lo estará en la napa inferior. Estudiaremos por estenso, en el núm. 456, el caso particular en que la curba VNU es una helice.

---

cuales la primera vuelve su convexidad, y la segunda su concavidad hácia el observador.

179. Reuniendo todo cuanto precede, hallaremos las consecuencias siguientes: 1.º *Para que una superficie sea desarrollable, es preciso y suficiente que esté enjendrada por una recta que se mueva de modo que siempre se hallen en un mismo plano dos posiciones consecutivas.* Esta es una propiedad característica de todas las superficies de esta clase, la cual evidentemente comprehenden tambien a los dos jéneros particulares de *cilindros* y de *conos;* porque en el primero, las jeneratrices rectilíneas son siempre paralelas, y en el segundo todas ellas se cortan en un mismo punto.

2.º *Una superficie desarrollable tiene siempre una* ARISTA DE RETROCESO formada *por las intersecciones subcesivas de las jeneratrices*; estas rectas son tanjentas a la arista de retroceso, que ademas divide a la superficie en dos napas distintas. En las superficies cónicas, la arista de retroceso se reduce a un solo punto que es el cúspide; y en los cilindros, esta arista está toda ella colocada a una distancia infinita.

3.º *El plano tanjente* de una superficie desarrollable *es comun* a todos los puntos de una misma jeneratriz rectilínea; y coincide con *el plano osculador* de la arista de retroceso.

4.º En el desarrollo de la superficie, tanto *las porciones de las jeneratrices,* como *los arcos de una curba cualquiera* trazada sobre la superficie, *no varia de lonjitud absoluta*; *y los ángulos que las tanjentes a esta curba forman con las jeneratrices permanecen constantes.* Pero no sucede así con los ángulos de *continjencia,* comprehendidos entre dos de estas tanjentes consecutivas; y por consiguiente esta curba tiene por *transformada* a una línea cuya curbatura no es la misma que anteriormente (*).

180. Veamos ahora como puede satisfacerse la condicion que ha servido (núm. 174) para definir las superficies desarrollables. Elijamos dos curbas cualesquiera fijas en el espacio, tales como AD y BC; FIG. 51.

(*) *Sin embargo, debemos esceptuar la arista de retroceso, en la cual* los ángulos de continjencia *permanecen invariables, porque en este caso, estos ángulos están formados por las jeneratrices entre sí, y estas rectas sirven precisamente de charnelas para ejecutar el desarrollo. Y así por ejemplo, el ángulo* AM'A' *permanece constante, lo mismo que su suplemento* MM'M".

en seguida, sujetemos una recta móvil a que resbale por estas directrices, pero de modo que sus posiciones consecutivas estén de dos en dos situadas en el mismo plano. Despues de haber elejido sobre la primera curba un punto cualquiera tal como el A', no lo uniremos con un punto arbitrario de la segunda, porque nada habria que nos asegurase que la recta trazada de este modo, se hallaba en un mismo plano con la posicion que tomase en seguida, por mas próximas que estas dos estubiesen (*); pero figurémonos una superfice cónica que tenga por cúspide al punto A' y por base a la curba BC, y tirémosle un plano tanjente que pase (núm. 125) por la recta A'T' que es tanjente en el punto A' a la directriz AD; si en este caso construimos la recta A'B' segun la que este plano toca al cono auxiliar, decimos que A'B' será la posicion que debe tomar la jeneratriz de la superficie desarrollable, cuando pase por el punto A' de la directriz; y las otras posiciones A"B", A'"B"',.... se hallarán por un medio enteramente semejante. Para justificar esta construccion, es preciso observar que cuando la recta móvil pasa de la posicion A'B' a otra posicion A"B" infinitamente próxima, podrá mirarse como si resbalase sobre las tanjentes A'A"T' y B'B"S' que coinciden con las verdaderas directrices en el intervalo de los elementos A'A" y B'B"; y como estas dos tanjentes están situadas evidentemente en un plano único, que es plano tanjente que hemos tirado al cono auxiliar; síguese tambien que las dos jenaratrices A'B' y A"B" se hallarán en el mismo plano.

FIG. 51. 181. Es suficiente señalar *una sola directriz* para determinar completamente la superficie desarrollable, siempre que se sujete la recta móvil a que permanezca *constantemente tanjente a esta curba*. Con efecto, sea VNU una línea cualquiera, fija en el espacio, pero que debemos elejir de doble curbatura, si no queremos recaer en un simple plano. Construyamos las tanjentes AMB, A'M'B', A"M"B",.... en los

(*) *A ménos que no se quisiera dejar inmóvil el punto de la recta colocado en A' y hacer solo resbalar la otra estremidad sobre la curba BC; pero de este modo no hallariamos sino una superficie cónica, jénero de superficies desarrollables demasiado particulares para que nos detengamos aquí en ellas.*

puntos M,M',M",.... estremadamente próximos en la curba; estas serán otras tantas posiciones de la recta móvil; y ahora decimos que la superficie que es el lugar de todas estas posiciones, será *desarrollable.* Porque las dos jeneratrices infinitamente próximas AMB y A'M'B' tienen comun con la curba, una de ellas el elemento MM' y la otra el elemeuto M'M": luego estas jeneratrices se cortan en el punto M', y por consiguiente *están situadas sobre un mismo plano.* Un raciocinio enteramente semejante se aplicaria tambien a las otras jeneratrices consecutivas; y así es cierto que la superficie, lugar de todas estas tanjentes, es desarrollable; y en el caso actual, la curba directriz VNU es precisamente la arista de retroceso, que tiene siempre por *planos osculadores* a los planos tanjentes (núm. 177) de la superficie desarrollable.

He aquí algunos otros modos de enjendrar una superficie desarrollable.

182. Si sobre una superficie dada que indicaremos sensillamente por S, trazamos una curba fija sea, cual fuere tal como, GND....; y en seguida, por puntos mui próximos entre sí, como N,N',N".... tomado sobre esta línea, tiramos los planos tanjentes P,P',P".... a la superficie, los que en el presente caso están figurados solo por las rectas NP,N'P'.... tendremos que estos planos se cortarán consecutivamente segun las rectas AM,A'M',A"M"..... *que de dos en dos se hallarán en el mismo plano.* Efectivamente, como las dos primeras resultan de las intersecciones del plano P' con el precedente P y con el siguiente P", están evidentemente situadas ámbas en el plano P'; así mismo las rectas A'M' y A"M" están tambien ámbas en el plano P", y así en seguida. De aquí resulta que estas diversas intersecciones determinan uua série de caras planas y angulares AMA', A'M'A", A"M"A'",.... que se apróximan a formar una superficie *continua* y evidentemente desarrollable, tanto mas exacta cuanto mas próximos se hayan tomado los puntos de contacto N,N',N'".... sobre la curba CD. Pero para llegar a este límite, es suficiente que nos imajinemos que el plano P rueda sobre la superficie S con un movimiento continuo, siéndole constantemente tanjente en toda la estension de la curba dada CND; eu cuyo caso se dice que la superficie desarrollable de que tratamos es *la envolvente de las posiciones que toma el* FIG. 53.

plano móvil, porque efectivamente esta superficie *es tocada* por dicho plano en cada una de sus posiciones, pues estas no son otra cosa que las prolongaciones de los pequeños elementos superficiales AMA',A'M'A",.... que componen la superficie,

183. Esto no es particular a la superficie que nos ocupa, y podremos decir jeneralmente que *toda superficie desarrollable es la evolvente de las posiciones de un plano móvil* sujeto a moverse segun *una ley determinada.* Con efecto, en el caso jeneral, hemos visto (núm. 177) que la superficie era tocada en todo el largo de la jeneratriz
FIG. 51. AB, por un plano único que contenia a la jeneratriz infinitamente próxima A'B', y que, por consiguiente, era la prolongacion del elemento superficial AM'A'; así mismo el plano tanjente consecutivo será la prolongacion del elemento A'M"A", y estos dos planos se cortarán segun la recta A'M'B'; de modo que siendo las diversas jeneratrices, las intersécciones de los planos tanjentes consecutivos, podremos obtener estas rectas, o bien enjendrar la superficie desarrollable, haciendo mover un plano indefinido, de modo que tome subcesivamente las posiciones AM'A', A'M"A",.... Pero el movimiento del plano móvil deberá en cada superficie particular estar arreglado a *una ley determinada*; es decir, por medio de tales condiciones que este plano no pueda tomar sino una sola posicion, respecto a cada punto del espacio por el cual pase.

184. Y así por ejemplo, puede sujetarse el plano móvil, a *rodar sobre dos superficies fijas,* permaneciendo constantemente tanjente a estas dos superficies, con tal que ademas no sean ni una ni otra desarrollables; porque debemos conocer que la condicion de tocar a una superficie de este último jénero, aun que sea en un punto indeterminado, equivaldria a dos condiciones distintas, porque el contacto necesariamente se estenderia en todo el largo de una misma jeneratriz (núm. 177). Esta restriccion es análoga a la que hemos dicho hablando de los cilindros y conos en los números 118 y 125.

185. Puede tambien exijirse que el plano móvil sea constantemente *osculador* (núm. 167) a una curba fija, tal como la línea VNU de la *fig.* 51; es decir que siempre pase por dos elementos consecutivos de esta línea, en cuyo caso manifiestamente se convertirá en arista de retroceso de la superficie desarrollable, formada por

las intersecciones subcesivas del plano móvil.

186. Finalmente podremos hacer mover a este plano de modo que constantemente permanezca *normal* (núm. 168) a una curba dada VNU, porque, lo mismo que en el núm. 182, reconoceremos que estas diversas posiciones se cortaran consecutivamente segun rectas que se hallarán situadas de dos en dos en un mismo plano y así formarán una superficie desarrollable. Esta superficie se reduciria evidentemente a *un cilindro*, si fuese la curba dada VNU sea plana, porque entónces todos los planos normales se cortarian segun rectas perpendiculares al plano de VNU, y por consiguiente paralelas entre sí.

187. Examinemos ahora la condicion con que debe cumplir una curba PP'X trazada sobre una superficie desarrollable, sea esta, cual fuere para que sea *la línea mas corta* entre dos de sus puntos P y X. Es preciso y suficiente que despues de desarrollada la superficie dicha línea sea *recta*; porque, en esta operacion, sabemos (núm. 179, 4º) que cada transformada conserva la misma lonjitud que la curba primitiva; y cuando la superficie está estendida sobre un plano, es mui cierto que una recta es la línea mas corta entre dos de sus puntos: luego &c. FIG. 51.

Pero, para que la curba PP'X se convierta en una transformada rectilínea, es necesario y bastante que *dos elementos consecutivos formen siempre ángulos iguales con la jeneratriz intermedia*, es decir que respecto a cada punto de la curba debe tener lugar la relacion siguiente

$$\textit{ángulo}\ MP'R = MP'P''$$

Con efecto, como estos dos ángulos permanecen de magnitud invariable despues de haber hecho jirar el primero alrededor del lado comun MP', es evidente que cuando se hayan trasladado al mismo plano, los dos elementos PP' y P'P'' se hallarán en la prolongacion uno de otro, siempre que se verifique la relacion precedente. Tal es por consiguiente la condicion que debe llenar la curba PX, para ser *mínimo*: pero de aquí resulta otra propiedad que debe observarse.

188. *La curba* PX, *correspondiente a un mínimo, tiene todos sus*

planos osculadores NORMALES *a la superficie desarrollable* sobre que está trazada. Para demostrarlo, observaremos que, segun la relacion admitida en el número precedente, las dos tanjentes consecutivas PP'R y P'P"B' forman ángulos iguales con la jeneratriz A'M'; de aquí se sigue que estas dos tanjentes son dos aristas de un cono recto que tiene a la línea A'M' por eje; y como suponemos que están infinitamente próximas, debemos mirar al plano RP'R' como que es tanjente al cono de que tratamos, en todo el largo de la arista RP'. Pero en toda superficie de revolucion, el plano tanjente (núm. 129) es perpendicular al plano meridiano que pasa por el punto de contacto; luego en el caso presente el plano RP'R' es perpendicular al plano AM'A' que contiene al eje del cono y a la arista de contacto P'R. Y como el primero de estos planos no es otra cosa que el plano osculador PP'P" de la curba propuesta, y el segundo es precisamente el plano tanjente de la superficie desarrollable; podemos por consiguiente decir con certeza que cada plano osculador de la curba que es un mínimo, es normal a esta última superficie.

189. Esta propiedad de que goza la curba *mínima*, es tanto mas notable por cuanto se verifica, igualmente sea cual fuere la superficie sobre que esté trazada una curba de esta naturaleza. Sea en efecto, CND la línea mas corta de todas las que, sobre una superficie cualquiera S, reune los dos puntos C y D; si por todos los puntos N,N'N".... de esta curba, tiramos planos tanjentes a S, dichos planos formarán, segun hemos visto (núm. 182), una superficie desarrollable S' circunscripta a S, que tendrá evidentemente los mismos planos tanjentes que esta última en todo el largó de la curba, mínima. De aquí se sigue que, en la direccion CND, cada elemento superficial (infinitamente pequeño en todos sentidos) de la superficie S será comun a la superficie S', y que así la curba CND que suponemos que es mínima sobre la primera, deberá tambien ser mínima sobre la segunda: pero por esta última condicion, la curba CND tendrá sus planos osculadores perpendiculares (núm. 188) a los planos tanjentes de la superficie desarrollable S'. y como estos son los mismos que los planos tanjentes de S, estamos en el caso de concluir que, *sobre una superficie cualquiera, la curba mínima tiene todos sus planos osculadores* NORMALES *a esta superficie.*

FIG. 53.

CAPITULO II.

De las superficies envolventes.

190. Se llama *superficie envolvente*, o sencillamente *envolvente* al lugar de las intersecciones consecutivas de una superficie móvil, que varia de posicion y aun de forma, segun una ley determinada. A este lugar que tiene, segun vamos a ver, la propiedad de tocar al largo de una curba a cada una de las posiciones de la superficie móvil, se llama con razon la envolvente de todas estas posiciones, y a estas se les da el nombre de *involutas*. Ademas, por un motivo que esplicaremos mas tarde (núm. 203), se da el nombre de *característica* a la interseccion de dos involutas consecutivas, y al largo de esta característica es donde tiene lugar el contacto de la envolvente e involuta. Y así, cuando un plano se mueve segun una ley determinada (núm. 182–186), admite por envolvente a una superficie desarrollable, lugar de sus intersecciones subcesivas, que en el caso presente son rectas, y he aquí las características; en tanto que las involutas son las diversas posiciones del plano móvil, cada una de las cuales toca a la envolvente segun una de estas características. Pero para aclarar mas estas nociones jenerales, es preciso que consideremos ejemplos ménos particulares, y en los cuales las involutas sean superficies curbas.

191. Supongamos que sea una esfera móvil, cuyo centro O recorra la vertical OZ, y cuyo radio OA varie segun cierta ley: de modo, por ejemplo, que subcesivamente coincida con las diferentes ordenadas OA, O'A', O"A",.... de una curba AA'X trazada en el plano vertical de la figura. En este caso dos esferas infinitamente próximas, O y O', se cortarán evidentemente segun un círculo horizontal proyectado sobre la cuerda BC; así mismo la esfera O' cortará a la tercera O", segun el círculo B'C', y así de las demas. Pero todos estos círculos que tienen sus centros sobre OZ y sus planos perpendiculares a esta recta, pertenecerán (núm. 78) a una superficie de revolucion que *tocará*, envolviéndo a cada una de estas esferas móviles. Con efecto, como los dos círculos infinitamente próximos BC y B'C' se hallan a un mismo tiempo sobre la superficie de revolucion y sobre la esfera O', síguese que estas dos superficies tienen comu- FIG. 55

nes todos los elementos superficiales situados sobre la zona infinitamente angosta BB'C'C: por consiguiente ámbas tienen los mismos planos tanjentes, o bien las dos se tocan en todo el largo de esta zona. Así mismo, la superficie de revolucion será tanjente a la esfera O" al largo de la zona B'B"C"C'; y así esta superficie jeneral es la *envolvente* de todas las esferas que son las *involutas*, y el contacto con cada una de ellas tiene lugar al largo de uno de los círculos BC, B'C'.... que son las *características* o las intersecciones de dos involutas consecutivas.

192. Si por un instante, no consideramos sino los círculos máximos de las esferas móviles que están situados en el plano vertical de la figura, veremos que cortándose entre sí sus circunferencias, forman una série de arcos BB',B'B".... cuya *línea envuelta* nos dará evidentemente el meridiano DBB'F de la superficie de revolucion. La forma de este meridiano dependerá de la ley segun la cual varien los radios OA,O'A',....; si, por ejemplo, todos estos radios fuesen *constantes* de magnitud, las características serian todas círculos máximos iguales entre sí, y el meridiano una recta paralela a OZ. Y así, *siempre que una esfera constante de radio, tenga su centro en movimiento sobre una recta, la envolvente* del espacio que recorre, *es un cilindro de revolucion.*

193. Por el contrario, cuando con anticipacion se nos da el meridiano DBF de una superficie de revolucion, es preciso evidentemente hacer que cada una de las involutas esféricas, sea tanjente a este meridiano, tomando por radios de estas diferentes esferas a las normales BO,B'O',....; y así podemos decir jeneralmente que *toda superficie de revolucion es la envolvente del espacio recorrido por una esfera móvil, que tiene por radio variable la porcion de cada normal comprehendida entre el meridiano y el eje.*

194. Las superficies de revolucion admiten tambien por involutas otra superficie jeneratriz cuya forma simple es causa de que
FIG. 55. su uso sea mui útil en ciertas artes. Figurémonos que habiendo tomado sobre el meridiano FDY los puntos M,M',M",.... mui próximos se le hayan tirado las tanjentes MT,M'T',M"T" y que se las haga jirar al mismo tiempo que al meridiano, alrededor del eje YZ. En virtud de esto; estas tanjentes enjendrarán conos rectos que tocarán a la

superficie de revolucion en toda la estension de un paralelo; porque como la tanjente MT tiene con el meridiano el elemento MM' comun: todos los elementos superficiales situados sobre la zona MM'N'N infinitamente estrecha, serán comunes al cono TMN y a la superficie jeneral: luego estas dos superficies serán tanjentes una a otra en toda la estension de esta zona. Ademas, dos conos consecutivos TMN y T'M'N' se cortarán evidentemente segun el paralelo M'N' que reune las dos zonas de contacto: de donde resulta que a toda superficie de revolucion puede tambien mirarse como *la envolvente (*) del espacio recorrido por un cono recto variable* TMN, *que se mueve de modo que su cúspide permanece sobre el eje, miéntras que su jeneneratriz rectilínea es constantemente tanjente a la meridiana.*

195. Por este medio de jeneracion es por el que los torneros ejecutan las superficies de revolucion. Con efecto, cuando presentan al sólido animado de una velocidad de rotacion, el corte rectilíneo del escoplo, producen sobre este sólido un tronco de cono que es una de las involutas de la superficie jeneral que quieren obtener: variando en seguida convenientemente la inclinacion del escoplo enjendrarán una série de zonas cónicas que saben en seguida arreglar unas a otras, intercalando nuevas involutas hasta tanto que llegan a una superficie que sensiblemente es continua.

Con el auxilio tambien de las envolventes es como los hojalateros ejecutan superficies desarrollables; porque hacen uso de un yunque cilíndrico o cónico, para doblar poco a poco la hoja de lata al largo de una série de rectas trazadas en su plano; y este se convierte entónces la involuta movil cuyas pequeñas zonas elementales componen la superficie jeneral, resultando así ser esta la envolvente de todas las posiciones que ha tomado el plano móvil de la hoja de metal.

196. Ademas de las involutas esféricas o cónicas que admiten las superficies de revolucion, pueden tambien producirse estas

---

(*) *Es preciso que no adjuntemos a la palabra* envolvente *la idea de contener a otras en su interior. La envolvente puede estar fuera o dentro de la involuta, y solo se quiere espresar que aquella toca a cada una de estas en toda la estension de una curba.*

por el movimiento de un cilindro. Con efecto, si por todos los puntos de la meridiana tiramos rectas perpendiculares a su plano y hacemos jirar este cilindro alrededor del eje, la envolvente de todas sus posiciones será necesariamente la misma superficie que produciria la rotacion de la meridiana; porque cada arista de este cilindro móvil, evidentemente tiene por curba envolvente de todas sus posiciones individuales al paralelo de la superficie que hubiera descrito el punto correspondiente de la meridiana.

Antes de pasar a tratar de una especie mui jeneral de superficies envolventes, que nos manifestará una circunstancia digna de observarse producida por las intersecciones de las características, estudiemos algunas propiedades de las *lineas envolventes* con relacion a las curbas planas.

FIG. 56. 197. Evolutas *de las curbas planas.* Sea ABX una curba cualquiera trazada en un plano; concibámosla dividida en los elementos iguales BB'=B'B"=B"B"'.... y por el medio de estos elementos, tiremos las normales infinitamente próximas MC,M'C',M"C",.... que, por medio de sus intersecciones subcesivas, formarán una curba CC'C".... a la que todas ellas serán tanjentes. A esta curba DCY, *envolvente de todas las normales* a la línea primitiva ABX, se llama *la involuta* de esta última; miéntras que la línea ABX recibe el nombre de *voluta* con respecto a la curba DCY; estas denominaciones se van a justificar por medio de la relacion siguiente.

El punto C en que se cortan las dos normales MC y M'C', levantadas en medio de los elementos iguales BB' y B'B", se hallan evidentemente a igual distancia de los tres puntos B,B',B"; por consiguiente C es el centro de un círculo que tendrá con la curba AX, *dos elementos comunes* BB' y B'B". Y como no se puede sujetar una circunferencia a que pase por mas de tres puntos, este es por consiguiente el que entre todos los otros círculos se apróxima mas a confundirse con la curba AX en la proximidad de B; y por esta razon se llama círculo *osculador* de esta línea respecto al punto B. En cuanto al radio de este círculo osculador, rigurosamente seria una de las tres líneas CB=CB'=CB"; pero les podemos sustituir CM=CM', porque estas diversas rectas son los radios de dos círculos circunscritos e inscritos al mismo poligono BB'B", y sabemos que

en el estado de límite, o respecto a elementos infinitamente pequeños, coinciden estas dos circunferencias (*). De aquí resulta que *el centro* C y *el radio* MC *del círculo osculador*, quedan determinados *por medio del encuentro de dos normales infinitamente próximas.*

198. A esta recta MC se le da tambien el nombre de *radio de curbatura* de la línea ABX en el punto M, porque su lonjitud mayor o menor indica una curbatura menos o mas pronunciada. Con efecto, si queremos adquirir una idea mas clara de la curbatura de una línea ABX, mirémosla como un poligono que se ha formado plegando subcesivamente una recta BB'*b*"*b*'".... de este modo, es evidente que la curbatura en el punto B' estará expresada por el desvio que se haya dado a los elementos B'*b*" y B'B", es decir por el *ángulo de continjencia* TB'T', o mas bien por el arco ε que mida a este ángulo en un círculo cuyo radio sea la unidad. Pero como el ángulo TB'T' es igual al ángulo MCM', y este comprehende un arco de curba MB'M' que se confunde con el círculo osculador descrito con el radio MC; síguese que el arco ε, semejante al MB'M', y descrito con un radio igual a la unidad, tendrá por valor a

$$\varepsilon = \frac{MB'M'}{MC} = \frac{BB'}{MC} = \frac{ds}{\rho}.$$

Pero como la curba ABX está dividida en elementos que todos son iguales entre sí, la cantidad *ds* será constante; y del valor pre-

---

(*) *Las lineas* CM *y* CM' *son iguales en atencion a que siendo en el caso presente los elementos* BB, *y* B'B" *de la misma lonjitud, serán iguales los triángulos rectángulos* CMB' *y* CM'B'. *Por otra parte el primero de estos triángulós nos da*

$$CM = \sqrt{CB'^2 - MB'^2} = CB' \left(1 - \frac{MB'^2}{CB'^2}\right)^{\frac{1}{2}};$$

y desarrollando esta espresion, veremos que cuando MB' *sea infinitamento pequeña, la diferencia entre* CM *y* CB' *no será otra cosa que un infinitamente pequeño* del segundo órden, *cuya cantidad debe despreciarse, a un comparada con la* MB'.

cedente resultará que *la curbatura* medida por ε, *variará* de un punto a otro de la línea ABX, *en razon inversa del radio* MC $= \rho$.

FIG. 56. 199. Si ahora doblamos un hilo flexible MCC'C"Y al largo de la evoluta, y despues de haber asegurado fijamente uno de los puntos del hilo, por ejemplo el punto Y, se da a la parte rectilínea CM una lonjitud tal que su estremo M termine en la voluta ABX, este estremo recorrerá exactamente la línea ABX, cuando subcesivamente desarrollemos el hilo manteniéndole siempre tirante. Con efecto, cuando el contacto del hilo con la evoluta haya pasado de C a C', la parte rectilínea del hilo MC = M'C habrá crecido la cantidad CC', y entónces tendrá por lonjitud total a M'C + CC' = M'C'; y por ser esta última línea (núm. 197) igual a M"C', síguese que la estremidad móvil M terminará precisamente en M". Esto mismo sucederá con todas las posiciones subcesivas del hilo, que segun vemos puede servir para describir la *voluta* con desarrollarle de encima de la *evoluta*; resulta ademas de aquí que *un arco cualquiera* CC'C" *de la evoluta, es igual a la diferencia de los dos radios de corbatura* MC y M"C" que terminan en los estremos de dicho arco.

Observemos ademas que a una curba determinada ABX no le corresponde nunca sino una sola evoluta, pero que la misma evoluta DCY pnede producir una infinidad de volutas, porque tomando en el hilo MCC'Y diferentes puntos M,*m*,.... estos describirán tambien las diferentes curbas MM'M"X, *mm'm"x*,.... que serán otras tantas volutas de la misma evoluta DCY. Todas estas volutas tendrán patentemente sus normales comunes y en la direccion de estas normales estarán todos sus puntos *equidistantes*; pero se diferenciarán mucho unas de otras, en cuanto a sus propiedades y equaciones.

200. Por citar algunos ejemplos simples de la teoría de las evolutas, diremos que si la curba ABX *(fig.* 56*)* fuese una parábola de segundo grado, su evoluta se compondria de dos ramas infinitas, tales como las DCY y DY', colocadas una encima y otra debajo del eje AD, que vendrian a reunirse formando un *retroceso* en el punto D. Este punto dista del vértice A, una cantidad AD = 2AF = al semiparámetro, y esta misma recta AD es tambien *el radio de curbatura* de la parábola respecto al vértice A.

En una elipse ABDE *(fig.* 76*)* cuyos semi-ejes son OA = *a*,OB=*b*

la evoluta es una curba $\alpha\beta\delta\varepsilon$ compuesta de cuatro ramas que presentan otros cuatro puntos de retroceso, colocados a las distancias

$$A\alpha = D\delta = \frac{b^2}{a}, \quad B\beta = E\varepsilon = \frac{a^2}{b};$$

estas son tambien las magnitudes de los *radios de curbatura* correspondientes a los vértices A y B; porque las dos ramas $\alpha\beta$ y $\beta\delta$ sirven para describir la semi-elipse ABD, y las otras dos $\alpha\varepsilon$ y $\varepsilon\delta$ se refieren a la porcion inferior AED.

En un círculo, la evoluta se reduce a un solo punto, que es el centro, y el radio de curbatura es constantemente igual al mismo radio del círculo dado.

201. Pero, para obtener resultados mas interesantes en las aplicaciones que vamos a hacer a las superficies envolventes, concederemos que en el caso presente se nos ha dado inmediatamente una evoluta circular YDFE, y que de ella hemos deducido la voluta YO"O'OX, con desarrollar un hilo que estaba doblado sobre el círculo, y cuyo estremo móvil, ha coincidido en un principio con el punto Y. Para trazar gráficamente esta curba, dividiremos la circunferencia en partes iguales, por ejemplo en *doce*; y tomando en seguida sobre las tanjentes FO,F'O',F"O",.... lonjitudes iguales a $\frac{6}{12}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{4}{12}$,.... de esta circunferencia, obtendremos (núm. 199) los diversos puntos O,O',O",.... que uniremos despues por medio de un trazo continuo. Esto será tanto mas fácil, cuanto que para ello podremos emplear arcos pequeños de círculos descritos con los radios FO,F'O'F"O",.... porque estas distancias son precisamente (núm. 197) los radios de los *círculos osculadores* de la curba XOY. FIG. 54.

Esta voluta XOY será una espiral indefinida, que tendrá por orijen al punto Y; y tambien podremos mirar a la espiral Y*o"cx*, simétrica con la precedente, como que es otra segunda rama de la misma voluta, y como que no forma con la primera sino una sola curba cuyas partes todas están descritas *por el movimiento continuo* de un punto único. Con efecto, si en lugar de un hilo envuelto en la evoluta, concebimos una recta inflexible e indefinida ABF*ab* que permaneciendo tanjente al círculo CY, ruede, *sin resbalar*, sobre esta circunferencia, es claro que un punto O, fijo sobre esta recta, vendrá

a colocarse subcesivamante en O',O" e Y; si en seguida continua la rotacion de la recta en el mismo sentido, este punto O se hallará desde luego detras del punto de contacto y describirá sin descontinuidad la rama *Yox*. Fuera de esto, debemos apercibir que este modo de describir una voluta, sea cual fuere, por medio de la rotacion de una recta inflexible que se mueve sobre la evoluta, equivale a la jeneracion indicada núm. 199; pero el modo actual es mas jeneral, y aun llega á ser necesario cuando la evoluta presenta puntos de retroceso, como sucede en la elipse, parábola,.... porque de otro modo, seria preciso cambiar a menudo el punto de aderencia del hilo, para trasportarlo de una rama a otra.

FIG. 54 202. SUPERFICIES CANALES. Sentado todo esto, figurémonos que una esfera de un *radio constante*, representado por OA=OB, se mueve de modo que su centro siga la curba horizontal XOY*ox*; el involucro de todas las posiciones de esta esfera móvil estará formado (núm. 190) por las intersecciones involutas consecutivas; y así, examinemos lo que en el caso presente son estas intersecciones. Respecto a dos posiciones próximas O y O' del centro móvil, las dos esferas iguales se cortarán segun un círculo menor, cuyo plano será evidentemente perpendicular en medio de la recta OO' que une sus centros; por consigniente este círculo menor estará proyectado en el plano del depurado que presentamos, que es borizontal, segun una recta perpendicular a la cuerda OO', y pasará por medio de ella. Pero a medida que el centro O' se apróxima a O, la cuerda OO' prolongada indefinidamente, se apróximará tambien, cada vez mas, a la tanjente a la curba XOY, y coincidirá con esta tanjente en el estado de límite: luego, respecto a dos esferas infinitamente próximas, la curba de interseccion es *un círculo máximo proyectado sobre la normal* AOB de la directriz XOY. De aquí se sigue que, el involucro puede mirarse como enjendrado por el círculo máximo vertical AOB, cuyo centro recorre a la línea XOY en tanto que su plano permanece normal a esta línea; y así este involucro presentará la forma de un *canal curbilíneo*, que tendrá por eje a la la curba directriz XOY, y cuyas secciones normales a este eje, serán todas círculos de un radio constante.

203. Es evidente que, continuarán teniendo lugar estas consecuencias, sea cual fuere la línea XOY: es decir que, si adoptamos sub-

cesivamente diferentes curbas por directrices del centro de la esfera móvil, obtendremos involucros de formar mui variadas, pero que cada uno de ellos tendrá por seccion normal un círculo de un radio OA. Y así es que, este círculo se convierte en *una jeneratriz de forma invariable, comun a todas las superficies que envuelven el espacio recorrido por una esfera de un radio constante*; esto imprime a toda esta *familia* de envolventes, un carácter distintivo e independiente de la naturaleza de la directriz XOY; y esta es la razon porque MONGE ha dado el nombre de *característica* a este círculo máximo normal; y jeneralmente llama así, a la interseccion de dos involutas consecutivas, en *cada familia* de involucros enjendrados por una misma superficie móvil, sea cual fuere la ley del movimiento de esta última superficie.

204. Hemos dicho (núm. 190) que la envolvente *tocaria* precisamente a cada una de las involutas particulares en toda la estension de la característica, que en el caso presente es el círculo máximo vertical y móvil, AOB. Con efecto, tres posiciones infinitamente próximas, S,S',S'', de la esfera móvil, se cortarán segun dos círculos situados ámbos sobre la esfera S' y comprehenderán en ella una zona infinitamente angosta, de anchura desigual, pero que será comun a S' y a la envolvente, de modo que teniendo estas dos últimas superficies los mismos elementos superficiales, o los mismos planos tanjentes en toda la estension de esta zona, serán tambien tanjentes una a otra en esta rejion comun, que ademas comprehenderá ácia su medio, a la verdadera caraterística o al círculo máximo normal a la curba XOY. Y asi, podremos decir con verdad que tiene lugar el contacto en toda la estension de esta característica.

205. Ahora, comparemos entresí las diversas características que en el caso presente están proyectadas sobre AOB,A'O'B',.... y para que resalten mas las circunstancias bastante delicadas de sus intersecciones, imitimos el procedimiento indicado ácia el fin del núm. 201 para describir las volutas: es decir, figurémonos que el plano vertical AOBF de la característica es *inflexible* e indefinidamente prolongado; en seguida, hagásmole rodar, *sin resbalar*, sobre el cilindro vertical FDYE al cual permanecerá tanjente; en este caso, el círculo AOB, arrastrado con el plano móvil, necesariamente recorrerá la envolven- FIG. 54.

te de que tratamos, supuesto que las condiciones precedentes se reducen evidentemente a decir que el centro de este círculo se moverá sobre la voluta XOY, en tanto que su plano permanecerá normal a esta curba. Ademas, todos los puntos de esta circunferencia móvil, que están proyectados en B,R,....A, describirán otras espirales BD, RL,....AA'E, que serán otras tantas volutas del círculo FDY, entre las cuales la primera y la última formarán el contorno aparente del involucro.

206. Sentado esto, miéntras que por la rotacion del plano vertical AF sobre el cilindro FDY, no haya llegado la estremidad B del círculo móvil a encontrar a la evoluta, no se cortarán dos características consecutivas; porque sabemos (núm. 197) que una normal cualquiera A'F' a la curba XOY, no podrá ser encontrada por la normal infinitamente próxima, sino en el punto F' situado sobre la evoluta, y este punto se halla fuera del diámetro A'B' que limita la proyeccion de la característica. Pero tan pronto como B haya tocado al cilindro en D, principiarán a cortarse las carácterísticas consecutivas; con efecto, la normal GL*g*, por ejemplo, encontrará a la normal infinitamente próxima en el punto L situado sobre la evoluta; y como este punto se halla dentro del diámetro G*g* = AB, resulta de aquí que las dos características proyectadas sobre G*g* y sobre la normal infinitamente próxima, se cortarán en dos puntos proyectados en L y situados uno encima y otro debajo del plano horizontal del depurado. Sin embargo, para justificar completamente esta asercion, es preciso agregar que estas dos características están colocadas (núm. 204) sobre una misma posicion de la esfera móvil; de lo contrario, los planos de estos dos círculos podrian mui bien cortarse segun la vertical L, sin que sus circunferencias tuviesen puntos comunes.

De aquí resulta que partiendo de la posicion DI, las diversas características circulares están cada una divididas por sus intersecciones consecutivas, en dos segmentos que están proyectados.

sobre LG, MH, YP, VQ, UT, (N),
y sobre L*g*, M*h*, Y*p* V*g* U*t* (*n*).

Los segmentos de la primera série formarán una napa que designaremos por (N), a la cual pertenecerán las características totales AB,

A'B',.... miéntras que los segmentos de la otra série darán lugar a otra segunda napa (n), que principiará por quedar encerrada en el interior de la primera, pero que saldrá mui pronto de ella para estenderse indefinidamente hasta las cárácterísticas totales $a'b'$,ab,.... Ademas, estas dos napas del involucro se reunirán una a otra formando una línea de doble curbatura que se proyectará sobre DLMYVUE, y que no es otra cosa que el círculo vertical AB, cuyo plano estaba plegado y enrollado sobre el cilindro de la evoluta.

207. Observemos ademas que esta línea de doble curbatura DYE, FIG. 54. es una verdadera *arista de retroceso* respecto al involucro total. Porque, recordando (núm. 205) que un punto cualquiera Z de la carácterística móvil, describe las dos ramas $Z\alpha\beta M$ y $M\gamma\delta z$ de una espiral cuyo retroceso está en M, debemos percibir que, cuando el punto móvil Z está en α o en β, todavia se halla sobre la napa (N) colocada mas allá de los puntos de contacto D o L; pero tan pronto como este punto llega a γ o a δ, dicho punto pertenece a la napa (n) colocado mas acá de los puntos de contacto Y o V; por consiguiente el paso de este punto móvil de una napa a otra, tiene lugar próximamente en M, y la forma de la espiral en este sitio, prueba mui bien que este paso se efectua por un verdadero retroceso. Como esto mismo diríamos de los demas puntos de la carácterística AB, debemos concluir de aquí que la curba proyectada sobre DMYE es una línea de retroceso para las dos ramas del involucro.

Una circunstancia análoga se reproduce en todos los involucros, sea cual fuere la superficie móvil que los enjendre; y esta es la razon porque MONGE ha dado el nombre jeneral de *arista de retroceso* de un involucro, *a la línea formada por las intersecciones consecutivas de las diversas carácterísticas:* hemos hallado ya un ejemplo notable de esto (núm. 178) en las superficies desarrollables en que las carácterísticas eran líneas rectas (núm. 190).

208. Volvamos a la envolvente particular que nos ocupaba, y observemos que los segmentos de carácterísticas Lg, Mh,....; que pertenecian a la napa (n) deben ser puntuados, porque son invisibles como que están encerrados en el interior de la napa (N). Con efecto, tenemos que

$$L\beta = LM < L\varepsilon + \varepsilon M;$$

de donde restando la parte comun $L\varepsilon$, nos queda que

$$\varepsilon\beta < \varepsilon M;$$

por consiguiente, si volvemos a colocar sobre el círculo AOB los dos puntos proyectados en ε que pertenecen el uno al segmento LG y el otro al M*h*, el primero vendrá a ocupar una posicion ε' mas próxima al punto Z y por consiguiente al punto O, que lo que está la posicion ε'' en que viene a colocarse el segundo; luego el punto ε' está mas elevado que ε'' y por consiguiente el segmento LG pasa por encima del segmento M*h*. Valiéndonos de consideraciones análogas, esplicaremos los diversos modos de puntuacion que se han empleado en el depurado; sin embargo, haremos todavia observar que hallándose los puntos R y ρ, Z y ζ,.... del círculo móvil AOB, respectivamente a la misma altura, describirán espirales que se encontrarán de dos en dos; de modo que las dos napas (N) y (*n*) del involucro, se atravesarán mutuamente segun una línea de interseccion proyectada sobre la recta YW.

Las superficies que hemos examinado en este capítulo, y sobre todo la última que acabamos de discutir en detalle, porque presenta en sí misma circunstancias interesantes, bastarán sin duda para dar al lector una idea suficientemente completa de los involucros y sus particularidades; fundados en esta razon vamos a pasar al problema importante de las intersecciones de las superficies.

LIBRO IV.

INETRSECCIONES DE SUPERFICIES.

CAPITULO PRIMERO.

Principios jenerales.

209. Para dar una idea jeneral de los métodos por donde llegamos a determinar la interseccion de dos superficies, supongamos que en primer lugar se trata de un caso mui simple, cual es el de una superficie S cortada por un plano dado horizontal. Supuesto que consideramos a la superficie conocida y definida, conoceremos tambien la forma de la jeneratriz (núm. 70) y la ley que sigue en su variacion; por consiguiente, podemos construir sobre los dos planos de proyeccion, varias posiciones de esta jeneratriz y en tanto número y tan próximas unas a otras cuanto queremos. Representemos las proyecciones de estas líneas por (G,G'), (G_2,G_2'), (G_3,G_3')..... y observemos en seguida que el plano secante P, que es perpendicular al plano vertical, corta a la línea (G,G') en un punto que debe proyectarse verticalmente en el punto de encuentro de G' con la traza del plano P; por consiguiente, si referimos este a la línea G por medio de una perpendicular a la línea de tierra, obtendremos la proyeccion orizontal *m* de un punto de la interseccion de S con P. Repitiendo la misma operacion en cada jeneratriz, hallaremos una série de puntos m,m_2,m_3,m_4....; y si están bastante próximos unos de otros, los

podremos reunir fácilmente por medio de *una línea continua* (*) que nos dará a conocer, sobre el plano horizontal, la curba segun la que el plano P corta a la superficie S. En cuanto a la proyeccion vertical de esta misma curba, es evidente que, en el caso actual, se reduce a la traza misma del plano secante.

210. Consideremos ahora dos superficies cualesquiera S y S' y para hallar su interseccion, cortémoslas con una série de planos horizontales $P, P_2, P_3, \ldots$. Cada uno de estos planos auxiliares, el P por ejemplo, cortará a la supuerficie S segun una línea $mm_2m_3\ldots$ y a la superficie S' segun otra línea $m'm'_2m'_3\ldots$; estas dos líneas se construirán segun lo hemos dicho en el número precedente, y si estas mismas líneas se cortan eutre sí sobre el plano orzontal en uno o mas puntos M,N.... estos serán, evidentemente, las proyecciones horizontales de los diversos puntos que *son comunes a las superficies* S y S', y que por lo tanto pertenecen a la interseceion. En cuanto a las proyecciones verticales, las deduciremos de estas refiriendo a la traza del plano auxiliar P, los puntos M,N.... por medio de perpendiculares a la línea de tierra. Si ahora repetimos operaciones semejantes respecto a los otros planos $P_2, P_3\ldots$; obtendremos en cada plano de proyeccion, una série de puutos tales como $M, M_2, M_3\ldots$ $N, N_2 N_3\ldots$ que será preciso reunir por medio de una línea continua, teniendo

---

(*) *No hai duda ninguna que se necesita ejercicio para reunir por medio los puntos situados a alguna distancia de una línea que no forme ondulaciones ni varie rápidamente de curbatura; debemos pues trabajar a fin de acostumbrar el ojo y la mano a esta clase de construcciones ejecutándolas continuamente, con el fin de adquirir el sentimiento de continuidad en las curbas, pues que la construccion de las intersecciones de las superficies es uno de los problemas mas útiles, ya se considere como medio de indagacion, o ya en las aplicaciones prácticas de la jeometrìa descriptiva a la perspectiva, al corte de piedras, a la carpintería, &c. Sin embargo, debemos hacer observar que, no siempre es ventajoso el multiplicar con exceso las construcciones auxiliares que sirven para determinar los diversos puntos* $m, m_2, m_3\ldots$ *porque los pequeños errores, inseparables de toda operacion manual, afectan a los puntos que se hallan mui próximos, y producen las sinuosidades,*

cuidado siempre de distinguir los puntos que pertenecen a una de las ramas de la curba, de los que pertecen a otra. Esta distincion es algunas veces bastante delicada; pero llegaremos a conseguirlo, siguiendo con atencion y subcesivamente, los resultados que nos den los planos auxiliares consecutivos. Ademas, si una de las superfidies S o S' tuviese dos napas distintas, como sucede en un cono, será preciso que no reunamos los puntos que estén colocados en napas opuestas.

211. El método que acabamos de esponer es jeneral y suficiente para obtener en todos casos las intersecciones de dos superficies cualquiera S y S'; pero podemos ademas dar a los planos secantes P, P^2, P^3.... la direccion que queramos, con tal que sepamos construir comodamente las curbas ausiliares mm_2.... y $m'm'_2$.... Así es que, en cada problema, será ventajoso elejir los planos secantes, de modo que las secciones ausiliares sean, si es posible, líneas *rectos* o *círculos*, porque estas líneas se trazan fácilmente por medio de dos datos. Si, por ejemplo, se trata de dos cílindros, elejirémos los planos P, P_2,... paralelos a un mismo tiem-

---

u otros defectos chocantes, que no hubieran sido sensibles a mayor distancia. Es preciso pues, repetir estas construcciones con tino, consultando siempre los buenos modelos, y multiplicarlas mas en aquellas partes en que la curba parece presentar alguna forma singular que necesitemos verificar. Debemos tambien aprovecharnos de las nociones que podamos con anticipacion tener respecto a la naturaleza de la interseccion que buscamos; si, por ejemplo, supiésemos que la proyeccion debe ser una curba de segundo o de cuarto grado, no deberá existir ningun arco que pueda ser cortado por una recta cualquiera, en mas de dos o cuatro puntos; y si sucediese lo contrario, seria preciso rehacer las construcciones relativas a estas partes, para rectificarlas. La determinacion de las tanjentes, que tambien enseñarémos a ejecutar, es asi mismo un medio de correjir la forma de una curba, porque el conocimiento de esta recta, nos hará fácilmente sentir si el arco que precede o sigue al punto de tanjencia, debe elevarse o bajarse para que sea el contacto completo. Finalmente, los preceptos jenerales sobre esta materia no son suficientes, y es preciso llamar en su ayuda, en cierto número de ejemplos bien elejidos, los consejos de un práctico hábil.

po a las jeneratrices de las dos superficies; si de dos conos, haremos pasar todos los planos secantes por la recta que une las dos cúspides. Tambien se emplean algunas veces para cortar las superficies S y S', no planos, sino superficies curbas, tales como esferas concéntricas, que en en este caso nos pueden dar círculos por secciones ausiliares en las dos superficies propuestas.

212. Despues de haber construido las dos proyecciones de la interseccion pedida, esta curba queda realmente determinada; pero si es *plana*, es preciso, ademas, para manifestar mas claramente su forma, ejecutar el *abatimiento* sobre uno de los planos de proyeccion. Cuando una de las dos superficies es *desarrollable*, debemos tambien ejecutar el desarrollo de esta superficie, y construir la *transformada* (núm. 175) de la interseccion : porque es necesario conocer esta nueva curba en las aplicaciones de la estereometría. Finalmente, como la determinacion de las tanjentes a una curba es un medio para dibujar con mas exactitud el curso de esta línea, y ademas este conocimiento es útil en diversos casos; será preciso ejercitarnos en su su determinacion, tanto en la interseccion primitiva, cuanto en su abatimiento y transformada; pero como las tanjentes a estas dos últimas curbas, se deducen siemprc fácilmente de la tanjente a la primera, nos limitarémos a dar respecto a esta un método jeneral.

213. Representemos las superficies propuestas por S y S', y sea AMC su interseccion, cuya *tanjente* es preciso hallar.

FIG 57 Como esta curba está situada a un mismo tiempo sobre las dos superficies, su tanjente MT en un punto cualquiera M, debe hallarse al mismo tiempo (núm. 95) en el plano que toca a la superficie S en M, y en el que toca a S' en el mismo punto : luego *la tanjente* MT *será la interseccion de los planos tanjentes a las dos superficies*. Por consiguiente, bastará conocer estos dos planos por los métodos espuestos anteriormente, y determinar la recta segun la cual se cortarán : podremos tambien limitarnos a hallar solo un punto de esta recta, por estar ya señalado el punto M por la cuestion.

Cuando una de las superficies propuestas, la S por ejemplo, es un plano, o sino cuando sepamos que la curba AMB es plana, aun cuando las dos superficies cuya interseccion es, sean curbas; veremos patentemente que la regla precedente se reducirá a hallar la in-

terseccion del único plano tanjente de S con el plano S', o con el plano AMB.

214. *Otro método.* Si construimos la normal MN de la superficie S respecto al punto M, y la normal MN' de la superficie S' respecto al mismo punto, es evidente que el plano NMN' de estas dos rectas, será perpendicular a cada uno de los planos tanjentes, y por consiguiente lo será tambien a su comun interseccion que es MT. Y así, *la tanjente a la interseccion de dos superficies es una recta perpendicular al plano de las dos normales* a estas superficies: ademas, este plano coincide con el *plano normal* (núm. 168) de la curba AMB. Por consiguiente, bastará construir estas dos normales y el plano que estas determinan, y en seguida tirarle una perpendicular por el punto dado M. Este método (*) es mui precioso, 1.° porque hai superficies en que la normal se determina de un modo mucho mas simple que el plano tanjente, e independiente de este (núm. 136): 2.° porque algunas veces se hallan puntos singulares, respecto a los cuales los dos planos tanjentes son perpendiculares a un mismo plano de proyeccion, en cuyo caso el procedimiento del núm. 213 no nos da resultado determinado respecto a la tanjente de la curba proyectada sobre este plano, miéntras que el método de las dos normales puede aun aplicarse, a causa de ciertas relaciones que, en el límite, no son indeterminadas. Veremos ejemplos de esto en muchos depurados de jeometría (núm. 340, 488) y de corte de piedras.

215. Cuando las superficies en cuestion están colocadas de modo que se *toquen* a lo largo de la línea que les es comun, esta interseccion particular toma el nombre de *línea de contacto,* y en este caso decimos que una de las superficies está *circunscrita* a la otra; siempre podremos construir esta curba sirviéndonos del proceder jeneral del núm. 210, pero no sabremos tirarle una tanjente, porque segun la hipótesis actual, los dos planos tanjentes cuya interseccion fuese esta recta, estarian confundidos uno con otro. La misma indeterminacion resultaria del método de las dos normales; porque estas rectas coincidirian entre sí al mismo tiem-

---

(*) *Debemos este método a M. J. Binet, quien ha hecho aplicaciones interesantes de él a diversos depurados de jeometría y de corte de piedras.*

po que los planos tanjentes, y el plano normal para cuya fijeza debian servir, quedará aun indeterminado. Y así, para las líneas de contacto de dos superficies, no da la geometría método gráfico propio para hallar sus tanjentes (*), a no ser que la línea de contacto sea plana; porque en este caso, la combinacion de su plano con el plano tanjente comun a las dos superficies, no daria a conocer la tanjente que buscábamos.

216. Despues de haber espuesto estas nociones jenerales sobre las intersecciones de las superficies, vamos a aclararlas resolviendo varios problemas de este jénero, en los que ademas hallarémos ocasion de esplicar algunas particularidades notables, tales como la indagacion de las *ramas infinitas* y las de las *asymtotas*, de las cuales no podemos hablar ahora sino de un modo vago y obscuro.

CAPITULO II.

De las secciones planas.

PROBLEMA I. *Hallar* 1.° *la interseccion de un cilindro recto y de un plano dados*; 2.° *el abatimiento de esta interseccion y su tanjente*: 3.° *el desarrollo del cilindro, y la transforma de la interseccion con su tanjente.*

FIG. 58. 217. Ya hemos dicho (núm. 160) que por *cilindro recto* entendemos un cilindro que tiene por base o por directriz a una curba plana perpendicular a las jeneratrices rectilíneas de esta superficie, sin exijir que esta base sea un círculo; así es que adoptando en el caso presente esta

(*) *Sin embargo, indicaremos en el núm.* 584 *un método propio para conseguir este objeto, pero mui complicado para ser verdaderamente útil en la práctica, y solo notable bajo el punto de vista de teoría que con su ausilio quedara completa.*

última forma por ejemplo, raciocinarémos de un modo jeneral y aplicable a cualquiera otra curba. Ademas, como en cada problema conviene elejir los planos de proyeccion, en direcciones acomodadas a la simplificacion de las operaciones gráficas, adoptarémos el plano de la base ABDC por plano horizontal, y el plano vertical lo elejirémos de modo que sea perpendicular al plano secante, dicho plano vertical tendrá, segun esto, por trazas a PQ y QR'. En cuanto al cilindro, estará representado por curba ABDC que es el contorno aparente sobre el plano horizontal; y sobre el plano vertical, el contorno aparente estará formado por las dos rectas GG' y VV', que manifiestamente son las trazas de dos planos tanjentes perpendiculares a este plano de proyeccion (núm. 106). Supondrémos ademas que el cilindro está terminado en los dos planos horizontales GV y G'V'.

218. Esto supuesto, el plano PQR' cortará al cilindro vertical segun una curba que, segun la actual posicion de los planos de proyeccion, estará evidentemente proyectada segun ABDC sobre el plano horizontal, y sobre el plano vertical segun la porcion A'D' de la traza del plano secante. Y así es que, en el sencillo caso que nos ocupa, *las proyecciones* de la interseccion *nos serán inmediatamente conocidas*, y por consiguiente, no habrá necesidad de emplear el método jeneral espuesto en el núm. 210.

219. *Abatimiento.* Para conocer la verdadera forma de la interseccion, abatamos el plano que la contiene, sobre el plano horizontal, haciéndole jirar al rededor de PQ; o mas bien, para obtener un resultado dispuesto simétricamente, hagamos jirar el plano PQR' al rededor de la recta (BC, B'), hasta que llegue a ser paralelo al plano horizontal. Por medio de esta revolucion, tendrémos que la traza vertical QR' se convertirá en la horizontal *q*'B', y un punto cualquiera de la curba, el (M, M'), por ejemplo, describirá un arco de círculo *perpendicular al eje de rotacion*; por consiguiente, este arco estará proyectado verticalmente sobre un arco igual M'*m*' descrito desde el centro B', y horizontalmente sobre la recta indefinida MF paralela a la línea de tierra. En cuyo caso tendremos que, supuesto que el punto M' se ha transladado a *m*', si proyectamos este último a *m* sobre MF, conoceremos la posicion (*m*, *m*') que toma el punto (M, M') de la curba propuesta, despues del abatimiento. Operando del mismo modo con todos los demas puntos,

tales como A, E, D, F... (*), veremos que estos se abaten en *a, d, e, f*.... y reuniendo estos últimos por medio de un trazo contínuo, hallaremos que la línea *am*B*d*C*ua* representará la interseccion que buscamos en sus verdaderas dimensiones.

220. Esta interseccion es, en el caso presente, una elipse, porque comparándola con el círculo ABDC, vemos que para las mismas abscisas contadas sobre la reeta BC, han aumentado todas las ordenadas perpendiculares a esta línea, en la razon constante de OA a B'A'; y sabemos que una modificacion de esta naturaleza cambia a un círculo en una elipse. Ademas, como existian dos puntos M y N de la curba primitiva, que ámbos tenian a M' por proyeccion vertical, y estos dos puntos se han trasladado a una cuerda *mn*, que evidentemente es perpendicular a O*a*, y cuyo medio se halla sobre esta recta, síguese de aquí que la línea *a*O*d* divide en dos partes iguales, y formando ángulo recto, en la curba abatida, a una serie de cuerdas paralelas: luego *a*O*d* es un eje de la elipse, y por consiguiente BOC es el otro.

221. Determinemos ahora la tanjente de la interseccion en un punto cualquiera (M, M'). Segun la regla jeneral (núm. 213), como esta recta debe estar situada a un mismo tiempo en el plano PQR' y en el plano tanjente al cilindro que es el plano vertical MT, resulta inmediatamente de aquí que dicha tanjente tiene por proyecciones a MT y M'Q. Si en seguida queremos hallar esta tanjente en el abatimiento de la interseccion, observaremos que el pie (T, Q) de esta recta describe, como lo hemos esplicado respecto al punto (M, M'), un arco de círculo perpendicular a la charnela (BC, B'); de modo que el pie de la tanjente se trasladará a *t*, y como el punto de contacto a venido a parar a *m*, es por consiguiente *tm* la tanjente abatida. Esta recta deberá *tocar* exactamente a la curba *am*B*d*.

Podemos observar aun que la tanjente TMS de la interseccion primitiva encontraba a la charnela en un punto (S, B'). cuyo punto debe

(*) *Aun cuando en el caso actual, podemos tomar estos puntos arbitrariamente sobre la base ABDC, es no obstante mui bueno el que para las ulteriores operaciones del* desarrollo, *los elijamos todos de modo que dividan á la circunferencia en partes iguales.*

permanecer *inmóvil* en todo el movimiento de rotacion, y en conformidad con esto, es preciso que la recta *tm*, ya determinada, pase precisamente por el punto S.

222. *Desarrollo.* Hemos visto (núm. 161) que cuando se desarrolla un cilindro, la *seccion recta*, que en el caso presente es la base ABDC, es rectilínea, sin cambiar de lonjitud absoluta; y que las aristas permanecen siéndole siempre perpendiculares. En virtud de esto, si suponemos que se abre el cilindro a lo largo de la arista (D, VV'), y si sobre una recta indefinida, tomamos las lonjitudes Fig. 58.

$$D''E''=DE,\ E''F''=EF,\ F''B''=FB,\ B''M''=BM.... (*),$$

y por los puntos D'', E'', F'',.... levantamos perpendiculares iguales a la altura VV' del cilindro, hallarémos, por desarrollo de esta superficie, el rectángulo D''V''D'''V'''. Hecho esto, traslademos a este rectángulo los puntos de la interseccion; y para el efecto, recordemos (núm. 162) que las porciones de jeneratrices del cilindro, comprendidas desde la base hasta esta curba, deben, despues del desarrollo, conservar sus lonjitudes primitivas. Por consiguiente, si colocamos sobre las verticales del desarrollo, las distancias

$$D''\delta=VD',\ E''\varepsilon=KE',\ F''\varphi=IF',....$$

y en seguida reunimos, por medio de un trazo contínuo, los estremos de

---

(*) *Observemos en este lugar, que cuando la curba ABDC es cualquiera, es preciso que para rectificar los arcos DE, EF,.... los midamos, empleando para ello una abertura de compas que represente una cuerda tan pequeña que se confunda sensiblemente con el arco parcial que subtende, en seguida trasladarémos sobre la recta indefinida D''D''' el mismo número de veces esta abertura de compas. Pero cuando se trata de un círculo, como sucede en el ejemplo actual, es mucho mas cómodo, y sobre todo mas exacto, tomar inmediatamente la recta D''D''' igual a los* $\frac{22}{7}$ *del diámetro AD, y dividir en seguida esta recta en tantas partes iguales cuantas contenga la circunferencia. Esto ademas supone que los puntos de division de la base del cilindro se han elejido a distancias iguales, como lo hemos recomendado en la nota del núm.* 219.

estas alturas, hallaremos que la *transformada* de la interseccion, es la curba $\delta\varepsilon\varphi\beta\mu\alpha\delta'$.

223. En el ejemplo presente, en que la base del cilindro recto es un círculo, la transformada se compondrá de dos partes evidentemente simétricas $\alpha\delta$ y $\alpha\delta'$; porque los dos arcos iguales AM y AN, que corresponden a dos puntos de la seccion proyectada en M', nos darán en el desarrollo, abscisas y ordenadas respectivamente iguales; a saber:

$$A''M''=A''N'' \text{ y } M''\mu=N''\nu.$$

Por otra parte, cada una de estas porciones, por ejemplo $\alpha\delta$, estará tambien compuesta de dos porciones iguales $\beta\alpha$ y $\beta\delta$, pero colocadas de un modo inverso respecto a la horizontal $\omega\beta$: esto resulta de que partiendo de β, los puntos φ y μ, ε y λ, provienen de los puntos del cilindro F' y M', E' y L', que se hallan a alturas respectivamente iguales encima y debajo del punto B'. Ademas, la trasformada total no es sino una porcion de curba indefinida (*), que segun la relacion existente entre estas coordenadas, admite una infinidad de ramas sucesivas e idénticas con $\delta'\alpha\delta$. Podemos tambien, por medio de la jeometría, producir estas diversas ramas, imajinándonos que el plano sobre que se ejecuta el desarrollo del cilindro, se ha enrollado a este cuerpo un número inde-

---

(*) *Esta curba es una* sinusoide; *porque, si se llama* x *a la abscisa horizontal e* y *a la ordenada vertical del punto* φ, *contadas desde el punto* β *como oríjen, y en seguida espresamos por* $x'=B'U$ *e* $y'=F'U$, *las coordenadas del punto análogo* F' *con respecto al punto* B', *es evidente que tendremos las relaciones*

$$y'=y,\ x'=sen\ BF=sen\ B''F''=sen\ x,\ y'=ax'.$$

representando por a *la tanjente trigonométrica del ángulo* $R'B'd'$. *Y así, eliminidando de aquí los variables ausiliares* x', y', *nos resultará por equacion de la transformada referida al oríjen* β,

$$y=a\ sen\ x;\ o\ bien\ y=aR\ sen\ \frac{x}{R},$$

contando, segun se estila en el análisis, los senos en el círculo cuyo rayo es la unidad, y representando por R *el radio del cilindro de que tratamos.*

finido de veces, y habíamos repetido tambien las construcciones anteriores sobre la prolongacion de la recta D'''D''.

224. Construyamos ahora la tanjente de la transformada $\delta'\alpha\delta$ en un punto cualquiera μ. Sabemos (núm. 162,3.°) que esta recta es la posicion que, despues de desarrollado el cilindro, toma la tanjente (MT, M'Q) de la curba primitiva; y que ademas, el ángulo que esta tanjente forma con la arista del cilindro, permanece *invariable*. De aquí se sigue que el triángulo rectángulo formado por esta tanjente, la vertical (M, M'H), y la *subtanjente* MT, permanece tambien invariable de forma, y no hace mas que jirar al rededor de esta vertical para aplicarse sobre el plano del desarrollo; es por consiguiente suficiente que reproduzcamos aquí este triángulo en sus verdaderas dimensiones. Pero como tenemos ya la altnra μM'' = M'H, si tomamos a M''T'' igual a la subtanjente MT, la hipotenusa T''μ será la direccion de la tanjente que buscamos.

Podríamos tambien emplear un triángulo rectángulo, opuesto por el vertice al precedente, y que tuviese por lados a la vertical (M, M'h) y a la horizontal (MS, hB'). Este triángulo permaneceria tambien de forma invariable, y bastaria tomar a $\mu\omega$=M'h, y tirar la horizontal $\omega\beta$S''=MS; en cuyo caso uniendo los puntos S'' y μ, obtendremos una recta que deberá hallarse en la prolongacion de T''μ.

225. Es importante notar que en los dos puntos (A, A') y (D, D') de la interseccion del cilindro con el plano PQR', es la tanjente a esta curba paralela a la traza PQ, supuesto que el mismo plan tanjente del cilindro en A o en D es paralelo a esta traza. De aquí resulta que en cada uno de estos puntos, la tanjente de la seccion forma un ángulo recto con la arista del cilindro; y como este ángulo debe permanecer invariable (núm. 162, 3.°) en el desarrollo de la superficie, será preciso que en los puntos α, δ, δ', *corte* tambien la transformada, *formando ángulos rectos*, a las verticales A''α, D''δ, D'''δ'.

226. Finalmente observemos que en el punto β de la trasformada, hai una *inflexion*; es decir que si construimos, como lo hemos hecho anteriormente, la tanjente en este punto, esta línea atravesará a la curba, dejando el arco $\beta\alpha$ encima de ella, y al $\beta\delta$ debajo. Esto no obstante, no debemos mirarla como una secante, porque bien al contrario tiene en este punto *singular* un contacto mas íntimo con la curba que el de una tanjente ordinaria. Con efecto, segun la simetría que hemos

probado existir (núm. 223) entre las dos partes $\beta\alpha$ y $\beta\delta$, si tiramos por el punto β una recta cualquiera que encuentre al arco inferior en μ, esta misma línea necesariamente cortará al arco superior en otro punto , que estará a la misma distancia de β que la que está μ; haciendo en seguida jirar esta secante al rededor del punto β, los dos punto μ y φ se aproximarán simultáneamente a β; y cuando μ llegue a confundirse con β, tambien φ lo habrá verificado, y en el mismo instante. En lo cual vemos que la posicion límite de esta secante quedará determinada, no por la reunion de dos puntos de seccion, sino por la de tres puntos de este jénero, y así esta tanjente particular nos presentará *un contacto de segundo órden*, en virtud del cual tendrá un elemento comun con el arco $\beta\alpha$, y tambien otro con el arco $\beta\delta$. Ademas, estos dos arcos se hallarán manifiestamente al lado opuesto respecto a la tanjente, a causa de los movimientos contrarios que simultáneamente toman las dos porciones de secante, cuando jira al rededor del punto β; por consiguiente, abrá allí una inflexion (*).

Para evitar la confusion de las líneas, hemos construido esta tanjen-

---

(*) *Es conveniente observemos que, cualquiera que sea la base de un cilindro cortado por un plano, siempre presentará la transformada un punto de inflexion en el sitio en que la tanjente a la seccion primitiva era* la línea de la mayor pendiente *del plano secante, a lo ménos cuando las aristas del cilindro son verticales; y en jeneral, tendrá lugar esta inflexion en el punto en que la tanjente forme un ángulo* mínimo *con las jeneratrices. Con efecto, si nos referimos a la fig.* 49 *y suponemos efectuado el desarrollo del cilindro sobre el plano tanjente, que es la prolongacion del elemento superficial* ABB'A', *veremos que si el ángulo* BMM' *es a un mismo tiempo menor que los ángulos* B'M'M" *y* LKM, *el lado* M'M" *vendrá, despues del desarrollo, a caer encima de* TMt, *en tanto que el lado* MK *permanecerá encima. Así mismo, tendria lugar una inflexion contraria, si el ángulo* BMM' *fuese* máximo; *pero este enunciado está comprehendido en el otro, porque la tanjente forma con la arista un ángulo agudo u obtuso de los cuales el primero es* mínimo *y el segundo* máximo. *Esta interesante observacion la debemos a M. Th. Olivier.*

te *singular* en el punto análogo γ, tomando la subtanjente C''θ'' igual a Cθ, y uniendo los puntos γ y θ''.

227. El *desarrollo* de un cilindro es una operacion que necesariamente se emplea en ciertas artes. Si, por ejemplo, queremos formar un tubo cilíndrico de planchas de fierro o de hoja de lata, de modo que se termine en dos planos, uno de ellos perpendicular, y otro inclinado a su lonjitud, es preciso para ejecutarlo trazar en la hoja de metal, *estando todavía plana* la curba δ'αδ, y recortar esta hoja al largo de esta curba, quitando despues la parte superior; hecho esto, podemos estar seguros de que encorbando lo demas de la hoja de metal por medio de un yungue cilíndrico, el bordo superior nos presentará la forma de una *curba plana*, que tendrá la inclinacion que por la cuestion se exija.

Así mismo, si despues de haber ejecutado en madera o piedra un cilindro recto, quisiéramos que terminase en un plano inclinado, seria preciso, para conseguirlo, construir sobre un carton flexible el desarrollo de este cilindro con la transformada δ'αδ de la seccion de que se trata; y en seguida recortar este carton segun esta curba, y enrrollarlo despues sobre el cilindro. En este estado, el borde de este carton enrrollado adquirirá la forma que conviene dar a la seccion pedida, y podremos trazar ésta sobre el sólido siguiendo con un lápiz el borde de este carton arrollado; de modo que como el obrero conoce por este medio el contorno de la parte del sólido que debe quitar, podrá rematar su obra con toda la exactitud deseable. Hallarémos frecuentes aplicaciones de este procedimiento en la cantería y carpintería.

228. Otra solucion *de la interseccion de un cilindro recto con un plano.*

Puede mui bien suceder que alguna circunstancia de la cuestion impida que tomemos el plano vertical de proyeccion perpendicular al plano secante; en tal caso, este último tendrá por trazas las rectas cualesquiera PQ y QR', y el cilindro estará siempre representado por la base ABDC, y las dos verticales UU' y VV' que forman su contorno aparente sobre los planos fijos. En este caso, sigamos el método jeneral del núm. 210 y cortemos al cilindro y al plano dado PQR' con varios *planos horizontales*, como el K'N'M'; este tendrá por seccion en el plano dado, una horizontal (K'M', KM), y por seccion en el cilindro una curba FIG. 59.

proyectada sobre la base ABDC; por consiguiente, los puntos M y N, que son comunes a estas dos secciones ausiliares, sobre el plano horizontal, estarán proyectadas sobre K'M', y nos darán a conocer dos puntos (M, M') y (N, N') de la interseccion pedida. Las otras se obtendrán de un modo enteramente semejante, tirando a discrecion paralelas a la línea de tierra, tales como A'L', E'F'.....

229. Pero es mejor que interpretemos de otro modo estas construcciones, diciendo que a discrecion se tiren *planos ausiliares* que sean *verticales* y *paralelos a la traza* PQ, como el MNK; en cuyo caso este plano vertical cortará al plano PQR' segun la horizontal (KM, K'M'), y al cilindro segun dos jeneratrices proyectadas sobre XN' e YM'; por consiguiente, el encuentro de estas últimas con la línea K'M' nos dará dos puntos (M, M') y (N, N') de la interseccion pedida. Esta marcha nos proporcionará la ventaja de poder hallar directamente ciertos puntos *notables*, que es mui importante construir con preferencia a otros que estén mui próximos a ello.

1.° Si aplicamos este método a la indagacion de los puntos situados sobre las aristas (A,UU') (D, VV'), que forman el contorno aparente del cilindro sobre el plano vertical, hallarémos por resultado los puntos A' y D' que separan *la parte visible* de la interseccion hallada, de la parte *invisible*; y en estos puntos deberá *tocar* la proyeccion vertical A'B'D'C' a las dos rectas UU' y VV'. Con efecto, la tanjente de la curba situada en el espacio tirada por el punto (A, A'), está precisamente colocada en el plano tanjente al cilindro que lo toca en todo el largo de la arista (A, UU'); pero este plano es en el caso presente perpendicular al plano vertical, y por consiguiente la tanjente en cuestion está proyectada sobre su traza UU', la cual debe tambien tocar a la curba A'B'D'C'; porque hemos demostrado (núm. 102) que una curba y su tanjente debian tambien ser tanjentes una a otra, cuando se las proyectaba sobre un mismo plano.

2.° El punto *mas alto* y el *mas bajo* de la curba, es decir, aquellos *en que la tanjente es horizontal*, se obtienen determinando las aristas B y C en que el plano tanjente del cilindro es *paralelo a la traza* PQ. Con efecto, si despues de haber conducido en esta direccion la tanjente BI de la base ABDC, y de haber construido, segun lo hemos hecho arriba, el punto (B, B') de la seccion, queremos hallar la tanjente relativa a este

punto, necesitaremos para ello (núm. 213) determinar la interseccion del plano PQR' con el plano vertical BII' que toca al cilindro en (B, B'); pero como estos dos planos tienen sus trazas paralelas, se cortarán precisamente segun una horizontal I'B', que será la tanjente en el punto B'. Esta línea es tambien un límite de la curba; y otro límite será la tanjente en el punto (C, C'), que así mismo será horizontal.

230. Conoceremos *la tanjente* en un punto cualquiera (M, M') por medio de la interseccion del plano PQR', con el plano tanjente al cilindro en toda la estension de la arista vertical M; y como este plano tiene por traza a la recta MT, que encuentra a PQ en el punto T, síguese que sin hallar la segunda traza de este plano tanjente, estamos ciertos que T es la traza horizontal de la tanjente pedida. En virtud de esto, si proyectamos este punto a la línea de tierra, y le unimos con el punto de contacto, hallarémos que TM y T'M' son las proyecciones de la tanjente.

231. Podríamos ejecutar *el abatimiento* de la curba, haciendo jirar el plano PQR' al rededor de su traza PQ, para abatirlo sobre el plano horizontal; y como en este movimiento de revolucion, no saldrá el punto arbitrario (M, M') fuera del plano vertical PM, que es perpendicular a la charnela PQ, será suficiente determinar (núm. 17) la distancia del punto P al punto (M, M') y transportar en seguida esta distancia sobre PM prolongada, para obtener la posicion del punto (M, M') en el abatimiento. Los demas puntos se hallan de un modo enteramente semejante.

Pero es mucho mejor abatir el plano PQR' sobre el plano vertical, moviéndolo al rededor de su traza QR', porque en este caso cada horizontal, como (KM, K'M'), conservará su magnitud absoluta que es KM, y será paralela a la posicion que tome la traza PQ despues del abatimiento. Para hallar esta posicion, figurémonos que se ha prolongado la recta (BC, B'C') hasta los puntos S y R', en que encuentra a las dos trazas del plano PQR'; y observemos que esta recta, cuya verdadera magnitud es el abatimiento R'S", forma parte de un triángulo rectángulo, cuyos otros dos lados son QS y QR'. Si ahora construimos con estos tres lados el triángulo QR'*s*, tendremos que la base Q*sp* será el abatimiento de la traza QSP; en este caso, si tiramos paralelas a esta línea Q*sp*, y tomamos las distancias

$$I'b = IB,\ Z'a = ZA,\ Z'l = ZL,\ K'n = KN,\ K'm = KM, \ldots.$$

hallarémos una serie de puntos, que reunidos por un trazo contínuo, nos darán la curba *blmedcfab*, que es *la verdadera magnitud* de la interseccion del cilindro y del plano PQR'.

En cuanto a la tanjente de este abatimiento, será preciso, para fijarla, tomar la distancia $Qt = QT$, y unir el punto t con m por medio de la recta tm.

232. El *desarrollo* de la superficie se efectuará, como en el núm. 222, trasladando a una recta indefinida lonjitudes iguales a los arcos rectificados de la base ABDC, sirviéndonos para ello de cuerdas mui pequeñas, a saber:

$$B''L'' = BL,\ L''M'' = LM,\ M''E'' = ME,\ E''D'' = ED; \ldots.$$

levantarémos en seguida por los puntos de division ordenadas iguales a las porciones correspondientes de las jeneratrices, es decir:

$$B''\beta = GB',\ L''\lambda = HL',\ M''\mu = YM',\ D''\delta = VD, \ldots.$$

y la curba $\beta\lambda\mu\varepsilon\delta\gamma\psi\alpha\beta''$ será la *transformada* de la seccion del cilindro.

La tanjente de esta transformada en el punto μ, es la misma en que se convierte la tanjente primitiva (MT, M'T') despues del desarrollo; y como esta última es la hipotenusa de un triángulo rectángulo que tiene por base a MT y por altura a YM', y cuyos ángulos permanecen ademas *invariables* (núm. 162), no habrá mas que tomar la subtanjente $M''T'' = MT$ y tirar la recta $T''\mu$. Esta línea deberá tocar a la transformada en μ, cuyo punto se halla, en el caso presente, bastante cerca de la inflexion; que en la actualidad está en ε, en virtud de que (*nota* del núm. 226) el punto (E, E'), es manifiestamente el punto en que la tanjente de la seccion es perpendicular a la traza horizontal PQ del plano secante, y que segun esto esta tanjente es *la línea de la mayor pendiente* del plano, respecto al punto (E, E').

Fig. 62. Problema 2. *Hallar los puntos de seccion de un plano cualquiera* PQR' *con una curba cuyas proyecciones son* ABCDEF *y* A'B'C'D'E'F'.

233. Este problema está enteramente comprehendido en el precedente, porque si nos figuramos el cilindro vertical que proyecta a la cur-

ba dada segun ABCDEF, y construimos, como en el núm. 228, la proyeccion vertical A"B"C"D"E" de la interseccion de este cilindro con el plano PQR', es evidente que los puntos que buscamos deberán hallarse sobre esta interseccion; y como tambien se hallan sobre la curba dada, no tendrémos mas que examinar si estas dos curbas se encuentran en alguna parte sobre el plano vertical. En el caso presente tienen los tres puntos comunes L', M', y N' que proyectarémos sobre el plano horizontal a L, M, y N; y estos tambien son los puntos en que el plano PQR' corta a la curba propuesta. Es cierto que hai otro cuarto punto de encuentro entre las proyecciones verticales; pero reconocemos con suma facilidad, que este punto no es comun a las dos curbas, porque cae respecto a la una sobre el arco CD, y respecto a la otra sobre el DE.

Con el objeto de hacer resaltar mejor la situacion de los diversos puntos de la línea de doble curbatura, hemos puntuado los arcos de curba que se hallan *debajo* del plano, porque miramos a este como realmente *existente*; pero no es lo mismo con el depurado 59, en que el plano secante está combinado con una superficie, y en donde hemos debido, segun el convenio jeneral establecido en el núm. 108, mirar a este plano como sustraido, despues de haber cortado al cilindro.

234. En el problema precedente, y en las cuestiones análogas, se da algunas veces a la curba ausiliar A"B"D".... el nombre de *curba de indagacion* o *curba de error*, porque las construcciones que hemos empleado pueden presentarse bajo el punto de vista siguiente. Si el punto incógnito, en que la curba propuesta penetra al plano PQR', estuviese proyectado en B, cuyo punto elejimos arbitrariamente sobre la proyeccion horizontal ABCD...., seria indispensable que tirando por este punto, considerado como perteneciente al plano, una paralela (BK, K'B") a la traza PQ, fuese esta recta a pasar por el punto (B, B') de la curba; y como esta paralela nos da a B" en lugar de B' por proyeccion vertical del punto B, síguese que la hipótesis de donde hemos partido es *un error*. Repitiendo un ensayo semejante con el punto C, hallarémos otro error en sentido opuesto, porque obtendrémos una proyeccion vertical C" situada mas arriba que C'; de donde concluimos que el verdadero punto que buscamos está entre B y C, y que reiterando semejantes ensayos respecto a los puntos intermedios, concluiríamos por recaer en el punto de seccion (M, M'). Pero en lugar de tratar de hallar inmediatamente este

punto exacto por medio de tanteos repetidos, es mucho mas cómodo construir cierto número arbitrario de puntos de la *curba de error*, y unirlos en seguida por medio de un trazo contínuo, cuyo encuentro con la curba propuesta nos dará el punto pedido (M, M').

PROBLEMA 3. *Dado un cilindro oblícuo de base cualquiera, hallar*: 1.° *las proyecciones de la* SECCION RECTA *de este cilindro*; 2.° *el abatimiento de esta seccion*; 3.° *el desarrollo de la superficie y la transformada de la curba que le servia de base; con las tanjentes a estas diversas curbas.*

FIG. 60. 135. Sea ABCD la base del cilindro que supondrémos plana, y cuyo plano adoptarémos por plano horizontal de proyeccion: sea ademas (EE", E'E"') la direccion de las jeneratrices. Tirando en este caso las tanjentes BB" y DD" a la base, paralelas a EE", estas serán las trazas de los dos planos tanjentes verticales, y por consiguiente, estas dos rectas formarán el contorno aparente del cilindro sobre el plano horizontal (núm. 106); en tanto que las tanjentes EE' y FF', perpendiculares a la línea de tierra, darán, por contorno aparente sobre el plano vertical a las jeneralrices E'E"' y F'F"', que no son otra cosa que las trazas de dos planos tanjentes perpendiculares al plano vertical. Suponemos ademas que el cilindro está terminado y *cerrado* por dos planos horizontales E'F' y E"'F"', lo que hará que sean invisibles sobre el plano horizontal las aristas CC" y FF",.... y manifestará de un modo mas sensible la situacion de estas aristas inferiores. Para hacer ver mejor la forma de la superficie, mirarémos a todas las aristas que tengamos necesidad de emplear, no como líneas ausiliares, sino como *jeneratrices*, que representadas por *líneas seguidas* o *puntuadas*, nos harán discernir las partes superiores o anteriores de las que les son opuestas en la superficie.

236. Sentado esto, como sabemos que la *seccion recta* o *seccion ortogonal* de un cilindro, es la curba trazada sobre esta superficie por un plano secante perpendicular a las jeneratrices, y que ademas todas las secciones paralelas dadas a un cilindro son idénticas, tirémos por un punto cualquiera Q de la línea de tierra, las trazas PQ y QR' respectivamente perpendiculares a las proyecciones de las jeneratrices, y hallaremos la interseccion de la superficie con el plano PQR'. Para obtener

esta interseccion, cortarémos a las dos superficies con diferentes planos ausiliares que todos sean *verticales* y *paralelos a las aristas* del cilindro, porque de este modo no tendrémos mas que hacer que combinar secciones rectilíneas; ademas, con el fin de simplificar la operacion ulterior del *desarrollo*, será bueno conducir estos planos por puntos de la base que estén de dos en dos sobre las cuerdas GM, EL,.... paralelas a la traza PQ. Una vez admitidas todas estas disposiciones, podrémos operar de dos modos.

237. *Primer método.* Sean GKI e H' las trazas del plano secante vertical: estas encontrarán a las del plano PQR' en los puntos K e I'; por consiguiente, la interseccion de estos dos planos, es la recta (GI, I'K'); pero como es importante determinar esta línea con mucha exactitud, en virtud de que para los otros planos ausiliares será manifiestamente suficiente tirar paralelas a I'K', vamos a construir otro tercer punto de esta recta. Determinemos, por ejemplo, el que está proyectado en S; y para ello, imajinemos tirada por este punto una horizontal paralela a la traza PQ. Esta paralela, que necesariamente estará contenida en el plano PQR', tendrá por proyeccion horizontal a SR, y penetrará al plano vertical en R'; luego R'S', paralela a la línea de tierra es su proyeccion vertical; y si referimos el punto S a S', este último deberá pertenecer a la recta I'K'S'.

Ademas, el mismo plano ausiliar GKI ha debido cortar el cilindro segun dos aristas, cuyos pies se hallan en G y H, y que, por consiguiente, están proyectadas verticalmente en G'G" y H'H"; en virtud de esto, el encuentro de estas dos rectas con la seccion K'S' nos producirá dos puntos *g'* y *h'* de la proyeccion vertical de la curba pedida. En seguida, los proyectarémos sobre GHK a *g* y *h*, que serán dos puntos de la proyeccion horozontal de la misma curba.

Considerémos ahora otro plano secante MNV. Este corta al plano PQR' segun una recta cuya traza es (V, V'); y sin determinar mas puntos, estamos ciertos que esta seccion es V'*m'* paralela a K,S'; y en seguida, como este plano MNV corta tambien al cilindro segun las dos aristas M'M" y N'N" que encuentran a la recta V'*m'* en *m'* y *n'*, estos serán tambien dos nuevos puntos de la curba que buscamos, que habrá en seguida que proyectar horizontalmente sobre MV en *m* y en *n*. Aplicando este mismo procedimiento a otros planos secantes, hallarémos

por resultado las proyecciones *ambncd* y *a'm'b'n'c'd'* de la seccion ortogonal del cilindro.

FIG. 60 238. *Segundo método.* Sea ACY un planovertical paralelo a las aristas del cilindro: este corta a la superficie segun las dos jeneratrices que salen de los puntos A y C; y al plano PQR' segun una recta que parte del punto Y, y es perpendicular a estas jeneratrices; luego, si abatimos este plano secante al rededor de AY, tomando la altura Y'Z' desde Y a Z", tendrémos que la recta AZ" y su paralela C*c*" serán las nuevas posiciones de las jeneratrices, y la perpendicular Y*c*"*a*" bajada a estas líneas, nos dará a conocer los abatimientos *a*" y *c*" de dos puntos de la curba que buscamos. Respecto a cualquiera otro plano secante MNV, será suficiente tiremos las M*m*" y N*n*" paralelamente a AZ"; y la recta V*m*" paralela a Y*a*", que nos dará tambien los abatimientos *m*" y *n*" de dos nuevos puntos de la *seccion recta* del cilindro. Será supérfluo trazar las proyecciones de esta curba, en vista de que los abatimientos obtenidos de este modo bastarán, segun vamos a ver, para construir la *verdadera magnitud* de esta curba, y para ejecutar el *desarrollo* del cilindro, que es el objeto principal del presente problema (*).

Sin embargo, si de aquí queremos deducir las proyecciones de la seccion recta, no tendrémos mas que trasladar los puntos *a*", *c*", *m*", *n*",.... a los *a*, *c*, *m*, *n*,.... por medio de perpendiculares a la charnela AY, y en seguida proyectar estos últimos puntos a *a*', *c*', *m*', *n*',.... sobre las proyecciones verticales de las jeneratrices correspondientes.

FIG. 60 239. Hai *puntos notables* que es preciso construir con preferencia a cualesquiera otros, aunque estén próximos a ellos; y haremos mui bien en principiar por estos la construccion del depurado.

(*) *Este método injenioso, debido a* M. Th. Olivier, *viene a reducirse a tomar el plano vertical de proyeccion paralelo a las aristas del cilindro, y presenta ventajas que se hacen sensibles en las operaciones de los núm.* 241 *y* 243. *Sin embargo, si se tratase de obtener la interseccion de un cilindro oblícuo con un plano cualquiera que no fuese perpendicular a las jeneratrices, sería mejor seguir el primer método, y esta es la razon porque lo hemos conservado aqui, con solo el objeto de enseñar como debemos operar en semejante caso.*

1.° Si aplicamos cualesquiera de los dos métodos precedentes a las aristas BB" y DD", que forman el contorno aparente sobre el plano horizontal, hallarémos los puntos (b, b') y (d, d'), en los cuales deberá *tocar* la curba a las aristas de que tratamos, pero esto *solo en la proyeccion horizontal*. Con efecto, aun cuando en el espacio sean mui diferentes una de otra la tanjente a esta curba y la arista del cilindro, porque en el caso presente son perpendiculares, sin embargo, estas dos rectas están situadas ámbas en el plano tanjente, que evidentemente es vertical respecto al punto (b, b'); de aquí se sigue que en la proyeccion horizontal deben coincidir; luego en el caso actual está proyectada la tanjente sobre BB"; y por consiguiente (núm. 102), esta línea debe tocar a la proyeccion horizontal de la curba.

Observemos, ademas, que estando situados los puntos b y d sobre el contorno aparente de la superficie con respecto al plano horizontal, formarán, para el observador que considera esta proyeccion, los límites que separan la rama visible *bad* de los de la invisible *bcd*.

2.° Aplicando tambien el procedimiento jeneral a la indagacion de los puntos situados sobre las aristas E'E'" y F'F'", que forman el contorno aparente sobre el plano vertical, obtendrémos los puntos (e, e') y (f,f'), en los cuales *será tocada la proyeccion vertical* de la curba por estas rectas. Este contacto resulta tambien de que la tanjente de la curba en el espacio y la arista del cilindro, están ámbas en un plano tanjente que en el caso que nos ocupa, es perpendicular al plano vertical, y por consiguiente, la proyeccion vertical de la tanjente coincide con la de la arista del cilindro. Ademas, los puntos e' y f' serán aquí los límites que separan la rama visible $c'a'm'f'$ de la que es invisrble $e'd'h'f'$ para el observador que considera la proyeccion vertical.

3.° Para hallar el punto *mas alto* y el *mas bajo* de la curba, es decir los dos puntos en que su tanjente es *horizontal*, es preciso en primer lugar hallar en la base ABCD, sea cual fuere su forma, los puntos A y C en que la tanjente es paralela a la traza horizontal PQ del plano que corta al cilindro : heho esto, si construimos por el procedimiento jeneral el punto (a, a') de la interseccion que estará situada sobre la arista AA", decimos que la tanjente en este punto será horizontal. Con efecto, esta tanjente debe sér (núm. 213) la interseccion del plano PQR' con el plano tanjente que toca al cilindro en todo el largo de la arista AA";

pero por hipótesis, la traza horizontal $A\theta$ de este último plano es paralela a PQ; luego estos dos planos no se pueden cortar sino segun una recta paralela a PQ, es decir *horizontal*. Lo mismo nos sucederá con la arista CC", que nos dará un punto (c, c') en que tambien es horizontal la tanjente de la interseccion. La determinacion de estos dos puntos es mui esencial, para trazar la curba con facilidad y exactitud, sobre los planos de proyeccion.

240. Construyamos ahora la tanjente de la interseccion en un punto cualquiera de ella (m, m'). Este punto se halla sobre la arista Mm; y el plano tanjente al cilindro en toda la estension de esta jeneratriz tendrá por traza horizontal a la tanjente MT a la base; si prolongamos esta recta hasta que corte a PQ en T, este será un punto de la ieterseccion del plano tanjente con el plano de la curba, cuya interseccion no es otra cosa que la tanjente que buscamos (núm. 213). Luego uniendo el punto de contacto (m, m'), que es ya conocido, con el punto T que se proyecta verticalmente en T' sobre la línea de tierra, obtendrémos a Tm y T'm' por proyecciones de la línea pedida.

241. *Abatimiento.* Para hallar la interseccion en su verdadera forma, abatamos el plano PQR' sobre el plano horizontal, haciendo jirar al primero al rededor de su traza PQ; hecho esto, hallemos lo que sucede al punto arbitrario (m, m') de la curba. Este punto no saldrá del plano vertical mV, que es perpendicular a la charnela; y como la distancia mas corta de él a esta recta es evidentemte la línea (mV, m'V'), no tenemos mas que valuar, sirviéndonos del procedimiento del núm. 17, la verdadera lonjitud de esta línea, y trasladarla en seguida desde V a μ, y este último punto será el abatimiento de (m, m'). Pero observemos que, si se ha empleado el método del núm. 238, conocerémos inmediatamente la verdadera lonjitud que buscamos, porque esta evidentemente es Vm"; de modo que describiendo con esta recta por radio, un arco de círculo, este irá a cortar a la línea VM en el punto pedido μ. Así mismo, los arcos de círculo descritos con los radios Ya" e Yc", nos darán los puntos α y γ; y sirviéndonos de procedimientos enteramente iguales, obtendrémos la curba $\alpha\lambda\mu\beta\nu\varphi\gamma\delta$ por abatimiento de la seceion recta del cilindro.

242. Como la tanjente (mT, m'T') de la curba primitiva, tiene su pie T situado sobre la charnela PQ, este punto permanecerá inmóvil

miéntras dura el movimiento de rotacion; y como el punto de contacto (m, m') se ha trasladado a μ, síguese de aquí que $T\mu$ es el abatimiento de la tanjente, cuya línea deberá tocar exactamente a la curba $\alpha\lambda\mu\beta$,.... en el punto μ.

243. *Desarrollo.* Hemos demostrado (núm. 166) que, entre todas las curbas *planas* trazadas sobre un cilindro cualquiera, la *seccion ortogonal* era la única que despues de efectuado el desarrollo de la superficie, se transformaba en *línea recta*. Por consiguiente, no bastaba en el caso presente conocer la base ABCD del cilindro, para estar en estado de desarrollarle; sino que es preciso conocer la seccion recta (*abcd*, *a'b'c'd'*), y aun construir el abatimiento $\alpha\beta\gamma\delta$ de esta curba, con el objeto de poder medir cada uno de los arcos $\alpha\lambda$, $\lambda\mu$,.... y trasladar sus lonjitudes *rectificadas* unas a continuacion de otras, sobre una misma recta (*). De este modo, suponiendo que se abre el cilindro a lo largo de la arista AA", tomarémos sobre una recta indefinida xy las distancias

$$\alpha_2\lambda_2=\alpha\lambda,\ \lambda_2\mu_2=\lambda\mu,\ \mu_2\beta_2=\mu\beta,\ \beta_2\nu_2=\beta\nu,\ldots;$$

y levantarémos, en seguida, por todos los puntos de division perpendiculares indefinidas a la recta xy, estas serán (núm. 161) las posiciones de las jeneratrices despues de efectuado el desarrollo. Para hallar en seguida la curba en que se transforma, por esta operacion, la base inferior ABCD, será preciso tomar sobre estas perpendiculares, las lonjitudes de las diversas porciones de jeneratrices comprehendidas entre esta base y la seccion recta, las cuales tienen por proyecciones a

$$(Aa,\ A'a'),\ (Ll,\ L'l'),\ (Mm,\ M'm'),\ldots$$

que pueden valuarse por el procedimiento del núm. 17. Pero aun aquí presentará una ventaja sensible el método del núm. 238, porque nos dará inmediatamente por valores de estas lonjitudes, las siguientes rectas abatidas

---

(*) *Hemos dicho ya que, para rectificar un arco tal como el $\alpha\lambda$, es preciso emplear una abertura de compás que esté contenida cierto número de veces en este arco, pero que sea tan pequeña que la cuerda que dicha abertura represente, se confunda sensiblemente con el arco parcial que subtenda esta cuerda.*

$$Aa'', Ll'', Mm'',....$$

las mismas que trasladarémos sobre el desarrollo a

$$\alpha_2A_2, \lambda_2L_2, \mu_2M_2,....$$

y la curba $A_2L_2M_2B_2C_2D_2A_2$, que pase por el estremo de estas rectas, será la *transformada* de la base ALMBCDA.

La transformada de la base superior jeneralmente se obtendria tomando sobre las perpendiculares a xy y por la parte superior de esta línea, distancias iguales a las porciones de jeneratrices comprehendidas entre la seccion recta y la curba A'L"M"B"....; pero en el caso presente, en que las dos bases son paralelas, son tambien constantes las lonjitudes totales de las jeneratrices; de modo que bastará valuar la magnitud de una sola arista (AA", A'A'"), cuya magnitud conocemos ya en el abatimiento AA_6 (fig. 60), y en seguida trasladarémos esta magnitud constante sobre las diversas perpendiculares a xy, partiendo desde los puntos A_2', L_2, M_2',... De este modo hallarémos por transformada de la base superior, una curba $A_4L_4M_4C_4A_5$ idéntica con $A_2L_2M_2C_2A_3$.

244. Observemos ahora que, cuando la base ABCD del cilindro es un círculo, como sucede en el depurado que presentamos, y tambien una elipse que tenga uno de sus ejes BD *perpendicular a las jeneratrices*, la seccion recta será una elipse, cuyos ejes serán (bd, $b'd'$) y (ac, $a'c'$). Con efecto, como el plano que se tirase por las dos aristas BB" y DD" tendria, por hipótesis, su traza horizontal BD paralela a PQ, deberia cortar al plano PQR' segun una cuerda (bd, $b'd'$) paralela a PQ; y por consiguiente, esta cuerda seria perpendicular a las tanjentes a la curba en los puntos (b, b') y (d, d'), porque estas tanjentes se hallan en los planos verticales BB" y DD". Y así, la cuerda horizontal (bd, $b'd'$) es necesariamente un *diámetro principal*, o un eje de la elipse en el espacio, y el segundo eje, que es perpendicular al primero, es (ac, $a'c'$). Pero es preciso observar que, estas dos rectas, al proyectarse sobre el plano vertical, no permanecen perpendiculares, y se convierten solamente en *diámetros conjugados* de $a'b'c'd'$; en tanto que continúan siendo los ejes de la proyeccion horizontal $abcd$.

Despues de echa esta advertencia, si cuidadosamente se han tomado los puntos G y M, E y L,.... de dos en dos sobre estas paralelas a PQ, tendrémos que la seccion ortogonal abatida segun $\alpha\beta\gamma\delta$, estará dividi-

da por las jeneratrices en arcos iguales y simétricamente colocados de cuatro en cuatro; de modo que para rectificar esta curba, será suficiente que solo se midan los tres arcos $\alpha\lambda$, $\lambda\mu$, y $\mu\beta$, y trasladar estas lonjitudes cuatro veces seguidas sobre xy, pero trastornando en cada serie el órden de estos arcos. De este mòdo las lonjitudes de las porciones de jeneratrices nos presentarán relaciones análogas, que nos dispensarán no hacer uso sino de la primera mitad de estas rectas.

245. Para obtener la tanjente de la transformada, que no es otra cosa que la misma en que se convierte la tanjente primitiva TM de la base del cilindro, despues de efectuado el desarrollo de esta superficie, es preciso recordemos (núm. 162) que, en esta operacion, el triángulo proyectado sobre MmT permanece *invariable*. Pero este triángulo es rectángulo en el punto (m, m'); uno de los lados proyectados sobre Mm está ya trasladado en el desarrollo a μ_2M_2: el segundo lado Tm tiene por verdadera lonjitud a Tμ, que es su abatimiento: luego si tomamos sobre xy la distancia $\mu_2T_2=\mu T$, y tiramos la hipotenusa T_2M_2, esta recta será la tanjente en el punto M_2 de la transformada. FIG. 60 Y 61.

Supuesto que segun acabamos de decir respecto a un punto cualquiera, permanece el mismo el ángulo $T_2M_2\mu_2$ formado por una tanjente y la arista correspondiente, ántes y despues del desarrollo, síguese que en los puntos A_2, C_2, A_3, deberá la transformada cortar a las jeneratrices formando *ángulos rectos*; porque sobre el cilindro primitivo, la tanjente en los puntos A y C de la base, eran evidentemente perpendiculares a las jeneratrices correspondientes.

PROBLEMA 4. *Dados que sean un cono recto y un plano, hallar*: 1.° *las proyecciones de su interseccion*; 2.° *el abatimiento de esta curba*; 3.° *el desarrollo del cono y la transformada de la interseccion, así como tambien las tanjentes a estas curbas.*

246. Como un cono recto es una superficie de revolucion enjendrada por una recta que encuentra al eje, toda seccion perpendicular a esta última línea será un círculo ACBD, que mirarémos como la *directriz* o la base del cono, y cuyo plano adoptarémos por plano horizontal de proyeccion. Si el cúspide está proyectado en (S, S'), tendrémos que el contorno aparente del cono sobre el plano vertical, estará formado (núm. 106) por las dos jeneratrices S'A' y S'B', que corresponden a los planos

tanjentes AA'S' y BB'S', perpendiculares al plano vertical; y si ademas admitimos, para simplificar un poco las operaciones gráficas, que se ha elejido este de modo que sea perpendicular al plano secante, este último tendrá por trazas líneas tales como la PQ y QR'.

247. Sentado esto, cortemos al plano PQR y al cono con planos ausiliares que todos pasen *por el cúspide* (S, S'), y que sean ademas *perpendiculares al plano vertical.* Uno de estos planos ausiliares tendrá por trazas a una recta tal como S'F', tirada por el punto S' en una direccion arbitraria, y a otra recta F'KF perpendicular a la línea de tierra. Y como esta última traza encuentra a la base ACBD del cono en dos puntos F y K, concluimos de aquí que las jeneratrices SF y SK son las secciones de la superficie con el plano ausiliar S'F'F; pero como este mismo corta al plano PQR', segun una recta que precisamente es perpendicular al plano vertical, y está proyectada en (M', XNM), síguese que el encuentro de esta recta con las dos jeneratrices nos dará, sobre el plano horizontal, dos puntos M y N de la curba pedida, los cuales estarán poyectados verticalmente en M'.

Repitiendo esta misma construccion con todos los demas planos ausiliares, obtendrémos puntos de la interseccion en tanto número cuanto queramos; pero para la operacion ulterior del desarrollo, será mui útil que hagamos pasar las trazas horizontales de los planos ausiliares por puntos como los A, E, F, C,.... que dividan al círculo en arcos iguales. Entre estos planos se hallan los planos tanjentes AA'S' y BB'S', cada uno de los cuales nos producirá un punto solo (G, G') o (HH'): estos son los dos véntices de la interseccion, porque vemos fácilmente que la recta (GH, G'H'), divide en dos partes iguales a todas las cuerdas paralelas a MN, y forma ángulos rectos con todas ellas; de modo que esta recta es un *eje* de la seccion cónica. Esta curba, que en el ejemplo presente es una elipse, tiene por proyecciones a GLMHN y G'H'.

FIG. 63. 248. El método precedente no nos podrá servir para hallar los puntos de la interseccion, situados sobre las dos aristas SC y SD, que se proyectan verticalmente segun el eje del cono; porque en este caso, las secciones ausiliares echas en esta superficie y en el plano PQR', se confundirán todas en el plano horizontal con la recta CSD. Pero, si tiramos por el punto I' un *plano secante horizontal,* este cortará al cono segun un círculo, cuyo radio será I'V'=SV, y al plano dado segun una recta

(I', CD); por consiguiente, el encuentro de esta línea con el círculo, cuyo radio es SV sobre el plano horizontal, nos dará los dos puntos pedidos I y J.

Podríamos tambien haber empleado este segundo procedimiento para hallar los otros puntos de interseccion del cono con el plano PQR'; que ademas, pudiera servirnos para verificar la posicion de los puntos en que, siguiendo el primer método, tiene lugar el encuentro de las aristas y de las rectas que forman un ángulo mui agudo.

249. La tanjente en un punto cualquiera de la curba es (núm. 213) la interseccion del plano PQR' con el plano tanjente al cono al largo de la arista SMF. Pero como este último tiene por traza horizontal la tanjente FT a la base ACBD; así es que el punto T, en que se cortan las rectas FT y PQ, es un punto de la tanjente que buscamos, y este mismo punto es tambien su traza horizontal; luego, por último, esta tanjente es la recta (TM, QM').

250. *Abatimiento.* Hagamos jirar el plano PQR' al rededor de su traza QR', para abatirlo sobre el plano vertical. En este movimiento, la recta (MNX, M'), que evidentemente es perpendicular a la charnela, permanecerá formando ángulo recto con este eje de rotacion, y tomará la posicion M'*m*; luego, tomando sobre esta última línea, las distancias

$$M'm = XM;\ M'n = XN,$$

obtendrémos para los abatimientos de M y N los puntos *m* y *n*. Todos los demas puntos se hallarán del mismo modo, y la *verdadera magnitud* de la seccion será *glmihn*.

Como resultado de las mismas consideraciones, veremos claramente que, el pie T de la tanjente TM se trasporta a una distancia $Qt = QT$, sobre una perpendicular a la charnela QR'; y así, uniendo los puntos *t* y *m*, tendremos la recta *tm*, que deberá *tocar* en *m* a la curba abatida *glmh*.

251. *Desarrollo.* Sabemos (núm. 170) que cualqiera superficie cónica es desarollable, y que en esta transformacion, las jeneratrices o cualesquiera partes de estas rectas, no varian de lonjitud. Luego, en el caso presente, en que el cono es recto, las aristas comprehendidas desde la cúspide hasta la base son todas iguales, es evidente que los estremos de estas rectas se hallarán situados, despues del desarrollo, sobre una circunferencia FIG. 63.

círculo que tendrá por centro a la cúspide del cono, y cuyo radio será igual a S'A'. Y así, elijamos sobre el plano en que se quiere ejecutar el desarollo, un punto arbitrario S"; y con un radio S"A"=S'A', describamos un círculo, sobre el cual tomarémos un arco A"B"A"', que sea una fraccion de la circunferencia total, espresada por la razon de SA a S'A'; y en seguida tiremos el radio A"'S"; echo esto, el sector S"A"B"A"' representará exactamente la napa inferior del cono desarrollado sobre el plano que hemos elejido. En cuanto a la napa superior, harémos abstraccion de ella, porque el plano PQR' no la encuentra; pero en otro ejemplo, verémos lo que es preciso hacer respecto a esta segunda napa.

252. Para obtener ahora la transformada de la interseccion (GLMH, G'H'), suponiendo que se ha abierto el cono a lo largo de la arista (SA, S'A'), tomemos sobre la circunferencia A"B"A"', que es la transformada misma de la base ACBD, arcos tales (*) como

$$A''E''=AE,\ E''F''=EF,\ F''C''=FC,\ldots\ldots$$

en seguida, tiremos los radios S"E", S"F",..... sobre los cuales será preciso tomar lonjitudes respectivamente iguales a las porciones de jeneratrices, comprehendidas entre la cúspide y los diversos puntos de la curba (GMH, G'H). Pero si se considera el punto (M, M'), por ejemplo, situado sobre la jeneratriz (SF, S'F'), y hacemos jirar esta recta al re-

---

(*) *En el caso presente no se trata precisamente de* rectificar *los arcos AE, EF, sino de cambiarlos en arcos de radio diferente y de la misma lonjitud absoluta que los arcos primitivos. Pero si empleamos aberturas de compás propias para representar cuerdas que sensiblemente se confundan con los arcos parciales que subtenden en el círculo ACBD, y trasladamos en siguida estas aberturas de compás colocándolas sobre la circunferencia A"B"A", nos aproximarémos todavía mas a la verdad que si las colocásemos sobre una línea recta; por consiguiente, el procedimiento es el mismo que el empleado para rectificar los arcos AE, EF,.... Sin embargo, en el caso actual, operarémos con mas exactitud y facilidad, si, como lo hemos recomendado, se tuviese cuidado de tomar los puntos A, E, F,.... a igual distancia sobre la base circular, porqe entónces bastaria dividir al arco total A"B"A" en tantas partes iguales cuantas hubiese en el círculo ACBD.*

dedor del eje, hasta que llegue a ser paralela al plano vertical, es evidente que irá a coincidir con la arista (SA, S'A'), en tanto que el punto M' permanecerá sobre una horizontal, y se transportará a μ; luego entónces S'μ será la verdadera lonjitud de la recta primitiva (SM, S'M'). Y así, despues de haber tirado por todos los puntos S', M',.... horizontales, será preciso tomar sobre los radios del desarrollo las distancias

$$S''G''=S'G',\ S''L''=S'\lambda,\ S''M''=S'\mu,\ S''I''=S'V',\ldots\ldots$$

y la curba G"L"M"I"H"N"G"' será la transformada de la seccion hecha en el cono por el plano dado PQR'.

253. Esta transformada, considerada en sí misma, no se terminaria bruscamente en los puntos G" y G"', sino que se prolongaria presentando una infinidad de ramas iguales a G"H"G"', las que no obstante concluirian por coincidir exactemente, siempre que la razon del apotema S'A' al radio SA de la base sea un número comensurable; esto mismo nos lo da a conocer, bien claramente, la equacion de esta curba, en la cual entra una funcion circular y *periódica* (*). Para persuadirnos sin-

---

(*) *Para obtener esa equacion en coordenadas polares, representemos por R,* h *y* l, *el radio de la base, la altura y la apotema del cono; sean ademas* k=*I' Y la altura del punto (I', S), en que el plano PQR' corta al eje, y* ω *el ángulo de este plano con el horizonte: finalnente llamemos* ρ *a la distancia de la cúspide a un punto cualquiera* (M, M') *de la curba, y* α *al ángulo ASF, es decir, al arco que mide a este ángulo en un círculo cuyo radio es la unidad: de aquí resulta qe el arco AF=R*α. *Con estos datos nos será mui fácil formar las equaciones del plano y de la recta* (SF, S'F'), *y hallar, en seguida, la distancia que hai desde la cúspide a su punto de encuentro, cuya distancia la igualaremos a* ρ; *pero podemos conseguir esto mismo con mas brevedad del modo siguiente:* FIG. 63.

En el triángulo formado por el eje del cono con la jeneratriz (SF, S'F'), *en la cual se halla situado el punto* (M, M') *y cuya altura la llamarémos* z, *tendrémos evidentemente que*

$$h : h-z :: l : \rho;$$

en seguida, en el triágulo S'F' Y que es la proyeccion vertical del precedente, y en el cual es la recta M'O$=\frac{OI'}{\text{tanj.}\,\omega}=\frac{k-z}{\text{tanj.}\,\omega}$, *hallarémos que*

téticamente de esta circunstancia, no hai mas que imajinarnos que el cono está envuelto por una superficie flexible que le ha dado un número infinito de vueltas; en este caso, como a todas las napas superpuestas las ha cortado simultáneamente el plano PQR', al desarrollarse estas de encima del cono, producirán una infinidad de ramas idénticas que se construirán gráficamente continuado sobreponiendo a la circunferencia A"B"A"', y al otro lado del punto A"', arcos iguales a AE, EF, FC,..... con radios vectores iguales a los ya empleados.

254. En cuanto a la tanjente a la transformada en el punto M", es preciso recordemos (núm. 170) que esta recta debe ahora formar con S"F" el mismo ángulo que formaba primitivamente la tanjente (MT, M'Q) con esta jeneratriz; y como esto mismo es tambien cierto res-

---

$$h : h-z :: R \cos \alpha : \frac{k-z}{\text{tanj.}\,\omega};$$

si en seguida eliminamos a z *entre las equaciones que nos dan estas dos proposiciones, nos resultará*

$$\rho = \frac{l\,(h-k)}{h-R\,\text{tanj.}\,\omega.\,\cos\alpha}.$$

Este resultado contiene dos variables ρ *y* α, *de las cuales la primera conserva la misma magnitud sobre el desarrollo del cono; pero en este caso el ángulo* α *está reemplazado por el* $G''S''M''=\theta$, *que corresponde en el círculo de radio* l, *a un arco* $A''F''$, *cuya lonjitud absoluta iguala a la del arco* AF *en el círculo cuyo radio es* R; *por consiguiente, tendrémos la relacion* $R\alpha=l\theta$, *por medio de la cual podremos eliminar a* α *de la equacion precedente, que finalmente es*

$$\rho = \frac{l\,(h-k)}{h-R\,\text{tanj.}\,\omega.\,\cos\frac{l\theta}{R}}.$$

Esta equacion, cuya discusion dejamos al lector, representará siempre a la transformada, ya sea que la interseccion primitiva sea una elipse, una parábola o una hipérbola, advirtiendo que si ω *varia al mismo tiempo que* k *permanece constante, tendremos para estos tres jéneros, que*

$$R\,\text{tanj.}\,\omega < h,\ o = h,\ o\ \textit{finalmente} > h.$$

pecto a la tanjente FT a la base, síguese de aquí que el triángulo rectángulo proyectado sobre MFT permanecerá de forma *invariable* cuando se desarrolle el cono. Y como uno de los lados de este triángulo está ya espresado en el desarrollo por M"F", síguese que si le levantamos una perpendicular F"T"=FT, y tiramos la recta T"M", esta línea deberá tocar a la transformada en el punto M".

Tambien resulta del principio que acabamos de citar, que la curba debe cortar formando ángulo recto, a los radios vectores correspondientes que pasan por los puntos G", H" y G"'; porque en lospuntos primitivos (G, G') y (H, H') eran las tanjentes de la interseccion evidentemente perpendiculares a la jeneratriz del cono.

255. *Caso en que la seccion cónica es una* HIPERBOLA. Sea siempre ACBD la base del cono recto, y A'S'*b*', B'S'*a*', las aristas que forman el contorno aparente de esta superficie en el plano vertical; en este caso consideramos las dos napas, suponiéndolas terminadas en dos secciones horizontales A'B', *a'b*', que disten igualmente de la cúspide, y que por consiguiente produzcan dos círculos que ambos se proyecten sobre ACBD. En cuanto al plano secante, dispongámosle de modo que corte las dos napas del cono; suponiendo siempre que el plano vertical le es perpendicular, sus trazas serán R'Q y QP. FIG. 64.

256. Podria efectuarse la construccion de la curba de interseccion como en el otro caso, por medio de planos ausiliares tirados por la cúspide perpendicularmente al plano vertical; pero en razon a la gran oblicuidad que en el caso presente tienen las secciones rectilíneas, será mas exacto valerse de los planos horizontales. Segun esto, sea $\mu'\gamma'$ uno de estos planos; este cortará al cono segun un círculo que se proyectará en $\mu M\gamma$, y al plano dado segun una recta (M', XNM); por consiguiente, los puntos M y N, comunes a estas dos secciones sobre el plano horizontal, pertenecerán a la curba pedida, y así una de sus ramas es (PMGNI, QG').

La otra rama (RLHKV, H'R') se construirá del mismo modo; y podremos emplear una seccion $\delta'\lambda'=\mu'\gamma'$, que nos dará dos puntos (L, L') y (K', L'), proyectados tambien sobre el círculo $\mu M\gamma$. No repetiremos aquí lo que ya hemos dicho en el problema precedente, sobre los *vértices* y la construccion de la tanjente; pero vamos a tratar de una indagacion peculiar al caso presente.

257. Cuando una curba admite una rama infinita, y retiramos, sobre ella, cada vez mas el punto de contacto de una tanjente, esta recta varia de situacion, y algunas veces se transporta toda ella al infinito, al mismo tiempo que el punto de contacto; esto precisamente es lo que nos presenta la parábola de segundo grado; pero en otros casos, sucede que esta tanjente variable permanece siempre del lado de acá de cierto límite al cual no llega sino cuando el punto de contacto está a una distancia infinita. En este caso se da el nombre *asíntota* al límite de las posiciones de la tanjente; esta propiedad la enunciamos de un modo abreviado, diciendo que *la asíntota de una curba es la tanjente a un punto de contacto infinitamente distante.*

FIG. 64. 258. En virtud de esto, propongámonos construir las asíntotas de la seccion dada al cono con el plano PQR'. El punto de contacto de una tanjente de esta especie, debe estar a una distancia infinita, y por consiguiente, estará indispensablemente situado sobre *una jeneratriz paralela al plano secante;* si tiramos por la cúspide, y paralelamente a PQR', un plano S'α'α que corte al cono segun las rectas Sα, Sβ; estas dos aristas serán las que contienen los puntos de contacto de las asíntotas. Consideremos la primera y recordémonos de que el plano que toca al cono en toda la lonjitud de la jeneratriz Sα, por mas prolongada que esté, tiene por traza horizontal a la tanjente αθ de la base; luego la asíntota, que debe ser (núm. 213) la interseccion de este plano tanjente con el plano PQR', pasará por el punto θ en que se encuentran sus trazas; y será precisamente la recta θω paralela a Sα, porque estos planos son ambos paralelos a esta jeneratriz.

Del mismo modo construirémos la otra asíntota ϛω, que será paralela a la arista Sβ; y las dos asíntotas deberán cortarse en un punto ω, que precisamente estará situado en medio del eje real GH, es decir, en el centro de la curba.

259. Si aplicamos el método precedente al caso de una seccion *parabólica,* para la cual se requiere que el plano PQR' tenga *su traza vertical paralela* a S'A', hallaremos que las dos aristas Sα y Sβ se confundirán con SA; de modo que siendo esta última recta la única jeneratriz del cono que es paralela al plano secante PQR', la seccion tendrá tambien una rama infinita; pero esta no admitirá asíntotas, porque el plano PQR' y el plano tanjente al largo de SA, que deberian

dar esta tanjente por medio de su interseccion, son evidentemente paralelos entre sí.

260. *Abatimiento.* Esta operacion se efectuará como en el númi 250, tomando sobre cada recta M'*m*, perpendicular a la traza vertical QR', las distancias M'*m*=XM y M'*n*=XN. En cuanto a las asíntotas, trasladaremos de un modo semejante sus pies θ y φ a θ' y φ'; y en seguida uniremos estos últimos puntos con el centro (ω, ω'), que está abatido en ω".

261. *Desarrollo.* Segun los principios que hemos recordado en el núm. 251, será preciso describrir desde un punto arbitrario S", y con un radio igual al apotema S'A', un círculo, y sobre este tomaremos un arco B"A"B"' que esté con la circunferencia total, en la razon de SA con S'A'; y el sector S"B"A"B"' representará el desarrollo de la napa inferior del cono, suponiendo que se ha abierto esta superficie al largo de la arista (BSA, B'S'*a*'). Pero como la napa superior se desarrolla al mismo tiempo que la primera, y por un movimiento contrario al rededor de la cúspide, que podremos considerar como inmóvil, esta segunda napa aplanada vendrá a ocupar un sector S"*a*"*b*"*a*"' igual al precedente, cuyos radios estremos serán las prolongaciones de S"B" y de S"B"'. Para hacer mas sensible la distincion de estos dos sectores, hemos supuesto que la napa superior se terminaba en un círculo $a_2b_2a_3$, de un radio un poco menor que el S"B", y hemos *puntuado* las partes del sector inferior que están cubiertas por el otro; sin embargo, para efectuar las construcciones de que vamos a hablar, será preciso que operemos siempre sobre el círculo primitivo B"A"B"'*b*". FIG. 64 Y 65.

262. Sentado esto, tomaremos sobre el radio S"A" que divide en dos partes iguales al primer sector, la distancia S"G"=S'G', y el punto G" será la posicion de la cúspide (G', G'). Tirarémos en seguida por un punto cualquiera (M, M') de la curba la jeneratriz SMF, cuya posicion S"F" sobre el desarrollo, la obstendrémos tomando el arco A"F"=AF; y como la verdadera distancia que hai desde la cúspide al punto (M, M' es igual a S'μ' (núm. 252), si tomamos una lonjitud S"M"=S'μ', el punto M" será la posicion actual de (M, M'). Los otros puntos se determinarán de un modo enteramente semejante, y la *transformada* de la rama inferior de la seccion cónica será P"M"G"N"I".

En cuanto a la otra rama, estará dividida en dos partes separadas,

porque el vértice (H, H') estaba colocado sobre la jeneratriz B'S'*a*', segun la cual se ha abierto el cono, y esta arista se ha transportado por una parte a S"*a*" y por la otra a S"*a*'". Por consiguiente, tomarémos sobre estas últimas rectas dos distancias S"H" y S"H'" iguales a S'H', y los puntos H" y H'" serán en la actualidad las posiciones del vértice H'. Tirarémos en seguida por un punto cualquiera (L, L') de esta rama la jeneratriz SLC, cuya posicion S"C" en el desarrollo, se hallará tomando el arco *a*"C"=AC; y sobre el radio S"C", no habrá, por último, mas que tomar la lonjitud S"L"=S'λ', que es la verdadera distancia que hai desde la cúspide al punto (L, L'). Por medio de operaciones análogas, hallarémos que la seccion dada en la napa superior del cono, tiene por transformada a las dos ramas H"L"R" y H'"K"V", a las cuales deben cortar, formando *ángulo recto*, los radios S"*a*'" y S"*a*'".

FIG. 64 Y 65. 263. Tratemos ahora de volver a hallar las asíntotas y observemos con cuidado que no estando situadas estas rectas sobre la superficie misma del cono, sino en los planos que la tocan al largo de las jeneratrices Sα y Sβ, conservarán sus posiciones primitivas con respecto a estas aristas, al rededor de las que no hacen sino jirar los planos tanjentes, cuando se desarrolla la superficie. Por consiguiente, principiemos por determinar estas aristas en el desarrollo, tomando para ello los arços A"α"=Aα, A"β"=Aβ, y tirando los radios S"*a*" y S"β"; tomarémos en seguida sobre las tanjentes en los puntos α" y β" las distancias α"θ"=$\alpha\theta$, β"φ"=$\beta\varphi$, y las rectas θ"O, φ"O, respectivamente paralelas a las jeneratrices S"α" y S"β", serán en la actualidad las posiciones de las asíntotas primitivas.

El punto O, en que estas rectas se cortan, debe hallarse sobre el radio S"A" a causa de la simetría de las construcciones precedentes, efectuadas a derecha e izquierda de este radio; pero es preciso que no creamos que este punto O es el mismo que la interseccion ω de las asíntotas primitivas, porque estas rectas han cambiado de posicion con respecto una de otra.

Sin embargo, las líneas θ"O y φ"O deben ser *asíntotas* relativamente a las diversas ramas de la transformada. Con efecto, como la forma de esta curba debe ser siempre la misma, sea cual fuere el plano sobre que se desarrolle el cono, podremos concebir que este desarrollo se ha efectuado sobre el plano que toca al cono al largo de la arista Sα; en

cuyo caso la asíntota $\theta\omega$ que se halla en este plano ha debido permanecer inmóvil, lo mismo que el elemento infinitamente distante, que tenia comun con la hipérbola; y como este elemento es aun comun a la recta $\theta''O$ y a la transformada, síguese que esta recta es una asíntota de la rama G''M''P''. Haremos el mismo raciocinio respecto a las otras ramas; o mas bien, este resultado no es sino una consecuencia de lo mismo que hemos demostrado respecto a una tanjente cualquiera (núm. 170.

264. *Sobre el punto de inflexion.* En la fig. 65, la rama de curba H''L''R'', que principia por volver su concavidad ácia la asíntota, concluirá precisamente por presentar su convexidad a esta especie de tanjente; por consiguiente, debe haber en ella un punto de inflexion, y es mui importante poder señalar el sitio en que tiene lugar esta notable circunstancia. Conseguirémos esto, apoyándonos en el lema siguiente de fácil demostracion: Siempre que una recta es oblícua a un plano, el ángulo agudo que forma con su proyeccion ortogonal sobre este plano, es el *mínimo* de todos los que esta recta forma con las diferentes líneas trazadas por su pie en este mismo plano; y el *máximo* de estos ángulos es el que la misma recta forma con la prolongacion de su proyeccion.

Sentado esto, sea PQR el plano secante y ABMDEF la seccion que este traza en el cono cuya base puede ser una curba cualquiera; si desde la cúspide S bajamos la perpendicular ST al plano secante, y tiramos por su pie T la tanjente TMD a la seccion, decimos que en el punto de contacto M se orijinará una inflexion en la transformada de la curba ABMDEF. Con efecto, dividamos a esta en *elementos*, y figurémonos que se ha ejecutado el desarrollo del cono sobre el plano tanjente S'TMP. En este caso, el ángulo SMT, que es *mínimo* respecto a la jeneratriz SM, será menor que el SMB, y por consiguiente, el lado MB tomará, despues del desarrollo, una posicion MB' colocada mas abajo de MT. En seguida de esto, y respecto a la jeneratriz SD, el ángulo *máximo* SDP será mayor que SDE; luego, despues del desarrollo, el lado DE ocupará una posicion DE' situada encima de DP. Por consiguiente, la transformada A'B'MDE'F' presentará claramente una *inflexion* respecto a su tanjente en M, que es prolongacion del elemento MD.

Y así, en el depurado 64, bajaremos sobre el plano secante PQR' la perpendicular S'T', que prolongarémos hasta que se encuentre con el plano *a'b'* de la base circular; y tirando por este punto de encuentro una

tanjente a esta circunferencia, obtendrémos la jeneratriz del cono sobre que está situado el punto de inflexion, lo que es mui suficiente para hallar la posicion exacta de este punto en el desarrollo de la fig. 65. El mismo método se aplicará tambien al depurado 63, en que la transformada presenta tambien una inflexion; pero no existirá este punto *singular*, si el pié de la perpendicular bajada de la cúspide S', cae en el interior de la seccion elíptica.

PROBLEMA 5. *Hallar la interseccion de un cono cualquiera con un plano, el desarrollo de la superficie y la transformada de la interseccion.*

265. Sea cual fuere el cono de que tratamos (supondrémos conocida en él la traza horizontal, porque ya sabemos construirla prolongando las jeneratrices hasta este plano fijo), no abrá mas que cortar a esta superficie y al plano dado, con una série de *planos ausiliares* tirados todos *por la cúspide*, y elejirlos, si queremos, *paralelos a la traza horizontal del plano secante*. En este caso, cada plano ausiliar producirá, en las dos superficies, secciones *rectilíneas* que serán fáciles de hallar. Creemos inútil o poco necesario el agregar a esto un ejemplo, cuando el mismo lector puede proponérselo; hacemos esto con tanta mas razon, cuanto que luego hallarémos construcciones análogas, en cuestiones mas jenerales.

266. *De las ramas infinitas.* Para conocer si la seccion del cono con el plano dado P tiene alguna rama de este jénero, es preciso, en jeneral, tirar por la cúspide un plano P' paralelo al P, y examinar si la traza horizontal del plano P' encuentra en alguna parte a la base del cono. Cuando estas líneas no tengan ningun punto comun, podrémos asegurar que ninguna de las jeneratrices del cono es *paralela al plano* P, y que así la seccion no tendrá sino ramas *cerradas*. Pero si la traza del plano P' corta a la base del cono en uno o mas puntos, las diversas jeneratrices G, G'..... que terminen en estos puntos serán evidentemente *paralelas al plano* P, y desde luego no encontrarán a este sino al infinito; por consiguiente, la seccion tendrá otras tantas *ramas infinitas*.

La *asíntota* de la rama correspondiente a la jeneratriz G, la obtendrémos determinando la interseccion del plano P con el plano tanjente tirado segun esta jeneratriz G. Si este plano tanjente coincidiese con P', lo que tendrá lugar cuando la traza horizontal de este último se halle ser

tanjente a la base del cono, en este caso decimos, la rama infinita *carecerá de atíntotas.*

367. En cuanto al *desarrollo* de la superficie cónica, será preciso dividir la base en arcos bastante pequeños para que sensiblemente se confundan con las cuerdas; echo esto, medirémos una de estas cuerdas y las dos aristas que terminan en sus estremos, y con estas tres rectas podrémos formar sobre un plano cualquiera, un triángulo que representará *un elemento superficial* del cono: en seguida, y a continuacion de este triángulo, construirémos del mismo modo el elemento adyacente que tendrá un lado comun con el precedente; y continuado lo mismo, obtendrémos todos los elementos del cono estendidos sobre un plano, lo cual nos dará por último resultado el desarrollo de esta superficie.

Es cierto que esta marcha, buena en teoría, nos daria poca exactitud en la práctica, sobre todo si las operaciones no se ejecutaban con mucha prolijidad; porque en el caso que nos ocupa, era preciso construir una série de triángulos, en los cuales uno de los lados es estremadamente pequeño respecto a los otros, y en que los errores parciales pueden acumularse. Sin duda ninguna, sería mas ventajoso conocer de antemano, en el desarrollo, una línea recta o circular, sobre la cual no abria mas que tomar arcos determinados, para fijar la nueva posicion de las jeneratrices. Esta ventaja se obtiene hallando la interseccion de un cono con una esfera concéntrica; pero este método, que esplicarémos mas adelante (núm. 330 y 331), no está tampoco exento de inconvenientes bastantes graves.

Una vez efectuado el desarrollo de un cono, ya sea por un método o por otro, construimos en él la *transformada* de una seccion plana, o la de cualqiera otra curba, tomando sobre los radios del desarrollo lonjitudes iguales a las que hai desde la cúspide del cono a los diversos puntos de esta curba, segun lo hemos visto en el número 252.

PROBLEMA 6. *Construir la interseccion de un plano con una superficie de revolucion.*

268. Tomemos por ejemplo el *toro*, de que hemos hablado ya en el núm. 138, que tiene por meridiano al círculo (A'B'C'B", AC), que jira al rededor de la vertical (O, O"Z') situada en su plano; en seguida, hallemos la interseccion de esta superficie con el plano M"T"T, que es la *tanjente* en el punto (M, M') de la napa *interior*, porque hemos notado FIG. 45.

precedentemente (núm. 138) que los planos tanjentes a esta napa deben cortar a la superficie.

Empleemos en el caso presente planos ausiliares que sean horizontales, y sea F'K'N' la traza vertical de uno de estos planos. Este corta al toro segun dos círculos cuyos radios son ON=I'N' y OM=I'K', miéntras que su interseccion con el plano M'T"T es la recta (F', F*f*) perpendicular al plano vertical; luego, los cuatro puntos F, F", *f"*, *f*, en que esta recta encuentra a los dos círculos, pertenecen a la curba pedida. Los otros puntos se hallan de un modo enteramente semejante; pero cuando lleguemos a los paralelos estremos D"B" y D'B', no hallarémos para cada uno de ellos sino dos puntos G y *g* o H y *h*; cuando si operamos sobre el plano horizontal V'M'L', hallarémos tres puntos R, *r* y M, de los cuales el último es el punto en que las ramas de la curba forman un *nudo*. En virtud de esto, la interseccion que buscamos tiene por proyecciones a

MHREFGE"M*hege*"M y G'H'.

Hemos puntuado las porciones de esta curba que se hallan debajo del equador y del círculo de la garganta, porque son *invisibles* sobre el plano horizontal; y sobre este mismo plano, debe *tocar* la curba a estos dos círculos en los puntos E, E", *e"* y *e*, atendiendo a que entónces el plano tanjente del toro es evidentemente vertical, y que así la tanjente de la curba y la del paralelo, que ámbas se hallan en este plano, se confunden en la proyeccion horizontal.

269. Hallemos ahora la tanjente de la curba en un punto cualquiera (F, F'), y como esta recta debe ser (núm. 213) la interseccion del plano M'T"T con el plano tanjente del toro en el punto (F, F'), construyamos en primer lugar este último. Segun el método jeneral espuesto núm. 133 y 134, es preciso trasladar el punto dado (F, F') al meridiano principal a (N, N'), y en seguida tirar la tanjente N'P', cuyo pie es evidentemente P; en seguida, despues de haber referido este punto P a π sobre la traza del meridiano OF, tirarémos perpendicularmente a este meridiano la recta $\pi\theta$, que será la traza horizontal del plano tanjente en el punto (F, F') del toro. Mui fácil nos sería hallar la traza vertical de este mismo plano; pero esto nos es aquí inútil; porque el punto θ, en que se cortan las rectas $\pi\theta$ y T"T, pertenece patentemente a la inter-

seccion del plano tanjente con el plano M'T'T, o bien a la tanjente hallada, que, por consiguiente, es la recta (θF, T'F').

Este método es insuficiente para obtener la tanjente de la seccion en el *punto singular* (M, M'), porque en este sitio se confunde el plano de la curba con el plano tanjente al toro; pero mas adelante enseñarémos (núm. 734) a efectuar esta interesante investigacion.

270. Para obtener la curba en sus verdaderas dimensiones, abatirémos el plano M'T'T haciéndole jirar al rededor de su traza horizontal T'T, y un punto cualquiera, tal como el (F, F'), permanecerá siempre sobre una perpendicular a la charnela, trasladándose a una distancia de esta indicada por T'F'. Por consiguiente, será mui fácil hallar el abatimiento de la seccion, la que no hemos ejecutado aquí con el fin de dejar leer con mas claridad las construcciones principales.

PROBLEMA 7. *Interseccion de un plano con un hiperboloide de revolucion de una napa.*

271. Sabemos (núm. 140) que esta superficie puede enjendrarse por una hipérbola que jire al rededor de su eje imajinario, o por la revolucion de una recta móvil al rededor de otra recta fija, cuyas rectas no se hallen en un mismo plano. Si partimos de la primera definicion, nos sería conocida la meridiana, y nos hallaríamos exactamente en el mismo caso del problema del núm. 268; esta es la razon porque haremos uso del otro modo de jeneracion de la superficie, y representarémos la recta fija por (O, O'Z'), y la recta móvil por (AD, A'D'). Suponemos FIG. 68. que esta última recta es *paralela al plano vertical*; porque siempre será mui fácil reducirla a esta posicion (núm. 149), si en un principio se le hubiese dado otra. La menor distancia entre las dos rectas es la horizontal (OD, D'), que describe el círculo de garganta (XDY, X'Y'), y el pie (A, A') de la recta móvil recorre el círculo AαB, que es la traza horizontal de la superficie. Nos limitarémos aquí a este corto número de datos para fijar el hiperboloide en cuestion, sin ejecutar la *representacion gráfica* de esta superficie *sobre el plano vertical*, en el que el contorno aparente sería una hipérbola (núm. 148); y a fin de que se perciba mejor la curba de interseccion sobre el plano horizontal, reducirémos la superficie a su napa inferior, es decir, que supondrémos que la recta móvil se termina en el punto (D, D'). Finalmente, recordarémos que la

jeneratriz del segundo sistema (núm. 141) es (BD, B'D'), y que trasladando estas dos jeneratrices paralelamente a sí mismas, a las posiciones (D'A', O*a*) y (D'B', O*b*), producirán, con su revolucion al rededor del eje vertical, *el cono asíntota* (núm. 146), cuya base será el círculo *ab*, y cuya cúspide (O, D') coincidirá con el centro del hiperboloide, que no es otra cosa que el centro del círculo de garganta.

272. Sentado esto, sean PQ y QR' las trazas del plano secante dado, en lo cual suponemos que el plano vertical de proyeccion se ha elejido de modo que sea perpendicular a este plano secante. Para hallar su interseccion con el hiperboloide, emplearémos tambien planos ausiliares horizontales, como el que tiene por traza vertical a (M'V'). Este plano encontrará a la jeneratriz (AD, A'D') en el punto (V', V), y por consiguiente, corta a la superficie de revolucion segun un círculo cuya proyeccion horizontal es la circunferencia VMN descrita con la distancia OV por radio; pero este mismo plano M'V' corta al plano dado PQR', segun una recta (M', IMN) perpendicular al plano vertical; luego, los puntos M y N comunes a esta recta y al círculo precedente, son dos puntos de la curba pedida sobre el plano horizontal; ademas, ámbos están proyectados verticalmente en M'. Tirando otros planos ausiliares paralelos al M'V', determinarémos los diversos puntos de la interseccion, que segun la inclinacion del plano PQR' puede ser una elipse, una parábola, una hipérbola o una variedad de estas curbas.

273. *De los vértices.* La recta (OP, R'Q), que manifistamente divide en dos partes iguales formando ángulo recto con ellas a todas las cuerdas paralelas a MN, es precisamente un eje de la curba, sea cual fuere el jénero de esta, si esta curba tiene puntos situados sobre este eje, estos serán los vértices, y es mui importante obtenerlos directamente. Para conseguirlo, será preciso hacer jirar la jeneratriz (AD, A'D'), hasta que llegue a encontrar a la (OP, R'Q) en un punto G; pero si por el contrario dejamos inmóvil a la primera de estas líneas, y hacemos jirar a la recta (OP, R'Q) al rededor de la vertical O, a quien corta en (O, R'), dicha recta irá a encontrar a la jeneratiz (AD, A'D') en un punto que llamarémos K, y que evidentemente se hallará *sobre el mismo paralelo* en que habria estado situado el vértice G; pero es fácil construir al punto K, que es la interseccion de la recta (AD, A'D') con el cono enjendrado por la revolucion de (OP, R'Q); porque despues de

haber descrito el círculo con el radio OP, base de este cono *ausiliar*, tirarémos por la cúspide (O, R') y por la jeneratriz (AD, A'D') un plano cuya traza horizontal AC hallarémos, con tirar por esta cúspide una paralela (R'C', OC) a la jeneratriz; en tal caso, como esta traza AC cortará al círculo OP en dos puntos F y E, nos dará a conocer a las dos aristas OF y OE del cono ausiliar, a quienes la jeneratriz (AD, A'D') encuentra, y por consiguiente, tendrémos tambien sus puntos de seccion K y L. Ahora, para volver de estos puntos a las verdaderas cúspides G y H, describirémos con los radios OK y OL dos círculos, cada uno de los cuales cortará a la recta OP, sobre el plano horizontal, en dos puntos; pero distinguirémos con facilidad cuál de ellos está verdaderamente situado sobre la línea indefinida (OP, R'Q), con trazar las proyecciones verticales K'G' y L'H' de estos dos círculos.

Es mui conveniente que la traza del depurado la principiemos por la construccion de las cúspides; porque una vez determinados estos puntos, podrémos tirar los planos ausiliares como el M'V', a distancias convenientes, y ademas, la indagacion de estas cúspides nos dará a conocer el jénero de la seccion, segun vamos a esplicar.

274 *Discusion.* 1.° Si la traza AC corta a la base del cono *ausiliar* descrito por la recta (OP, R'Q), y nos da dos aristas OF y OE que ámbas encuentren a la jeneratriz AD, la seccion nos presentará dos vértices situados sobre (OP, R'Q); y por consiguiente, esta curba es *una elipse* o *una hipérbola* cuya eje real es esta misma recta. Estos dos casos se distinguirán fácilmente uno de otro, con examinar si un plano cualquiera M'V' tirado entre los puntos (G, G') y (H, H') da, o no, algun punto de la curba. Ademas de esto, cuando la seccion sea elíptica, obtendrémos el segundo eje haciendo pasar un plano horizontal por el medio (ω, ω') del intervalo de los dos vértices. FIG. 68.

2.° Si de las dos aristas OF y OE, una es paralela a la jeneratriz DA, resulta que uno de los vértices se halla a una distancia infinita, y la seccion es *una parábola* que siempre tiene por eje a la recta indefinida (OP, R'Q).

3.° Cuando la traza AC sea tanjente al círculo del radio OP, las dos aristas OF y OE se confundirán en una sola recta: y el punto en que corte a la jenerairiz AD, despues de trasladado a la recta OP, nos dará el vértice único de la seccion que se reduce entónces al *sistema de dos rectas.*

Podríamos justificar esta asercion observando que una hipérbola cuyos dos vértices se reunen, se reduce a sus asíntotas; pero ademas, si nos tomamos el trabajo de construir el depurado relativo a la hipérbola que nos ocupa, reconocerémos que el plano AC tirado por la cúspide del cono *ausiliar*, es entónces tanjente a este cono, lo mismo que tambien lo es el PQR'; de modo que estos dos planos que coincidirian si se hiciese jirar uno de ellos al rededor de la vertical O, deben producir en el hiperboloide de revolucion, las secciones indicadas. Pero como el plano AC contiene ya a una jeneratriz DA, no puede cortar de nuevo a la superficie de segundo grado, sino segun otra seccion *rectilínea*, proyectada tambien sobre una tanjente al círculo de la garganta (núm. 141); luego así mismo el plano PQR' producirá en el hiperboloide una seccion compuesta de dos rectas análogas a las precedentes, que se cortarán en el punto hallado por única cúspide sobre la recta (OP, R'Q). Ademas, en este punto, será el plano PQR' tanjente (núm. 142) al hiperboloide.

En el caso mui particular en que la recta segun que se reunen las dos aristas OF y OE, fuese paralela a DA, el plano PQR' cortaria al hiperboloide segun dos jeneratrices paralelas entre sí, y no sería ya plano tanjente a la superficie, sino en un punto infinitamente distante.

4.° Finalmente, si la traza AC no encuentra absolutamente al círculo cuyo radio es OP, no hai ningun vértice real sobre (OP, R'Q), y la seccion es en este caso una hipérbola de la que esta recta es el eje imajinario. En este caso, la curba se construye siempre como en el núm. 272; pero para hallar el *centro*, y por consiguiente, el eje real, será preciso recurrir a las asíntotas, de las cuales hablarémos mui pronto; o bien, y esto es mas sencillo, tomarémos el medio ω' del intervalo de los dos puntos γ' y μ' en que el plano PQR' corta a las aristas D'B' y D'A' del cono asíntota. Esta regla está fundada en que siendo semejantes y concéntricas esta superficie y el hiperboloide, deben ser cortadas por el plano PQR' segun dos curbas que tendrán *un centro comun* (núm. 147). Pero respecto a la seccion causada en el cono asíntota, hemos visto (núm. 247) que estaban proyectados los dos vértices, sobre el plano vertical, en γ' y μ'; por consiguiente, el medio ω' de la distancia $\gamma'\mu'$, es a un mismo tiempo el centro de la seccion cónica y el de la seccion producida en el hiperboloide. Solo nos resta proyectar este punto a ω, sobre la línea OP, que ya sabemos es un eje de la curba; el plano horizontal tirado

por este punto nos dará el modo de hallar los dos vértices reales por el método del núm. 272.

275. Para obtener *la tanjente en un punto cualquiera* M de la seccion producida por el plano PQR', es preciso hallar la interseccion de este plano con el que toca al hiperboloide en M. Y como este último está determinado (núm. 142) por las dos jeneratrices rectilíneas que pasan por este punto; y como tambien sabemos (núm. 141) que sus proyecciones horizontales se obtienen tirando las tanjentes $\alpha_2 M\delta_2$ y $\beta M\delta$ al círculo de la garganta, síguese por consecuencia que los dos puntos α_2 y β, en que estas jeneratrices cortan al círculo OA, que es la traza horizontal del hiperboloide, pertenecerán precisamente a la traza del plano que buscamos; por consiguiente, esta traza será la recta $\alpha_2\beta T$, que por medio de su encuentro con PQ, nos dará el pie T de la tanjente TM, que se trata de construir. FIG. 68.

En verdad que las tanjentes al círculo de la garganta tiradas por el punto M, cortarán al círculo OA en cuatro puntos; pero no debemos combinar entre sí sino los dos que a un mismo tiempo se hallen del lado de acá o de allá de los puntos de contacto δ y δ_2 relativamente al punto M; porque las dos jeneratrices que buscamos deben cortarse en M, y por consiguiente (núm. 143) no podrán pertenecer al mismo sistema, lo que sucederia evidentemente con las rectas $\alpha_2\delta_2$ y $\alpha\delta$, así como tambien con las $\beta\delta$ y $\beta_2\delta_2$. Segun esto, la incertidumbre que nos podrá quedar, consistirá en saber si debemos combinar las dos rectas $\alpha_2\delta_2$ y $\beta\delta$, o las otras dos $\alpha\delta$ y $\beta_2\delta_2$; pero respecto a estas últimas que tienen sus estremidades inferiores en α y β_2, tendrémos que, evidentemente, el punto de seccion proyectado en M se hallará *encima* del círculo de la garganta, miéntras que el punto (M, M'), que es el que consideramos aquí, está sobre la napa inferior del hiperboloide; luego, es tambien preciso desechar este segundo par de jeneratrices, que deberia solo conservarse en un depurado en que el punto considerado M estuviese colocado sobre la napa superior de la superficie.

276. *Abatimiento.* Hagamos jirar al plano PQR' al rededor de su traza QR', para abatirlo sobre el plano vertical. En este movimiento, la horizontal (M', IMN) permanecerá perpendicular a la charnela, y se convertirá en M'*mn*, sobre cuya recta tomarémos las distancias M'*m* = IM y M'*n*=IN; de este modo, tendrémos dos puntos *m* y *n* de la curba

abatida. Los otros puntos se obtendrán de un modo semejante, así como tambien hallarémos la tanjente, cuyo pie T se trasladará a *t* y se convertirá en *tm*.

Como la superficie de que tratamos es *gausa*, como lo hemos demostrado en el núm. 145, no podrá cumplir con la condicion esencial del núm. 179, y por consiguiente no tiene lugar la cuestion de hallar su *desarrollo*. Observemos tambien que todas las operaciones precedentes se efectuarian de un modo enteramente análogo, si el plano secante PQR' fuese *oblicuo* al plano vertical de proyeccion, y tambien aun cuando señalásemos a la jeneratríz (AD, A'D') una posicion cualquiera; invitamos a los lectores hagan algun ejercicio con estos datos.

FIG. 68. 277. DE LAS RAMAS INFINITAS. Es mui importante saber conocer *a priori* si la seccion del hiperboloide con un plano cualquiera PQR' presenta o no ramas infinitas. Al efecto, es preciso tirar por el centro (O, D') del círculo de la garganta una paralela a la jeneratriz (AD, A'D'), y trazar la circunferencia *ab*, que describe el pie (*a*, A') de esta paralela, cuando jira al rededor del eje vertical O para enjendrar el *cono asíntota;* y como sabemos (núm. 146) que todas las aristas de este cono son respectivamente paralelas a las diferentes jeneratrices del hiperboloide, no habrá mas que tirar por la cúspide (O, D') un plano π paralelo a PQR', y ver si este plano π contiene alguna arista de esta superficie cónica.

1.° Cuando la traza horizontal del plano π no encuentra a la base del cono asíntota, no abrá ninguna arista del cono, y por consiguiente ninguna jeneratriz del hiperboloide que sea *paralela al plano dado* PQR'; luego, ningun punto de la seccion producida por este último plano, podrá estar situado al infinito, y desde luego esta seccion será cerrada y *elíptica*.

2.° Cuando el plano π corte a la base del cono asíntota en dos puntos, habrá sobre este cono dos aristas, y sobre el hiperboloide de *dos pares* de jeneratrices, que serán paralelas al plano PQR'; luego, la seccion causada por este último plano en el hiperboloide, nos presentará dos *ramas infinitas*, y será una *hipérbola*. Ademas, cada uno de estos dos pares de jeneratrices, compuesto de dos rectas paralelas, determinará un plano que será *tanjente* al hiperboloide (núm 153) en el punto infinitamente distante del encuentro de estas líneas; por consiguiente, la

interseccion de este plano tanjente *asintótico* con el plano dado PQR', será la que nos dará la *asíntota* de la rama correspondiente. Todo esto se aclarará con el ejemplo del núm. 278.

3.° Por último, si el plano π no hace mas que tocar a la base del cono asíntota, no habrá sobre este cono sino una sola arista, y sobre el hiperboloide *un solo par* de jeneratrices qe sean paralelas al plano dado PQR'; luego, la seccion no dará sino *una rama infinita*, y será una *parábola*. Ademas, esta curba no tendrá asíntotas, porque el plano tanjente tirado por estas dos jeneratrices será paralelo al plano PQR', como lo verémos claramente en el núm. 281.

278. Apliquemos estas reglas al caso del depurado 69, en que la jeneratriz (ADB, A'D'A") está prolongada tanto para arriba como para abajo del círculo de la garganta (XDY, X'Y'), con el objeto de limitar la superficie en dos círculos iguales A'B' y A"B", proyectados horizontalmente sobre AZBS. La jeneratriz del segundo sistema sería (BDA, B'D'B"); y estas dos jeneratrices, transportadas paralelamente al centro (O, D'), determinarian el cono asíntota que tiene por base al círculo cuyo radio es O*a*. Ademas, así como lo hemos hecho en el depurado precedente, no nos contraerémos a ejecutar la representacion gráfica del hiperboloide sobre el plano vertical, en el que no habrá sino líneas aisladas que todas serán visibles; solo sobre el plano horizontal es donde espresarémos la forma de la superficie, representando por puntuaciones diferentes las partes visibles y las partes ocultas. En cuanto al plano secante, estamos convencidos (núm. 108) que convendrá suponerlo como no existente, despues de haber cortado a la superficie, no dejando de él sino las trazas PQ y QR'. FIG. 69.

Sentado esto, si tiramos por la cúspide (O, D') del cono asíntota un plano D'F'F paralelo a PQR', veremos que este corta al círculo O*a* en dos puntos y al cono asíntota segun dos aristas proyectadas en OF y OE. Luego, si no consideramos ahora sino la primera OF, y le tiramos dos paralelas $\delta\alpha$ y $\varepsilon\beta$, que sean tanjentes al círculo de la garganta, estas serán dos jeneratrices del hiperboloide, que no irán a encontrar al plano PQR' sino al infinito, y que anunciarán la existencia de una rama infinitamente prolongada. Para obtener la asíntota, observarémos que debiendo contener el plano tanjente del hiperboloide en este punto infinitamente distante (núm. 153) a las dos jeneratrices $\alpha\delta$ y $\beta\varepsilon$, que se

cortan en este punto, tendrá por traza horizontal a la recta $\alpha\beta$; y como este plano debe por su interseccion con el plano PQR' darnos la asíntota pedida, esta línea será evidentemente *paralela* a $\alpha\delta$. Luego, si tiramos por el punto θ, en que se cortan las trazas PQ y $\alpha\beta$, la recta $\theta\omega$, paralela a $\alpha\delta$, esta será la asíntota que se trata de construir.

279. Podríamos repetir construcciones semejantes, respecto a la segunda rama infinita que está indicada por la otra arista OE del cono asíntota; pero debemos notar que en la operacion anterior, el plano $\delta\alpha\beta$ que tocaba al hiperboloide a una distancia infinita sobre la jeneratriz $\delta\alpha$, era él mismo *tanjente al cono asíntota* segun la arista OF. Con efecto, este plano contiene al diámetro $\delta O\varepsilon$ del círculo de la garganta, y por consiguiente a la arista OF; luego, su traza pasará por el punto F y será evidentemente perpendicular al radio OF. Segun esta observacion, será suficiente tirar al círculo del radio OE, la tanjente $E\varphi$ que por su encuentro con PQ, nos dará el punto φ por el cual deberemos tirar la asíntota $\varphi\omega$ paralela a OE. Esta segunda asíntota deberá cortar a la primera en un punto ω que esté situado sobre la recta OP, porque esta es siempre (núm. 273) un *eje* de la curba.

280. Si no quisiéramos emplear sino una sola de las dos jeneratrices $\delta\alpha$ o $\varepsilon\beta$ que van a terminar en el punto de contacto de la asíntota, podríamos apoyarnos en que siendo la superficie de revolucion, debe el plano tanjente ser perpendicular al plano meridiano que pasa por el punto de contacto (núm. 129). Pero en el caso presente, este punto está situado sobre $\alpha\delta$ a una distancia infinita; luego el meridiano correspondiente es el plano vertical OF paralelo a $\alpha\delta$; y así el plano tanjente que buscamos tendrá por traza horizontal a una recta perpendicular a OF tirada desde el punto α, lo cual nos volveria a dar a la línea $\alpha\beta$ hallada ya por el otro modo.

281. Si el plano D'F'F tirado por la cúspide del cono asíntota, paralelamente a PQR', tocase a este cono segun una sola arista, es decir, si tuviese la posicion D'B'*b*, vemos claramente (núm. 279) que él mismo sería tanjente al hiperboloide en el punto infinitamente distante colocado sobre la jeneratriz (BD, B'D'); pero ya que este plano tanjente es tambien paralelo a PQR', toda su interseccion estaria transportado al infinito; de modo que la curba de interseccion nos daria tambien *una rama infinita*, pero *que no tendria asíntota*.

282. Efectuemos ahora la traza de la curba segun la cual el plano PQR' corta al hiperboloide, y en primer lugar hallemos los *vértices* situados sobre el *eje* (OP, R'Q). Hemos visto (núm. 273) que para esto era preciso tirar la recta (R'C', OC) paralela a la jeneratriz (AD, A'D'), y unir los puntos C y A; pero como la traza CA no encuentra en este caso al círculo cuyo radio es OP, debemos concluir de aquí que no hai ningun vértice real sobre el eje de que tratamos, y que la seccion es una hipérbola cuyo *eje imajinario* es la línea (OP, R'Q). En tal caso, determinarémos el *centro* proyectando el punto de encuentro ω de las dos asíntotas sobre la línea R'Q en ω'; o sino (núm. 274) tomarémos el medio ω' del intérvalo de los dos puntos γ' y η', en que el plano PQR' corta a las dos aristas estremas del cono asíntota; y dando en seguida, por este punto ω', una seccion horizontal, segun el método núm. 272, obtendrémos los dos vértices *reales* G y H. Este mismo método aplicado a otros planos horizontales, como los M'V' y V"W", que sería bueno elijiésemos de modo que nos diesen secciones iguales en las dos napas, nos dará nuevos puntos M y N, μ y ν de la curba que buscamos. Ademas, esta línea deberá pasar evidentemente por los puntos T y S, en que el círculo ABS es encontrado por la traza PQ del plano secante, así como tambien por los puntos (Z, Z') y (U, Z'), en que este mismo plano corta al círculo superior A"B". FIG. 68.

En fin, como el plano PQR' encuentra al círculo de la garganta X'Y' en dos puntos que se proyectan verticalmente en L', concluiremos de aquí sus proyecciones horizontales L y K, en las cuales deberán *tocarse* este círculo y la hipérbola sobre el plano horizontal. Con efecto, aun cuando las tanjentes de estas dos curbas son, en el espacio, mui diferentes una de otra, ámbas se hallan en el plano tanjente del hiperboloide, que respecto a cada punto del círculo de la garganta es evidentemente *vertical;* de donde resulta que las proyecciones horizontales de estas dos tanjentes necesariamente se confundirán.

En cuanto a la tanjente a la seccion en un punto cualquiera (M, M'), su construccion se efectuaria por los mismos medios que en el núm. 275.

283. *Abatimiento.* Esta operacion la efectuaremos como en el depurado precedente, haciendo jirar el plano PQR' al rededor de su traza vertical QR', y tomando, sobre perpendicular esa esta charnala, las distancias M'*m*=IM, M'*n*=IN....

En cuanto a las asíntotas, abatiremos del mismo modo el centro (ω, ω') a ω''; y trasladando en seguida los puntos φ y θ a φ'' y θ'', hallarémos a $\varphi''\omega''$ y $\theta''\omega''$ por asíntotas de la curba abatida.

PROBLEMA 8. *Interseccion de una recta con un hiperboloide de revolucion de una napa.*

FIG. 66. 284. Colocamos aquí este problema, porque no es sino una estension del que hemos resuelto en el núm. 273, respecto a una recta *que encontraba al eje* de la superficie: y vamos a referir a este caso particular la cuestion actual, en que la recta propuesta tiene una posicion cualquiera. Sean, pues, (O, O'Z') el eje del hiperboloide, (ADB, A'D'B') la jeneratriz rectilínea, y (PQ, P'Q') la recta cuyos puntos de interseccion con la superficie se tratan de hallar. La supondremos reducida, por un movimiento de rotacion al rededor del eje, a una situacion paralela al plano vertical; esta operacion preliminar es siempre mui fácil de efectuarse, y como ademas deja el punto de interseccion con la superficie en el mismo paralelo en que estaba en un principio, será mui fácil volver a hallar este punto en la posicion primitiva.

285. Esto supuesto, si el plano vertical PQ *encuentra al círculo de la garganta* descrito con el radio OD, cortará a la superficie segun una hipérbola cuyo eje real será (XY, X'Y'), que tendrá por una de sus asíntotas a la recta (A'B', PQ) Por consiguiente, sería fácil, en virtud de estos datos, contruir esta curba sobre el plano vertical, y su encuentro con P'Q' nos daria entónces a conocer los puntos pedidos; pero nos proponemos llegar a este resultado por medio de construcciones *directas*, y en las que no entren sino la línea recta y el círculo. Para esto, figurémonos que la hipérbola de que acabamos de hablar, y que contiene los puntos que buscamos, jire al rededor de la vertical ω; en virtud de esto, producirá un segundo hiperboloide de una napa, cuyo círculo de garganta será ($X\delta Y$, X'Y'), y tendrá por jeneratriz rectilínea a la recta ($\alpha\beta$, A'B'); en cuyo caso la cuestion primitiva se reducirá evidentemente a hallar los puntos de interseccion de este nuevo hiperboloide con la recta (PQ, P'Q'), que encuentra a su eje (ω, O'Z'); y por consiguiente, nos hallamos otra vez en el caso del problema del núm. 273.

Por consiguiente, describirémos con el radio ωP, un círculo que será la base de un cono *ausiliar*, que tendrá por cúspide el punto (ω, R');

tirando en seguida la recta (R'C', ωC) paralela a la jeneratriz, determinarémos la traza αC de un plano que cortará a este cono segun las aristas ωE y ωF. Estas últimas líneas van a encontrar a la jeneratriz en los puntos (L, L') y (K, K'), que trasladarémos a la recta propuesta en (M', M) y (N', N); y estos últimos puntos serán los mismos en que la recta (PQ, P'Q') penetra al segundo y tambien al primer hiperboloide.

286. Si la proyeccion horizontal PQ de la recta propuesta, fuese *tanjente al círculo de la gargante* descrito con el radio OD, el plano vertical cortaria evidentemente al hiperboloide primitivo, segun dos rectas proyectadas sobre A'B' y sobre la recta simétrica de esta última; entónces, el encuentro de estas dos rectas con P'Q' nos daria inmediatamente los puntos que buscamos.

287. Finalmente, supongamos, como en la *figura* 67, que la recta propuesta (PQ, P'Q') se proyecte *fuera del círculo de la garganta* OD. Tambien en este caso el plano vertical PQ cortará a la superficie primitiva segun una hipérbola; pero su eje real estará dirijido segun la vertical R; de modo que haciendo jirar a esta curba al rededor de esta vertical, obtendrémos un hiperboloide *de dos napas*, y el problema no será tan sencillo. Esta es la razon porque trastornamos la cuestion primitiva, y nos proponemos hallar los puntos de interseccion de la recta (AB, A'B'), con el hiperboloide que describiria (PQ, P'Q') jirando al rededor de la vertical O; porque evidentemente estos nuevos puntos de seccion estarán a la misma altura que los primeros. FIG. 67.

Pero en este segundo hiperboloide, el círculo de la garganta que tiene por radio a (OB, R') precisamente es cortado por el plano vertical AB, y la cuestion está enteramente comprehendida en el caso del núm. 285; y así, despues de haber descrito el círculo de la garganta (XρY, X'Y') de otro tercer hiperboloide que tuviese por jeneratriz a la recta (πρ, P'R'), hallarémos, como arriba, los puntos (μ, M') y (ν, N'), en que a esta última línea encontrase la (AB, A'B'), cuando esta jirase al rededor de la vertical D; en seguida, tendríamos que transportar estos dos puntos sobre (AB, A'B'), dejándolos a la misma altura. Pero los últimos puntos obtenidos de este modo deberian en seguida, trasladarse por el problema primitivo, a (PQ, P'Q'), dejándolos aun en los mismos planos horizontales; por consiguiente, la operacion se reduce a transportar inmediatamente los puntos (μ, M') y (ν, N') a

(M, M') y (N, N'), que serán los puntos de encuentro de la recta (PQ, P'Q') con el primer hiperboloide descrito por la revolucion de (AB, A'B') al rededor de la vertical O.

CAPITULO III.

Intersecciones de dos superficies curbas.

PROBLEMA 1. *Interseccion de dos cilindros cualesquiera.*

FIG. 70. 288. Sean ABGKH la base o la traza horizontal del primer cilindro, y (AZ, A'Z') una de sus jeneratrices; sean tambien VLMYI y (V*v*, V'*v*') los datos análogos del segundo cilindro; de aquí deduciremos fácilmente (núm. 109) el contorno aparente de cada una de estas superficies sobre el plano horizontal y sobre el plano vertical; para obtener en seguida sus intersecciones, deberemos emplear *planos secantes* que sean a un mismo tiempo *paralelos a las jeneratrices de ámbos cilindros,* y en virtud de esta disposicion producirán en estas dos superficies secciones que evidentemente serán rectilíneas. Al efecto, tiremos por un punto cualquiera de la arista (AZ, A'Z') una recta (ZR, Z'R') paralela a las jeneratrices del segundo cilindro, y construyamos la traza RA del plano que pase por estas dos rectas; hecho esto, no necesitaremos ya sino tirar diversas paralelas a RA, para estar seguros de que estas son las trazas de planos adecuados para cortar los dos cilindros segun jeneratrices rectilíneas.

289. Consideremos el plano secante RA; este plano cortará al primer cilindro segun dos aristas proyectadas sobre A*aα* y C*c*γ, y al segundo segun las aristas proyectadas sobre L*l* y Q*q*: por consiguiente, estas cuatro rectas que se hallan sobre un mismo plano, nos darán por medio del encuentro de sus proyecciones cuatro puntos *a*, *α*, *c*, γ, que pertenecerán a la proyeccion horizontal de la interseccion de los dos cilindros. En seguida, si proyectamos sobre la línea de tierra los pies A, C, L, Q

de estas aristas, deduciremos de aquí sus proyecciones verticales, que tambien nos darán, por medio de sus mútuos encuentros, los puntos a' α', c', γ' de la curba de interseccion proyectada sobre el plano vertical; ademas será preciso, como medio de verificacion, que estos puntos a y a', α y α',.... se hallen de dos en dos sobre rectas perpendiculares a la línea de tierra.

Lo mismo ejecutaremos con cualesquiera otros planos secantes paralelos a RA; pero es bueno que empecemos el depurado por la determinacion de los puntos *notables* de que vamos a hablar, porque es mui esencial construir estos, y porque en seguida podremos proporcionar el número de planos secantes intermedios, en los intérvalos que quedan entre los puntos ya obtenidos.

290. *Puntos existentes sobre los planos límites.* Si paralelamente a RA tiramos las rectas MNB y GHI, de modo que cada una de ellas *sea tanjente a una de las bases* y al mismo tiempo *secante a la otra*, estas rectas serán las trazas de dos *planos límites*, entre los cuales se hallarán comprehendidos todos los puntos que son comunes a las dos superficies, porque fuera de estos límites vemos mui bien que los planos secantes paralelos a RA, no podrán cortar sino a uno solo de los dos cilindros. Ademas, si aplicamos al plano MNB el método jeneral, espuesto en el número precedente, obtendremos dos puntos (β, β') y (b, b'), en que las jeneratrices (Mm, M'm') y (Nn, N'n') serán, en el espacio, *tanjentes a la curba de interseccion*; y por consiguiente, este contacto deberá verificarse *sobre los dos planos de proyeccion*, segun se ve en el depurado que presentamos. Con efecto, la recta (Mβ, M'β') se halla evidentemente en el plano que tocase al cilindro LMN en el punto (β, β'); pero tambien está en el plano secante MBβ, que por hipótesis es tanjente al cilidro ABC al largo de la arista Bβ; luego, esta recta (Mβ, M'β') es la interseccion de los planos tanjentes a las dos superficies en el punto (β, β'), y por consiguiente [núm. 213] es tambien *tanjente a la curba*, segun la cual se cortan estas dos superficies.

Del mismo modo probaríamos que la arista (Nb, N'b') es tanjente a la curba de interseccion en el punto (b, b'); y así mismo el plano límite GHI nos dará los dos puntos (g, g') y (h, h'), en que las aristas (Gg, G'g') y (Hh, H'h') tocan a la curba.

291. *Puntos sobre los contornos aparentes.* Haremos pasar planos

secantes paralelos a RA, por los puntos A, K, X, Y (*), en que terminan las aristas que forman el contorno aparente de cada cilindro sobre el plano horizontal; en seguida, por el método jeneral del núm. 289, obtendremos los puntos (a, a'), (α, α'), (π, π'), (φ, φ'), (d, d') en los cuales la curba *tocará*, pero solo *sobre el plano horizontal*, a las aristas correspondientes. Con efecto, en el punto (α, α') por ejemplo, es distinta la tanjente de la curba en el espacio de la jeneratriz $(A\alpha, A'\alpha')$; pero estas rectas están contenidas ámbas en el plano que es tanjente al largo de $(A\alpha, A'\alpha')$ y como en el caso presente, este plano es precisamente *vertical*, resulta de aquí que la proyeccion horizontal de esta jeneratriz coincidirá con la de la tanjente; por consiguiente deberá tocar a la proyeccion de la curba sobre el plano horizontal, al propio tiempo que no tendrá esto lugar sobre el plano vertical.

Observemos ademas, que siempre será en alguno de los puntos de que acabamos de hablar, en los que se efectúe el paso de la parte visible a la invisible de la curba de interseccion, considerada en proyeccion horizontal. Prescindiendo de esto, daremos mui pronto una regla jeneral para distinguir unas de otras estas partes.

292. Así mismo, si por los pies V, U, T, G, de las aristas que forman el contorno aparente de cada cilindro sobre el plano vertical, tiramos planos secantes paralelos a RA, hallaremos puntos tales como $(\varepsilon, \varepsilon')$, en los cuales *tocará* la curba, pero solo *sobre el plano vertical*, a las aristas correspondientes tales como $(V\varepsilon, V'\varepsilon')$. Con efecto, esta jeneratriz y la tanjente de la curba en el punto $(\varepsilon, \varepsilon')$ se hallan ámbas situadas en el plano tanjente al largo de $(V\varepsilon, V'\varepsilon)$; y como este plano es en el caso presente perpendicular al plano vertical, las proyecciones verticales de estas dos rectas necesariamente se confundirán, y ciertamente no sucederá así con sus proyecciones horizontales. En cuanto a la arista $(Gg, G'g')$, es efectivo que toca a la curba a un mismo tiempo en los dos planos de proyeccion; pero esto depende de que, en la figura actual, es-

---

(*) *En el caso presente, es inútil tirar por el punto K un plano secante, porque este punto se halla fuera del espacio comprehendido por los planos límites.*

ta jeneratriz se halla al mismo tiempo sobre el contorno aparente y en el plano límite GHI.

Finalmente, tambien será en alguno de los puntos de que acabamos de hablar, donde se efectúe el paso de la parte visible de la curba a la invisible sobre el plano vertical, cuyas partes no son las mismas que en la proyeccion horizontal, por ser diferente el punto de vista (núm. 106).

293. *La tanjente en un punto cualquiera* (t, t') de la curba de interseccion, nos la dará a conocer la interseccion de los dos planos que tocan a los cilindros al largo de las aristas Tt y St; pero las trazas horizontales de estos planos son las rectas $T\theta$ y $S\theta$ tanjentes a las bases en los puntos T y S; luego, el punto θ en que se cortan estas dos rectas, pertenece a la tanjente pedida, la que por consiguiente es θt.

Cuando el punto θ en que van a encontrarse las trazas de los dos planos tanjentes, está mui distante, como sucede en el depurado de que tratamos, podemos servirnos del método siguiente. El plano secante MNB, que a un mismo tiempo es paralelo a las jeneratrices de los dos cilindros, debe cortar al plano tanjente $S\theta$ segun una recta $\mu\omega$ paralela a St, y el plano tanjente T segun otra recta $\lambda\omega$ paralela a Tt; luego el punto ω, en que se encuentran las líneas $\lambda\omega$ y $\mu\omega$, es precisamente comun a los dos pla-nos tanjentes, y por consiguiente es un punto de la tanjente que buscamos $t\omega\theta$.

Hasta ahora no hemos hablado sino de la proyeccion horizontal de la tanjente, porque como el punto (t, t'), que, para mayor claridad hemos elejido, se halla colocado sobre el contorno aparente relativo al plano vertical, la tanjente está proyectada sobre este mismo plano, segun la arista $T't'$; pero en cualquiera otro caso, será suficiente proyectar sobre la línea de tierra el pie θ de la taujente, y unirlo con t'; o sino construiremos, con facilidad, las proyecciones verticales de las dos rectas ausiliares $\lambda\omega$ y $\mu\omega$ que, por medio de su encuentro, nos darán un punto ω' de la tanjente proyectada sobre el plano vertical.

294. Observacion I. Para distinguir sobre la curba de interseccion de los cilindros, las partes visibles de la proyeccion horizontal, es preciso observar que si en el depurado existiese solo el cilindro ABK serian visibles todas las aristas que terminasen en el arco ABK, en tanto que las que terminasen en el AHK no lo serian; así mismo, si el cilindro XMY subsistiese solo, las aristas visibles serian las que terminasen en FIG. 70.

el arco XVY, y ninguna de las otras se verian. Pero cuando los dos cilidros existen simultáneamente, podrá suceder que una arista visible del primero quede en parte oculta por el segundo; mas, si esta arista llega a encontrar a una jeneratriz que sea visible en este último cilindro, dicha arista será tambien visible en este sitio. Pero cuando se halle un punto sobre una arista que sea invisible, no considerando sino el cilindro a que pertenezca, es evidente que con mayor razon permanecerá invisible este punto cuando a un mismo tiempo existan los dos cilindros, por consiguiente podemos sentar las dos reglas siguientes:

Será VISIBLE *un punto de la curba de interseccion, cuando resulte del encuentro de* DOS ARISTAS VISIBLES *ámbas, en cada cilindro considerado aisladamente.*

Será INVISIBLE *un punto de la interseccion, cuando provenga del encuentro de dos aristas,* DE LAS QUE *a lo ménos* UNA SEA INVISIBLE *en el cilindro a que pertenezca.*

Fácilmente aplicará el lector estas reglas a la proyeccion horizontal de la interseccion de los dos cilindros, supuesto que hemos indicado mas arriba cuales son las aristas visibles en cada superficie considerada aisladamente; y en virtud de esto, se penetrará fácilmente de las partes *seguidas* o *puntuadas* que presenta el depurado. En cuanto a la proyeccion vertical, tambien se aplican a ella las reglas precedentes, con tal que tengamos presente, que respecto a esta proyeccion las únicas aristas visibles sobre el primer cilindro, considerado aisladamente, son las que terminan en el arco TAG, y que las aristas visibles del segundo terminan todas sobre el arco VMU.

FIG. 70. 295. OBSERVACION II. El encuentro de dos cilindros puede tener lugar por *arranque* o por *penetracion*. Hai *arranque*, cuando las trazas MNB y GHI de los dos planos límites son, como en el presente depurado, tanjentes, una a la base ABKH, y otra a la XMY; porque en este caso hai en cada cilindro jeneratrices que no contienen ningun punto de la interseccion, y en virtud de esto, no hacen sino *arrancarse* mutuamente una parte de su superficie, en tanto que las partes correspondientes a los arcos MON y HKG conservan su integridad en toda su lonjitud. Importa ademas observar que en este caso, todas las partes de la interseccion formarán una rama *sola y no interrumpida*, que podrá recorrer un punto móvil con un movimiento conti-

nuo, sin dejar de hallarse a un mismo tiempo sobre los dos cilindros.

Por el contrario, cuando las trazas GHI y CAO de los dos planos límites son tanjentes *a la misma base*, como en la *fig.* 71, en este caso decimos que habrá *penetracion*, porque *todas las jeneratrices del cilindro* XOY entrarán en el otro cuerpo y trazarán sobre la napa correspondiente al arco AH, *la primera rama* cerrada; en seguida, saldrán del cilindro por *otra rama* tambien cerrada y situada en la napa CG. Ademas, estas dos curbas *de entrada* y *de salida* son totalmente distintas, y no tendrán ninguna parte comun por la cual pueda un punto móvil pasar de una a otra sin interrupcion; porqne estarán separadas en el cilindro grande, por las napas ABC y HKG, en que no existe ningun punto de interseccion. FIG. 71.

296. Observacion III. En todos casos, la interseccion no tendrá *ramas infinitas* si las dos bases son *curbas cerradas*. Con efecto, para que existiese una rama que se estendiese indefinidamente, era preciso que se hallase sobre uno de los cilindros una jeneratriz del uno paralela a otra jenerairiz del otro; pero entónces, segun la naturaleza de estas superficies, todas las jeneratrices serian paralelas entre sí en los dos cuerpos, y no tendria lugar la interseccion; o se reduciria esta a *una o mas rectas* correspondientes a los puntos de encuentro de las dos bases, cuyo jénero de línea no da lugar a ninguna discusion.

Cuando las dos bases, o una de ellas, son indefinidas, bastará examinar la posicion de los planos *límites* (uúm. 299) respecto a estas bases, para reconocer si alguno de los planos secantes intermedios puede llegar a cortar alguna de las bases a una distancia infinita.

Problema 2. *Interseccion de dos superficies cónicas.*

297. Sean (S, S') la cúspide del primer cono, y AB la curba que sobre el plano horizontal le sirve de base; (T, T') y DE los datos análogos del segundo cono; tirando, en este caso, tanjentes a las bases que sean perpendiculares a la línea de tierra, obtendrémos las rectas S'A' y S'B', T'D' y T'E', que formarán el contorno aparente de estas dos superficies sobre el plano vertical. En cuanto al plano horizontal, no hai sobre él otros límites que las trazas AB y DE; porque estando, en el caso presente, las cúspides proyectadas dentro de las bases, es imposible tirar por los puntos S y T tanjentes a estas curbas (núm. 119), FIG. 72.

lo cual sería necesario para obtener planos tanjentes *verticales*. Haremos ademas abstraccion de las napas superiores de los dos conos, con el objeto de no hacer invisible, en el plano horizontal, la rama de interseccion procedente de las napas inferiores, que es la que especialmente debe fijar nuestra atencion.

298. Para obtener la interseccion de estos dos conos, haremos uso de varios *planos secantes* tirados todos *por la recta* (ST, S'T') *que une las dos cúspides;* porque esta clase de planos no producirán en las dos superficies sino *secciones rectilíneas* fáciles de construir; y ademas, sus trazas horizontales deberán todas pasar evidentemente por el punto R. Consideremos pues, de entre todos estos planos, el que tiene por traza a la recta arbitraria RIFGH; este plano cortará al cono T segun dos jeneratrices proyectadas sobre TF y TG, y al cono S segun las otras dos proyectadas sobre SI y SH; y como esta última recta encuentra a las precedentes en los puntos K y M, síguese que estos dos puntos pertenecerán a la proyeccion horizontal de la interseccion pedida. No hacemos aquí caso de los puntos de seccion que nos produjese la arista SI, en virtud de que esta recta no va a cortar a las jeneratrices TF y TG sino encima de la cúspide T, y por consiguiente estos puntos pertenecerán a la rama de interseccion situada *sobre las napas superiores,* de las que hemos convenido en hacer abstraccion.

En cuanto al plano vertical, bastará proyectar sobre la línea de tierra los pies F, G, H de las jeneratrices que acabamos de combinar, y sus proyecciones verticales T'F', T'G', S'H' nos darán, por medio de su encuentro, los puntos K' y M' de la curba de interseccion proyectada sobre este plano; ademas, sabemos que estos últimos puntos deberán estar relacionados con K y M, por la condicion de hallarse de dos en dos sobre una misma perpendicular a la línea de tierra, cuya condicion podria tambien servir para deducir aquellos de estos, no empleando para ello sino una sola jeneratriz sobre el plano vertical. De un modo enteramente semejante operaremos con cualesquiera otras rectas que salgan del punto R; pero recomendamos principiar la traza del depurado, por la indagacion de los varios *puntos notables* de que vamos a hablar; porque es mui esencial la construccion de estos; y una vez fijada su posicion, nos será fácil proporcionar el número de planos secantes intermedios, a los intérvalos que queden entre los puntos hallados ya.

299. *Puntos sobre los planos límites.* Si la traza R de la línea (ST, S'T') no está situada dentro de las dos bases, podremos, desde este punto, tirar dos rectas RPQ y RUV, de modo que cada una de ellas sea a un mismo tiempo *tanjente a una de las bases y secante respecto a la otra:* en este caso estas rectas serán las trazas de los planos secantes *límites*; porque vemos mui bien que cualquier plano tirado por las dos cuspides que se hallase fuera del espacio angular VRQ, no encontraria sino a uno solo de los dos conos, y por consiguiente no podria contener ningun punto de su interseccion. Ademas, si aplicamos al plano límite RPQ el método jeneral de construccion indicado en el número precedente, hallaremos el punto (L, L'), en que la jeneratriz (SLQ, S'L'Q') es *tanjente a la curba de interseccion* en el espacio, y este contacto deberá efectuarse *sobre los dos planos de proyeccion*, segun se ve en el depurado que presentamos. Con efecto, la jeneratriz (SQ, S'Q') está contenida en el plano límite RQ, que por hipótesis es tanjente al cono T segun la arista TLP, y por consiguiente en el punto (L, L'); pero esta jeneratriz (SQ, S'Q') se halla tambien evidentemente en el plano que toque al cono S en el punto (L, L'); luego es la interseccion de los planos tanjentes tirados a las dos superficies por el punto (L, L'), y por consiguiente (núm. 213) es tambien tanjente a la curba segun la que se cortan estas dos superficies. FIG. 72.

Del mismo modo probaríamos que el plano RUV nos da un punto (N, N'), en que la arista (SV, S'V') toca a la curba sobre los dos planos de proyeccion.

300. *Puntos sobre los contornos aparentes.* Haremos pasar planos secantes por los pies B, E, D, en que terminan las aristas que forman el contorno aparente de cada superficie, y por el método jeneral del núm. 298, obtendremos los puntos (β, β'), (b, b'), (ε, ε'), (δ, δ'), en que la curba *toca*, pero solo *sobre el plano vertical*, a las aristas correspondientes. Con efecto, en el punto (β, β'), por ejemplo, la tanjente a la curba en el espacio es mui diferente de la jeneratriz (SB, S'B'); pero estas dos rectas se hallan ámbas en el plano S'B'B que es tanjente al largo de esta jeneratriz; y como este plano es evidentemente perpendicular al plano vertical, resulta de aquí que la tanjente y la jeneratriz de que hablamos, se confundirán en la proyeccion vertical; por consiguiente, será preciso que la recta S'B' *toque* a la curba sobre el plano vertical,

en tanto que SB estará léjos de ser tanjente a la proyeccion horizontal.

Observemos, ademas, que siempre será en alguno de los puntos de que acabamos de hablar, donde se efectuará el paso de la parte *visible* a la *invisible* de la curba de interseccion; esta es la razon porque es mui importante conocer los puntos situados sobre los contornos aparentes con preferencia a otros puntos, aunque estén mui próximos a estos. Ademas daremos mui pronto una regla jeneral para discernir los arcos visibles de los invisibles en la curba de interseccion.

FIG. 72. 301. *La tanjente en un punto cualquiera* (M, M') de esta curba, nos la dará a conocer (núm. 213) la interseccion de los dos planos que toquen a los conos segun las aristas SMH y TMG; y como las trazas horizotales de estos planos son las rectas Hθ y Gθ tanjentes a las bases; síguese que el punto θ, en que se cortan estas últimas rectas, es el pie de la tanjente que por consiguiente, tiene por proyeccion horizontal a la recta θM. En cuanto a la proyeccion vertical θ'M', la obtendremos proyectando el punto θ a la línea de tierra en θ'.

302. Podemos tambien proponernos hallar el punto mas bajo y mas alto de la curba de interseccion, es decir los puntos en que *la tanjente es horizontal*. Para esto es preciso, en primer lugar, hallar un plano secante R*x*X de tal naturaleza que corte a las bases en dos puntos *x* y X, en que las tanjentes *xy* y XY sean paralelas: esta primera indagacion, que será mas o ménos fácil segun sea la naturaleza de las curbas AHB y DGE, podrá efectuarse siempre de un modo suficientemento exacto, por medio de un corto número de ensayos hechos con diversas secantes tiradas desde el punto R, y en cuyo estremo las tanjentes a las dos bases converjan en sentido contrario. Sentado esto, aplicarémos al plano secante R*x*X el método jeneral del núm. 298, y obtendremos un punto (ξ, ξ'), en el cual la tanjente a la curba de intersecion se hallará a un mismo tiempo en los dos planos tanjentes al largo de las aristas T*x* y SX; pero como estos tienen por trazas a *xy* y XY que, por hipótesis, son paralelas entre sí, no podrán cortarse sino segun una recta que será tambien paralela a XY, y por consiguiente horizontal. Luego el punto (ξ, ξ') será el punto *mas bajo* de la curba de interseccion, y el punto *mas alto* lo hallaríamos de un modo análogo.

303. Observacion I. Para discernir en la proyeccion vertical de la

interseccion los arcos *visibles* de los que no lo son, es preciso observar que si el cono S fuese el único que existiese en el depurado, tendríamos que las aristas que terminasen sobre el arco AQB serian todas visibles sobre el plano vertical, en tanto que las que cayesen sobre el arco AVB no se verian : así mismo, si solo el cono T existiese, las aristas visibles de esta superficie serian las que terminasen sobre el arco DPE, y todas las demas serian invisibles. Pero cuando los dos conos existan simultáneamente, como en la presente cuestion, podrá suceder que una arista visible sobre el primero, esté oculta en su totalidad o en parte de ella por el segundo. Sin embargo, si esta arista llega á encontrar á una jeneratriz tambien visible en esta última superficie, es claro que entónces dicha arista será visible en este sitio. Por otra parte, siempre que se halle un punto sobre una arista que sea invisible, no considerando sino el cono a que pertenece, es cierto que con mayor razon será invisible este punto, cuando existan a un mismo tiempo las dos superficies. Por consiguiente, podemos sentar las dos reglas siguientes, con cuyo ausilio distinguirá fácilmente el lector, las partes *seguidas* o *puntuadas* de las líneas que sobre el plano vertical contiene el depurado que presentamos.

Será VISIBLE *un punto de la curba de interseccion, siempre que resulte del encuentro de* DOS JENERATRICES VISIBLES *ámbas en cada superficie considerada como si ella sola existiese.*

Será INVISIBLE *un punto de la interseccion, cuando resulte del encuentro de dos jeneratrices,* DE LAS QUE, *a lo ménos,* UNA SEA INVISIBLE *sobre la superficie a que pertenezca.*

Estas dos reglas son tambien ciertas en la proyeccion horizontal; pero aquí, en que las dos cúspides están proyectadas dentro de las bases, no hai plano tanjente que sea *vertical*, y por consiguiente (núm. 106), todas las aristas de los dos conos son visibles sobre el plano horizontal, cuando cada una de las superficies existe sola, hacemos abstraccion de las napas superiores, segun hemos convenido en los datos de la cuestion. Por consiguiente, la aplicacion de la primera regla nos dice que la curba de interseccion es enteramente visible sobre el plano horizontal, y que por lo tanto debe representarse con un *trazo seguido*.

304. Observemos aun que las reglas precedentes son tambien apli-

cables a las intersecciones de dos superficies cualesquiera, con tal que entendamas por la palabra *jeneratriz* la línea recta o curba que, por medio de su movimiento, produce la superficie particular de que tratamos; y que despues de haber determinado (núm. 106) el contorno aparente de esta superficie sobre cada uno de los planos fijos, nos dediquemos a reconocer cuáles son las porciones de jeneratrices situadas *delante* o *encima* de este contorno aparente.

305. Observacion II. Tanto en la interseccion de dos conos como en la de dos cilindros (núm. 296) puede haber *penetracion* o *arranque*. El primer caso tiene lugar en el depurado que presentamos, porque las trazas RUV y RPQ de los dos planos límites son tanjentes *a la misma base;* pero esta *penetracion* no siempre escluye la existencia de ramas infinitas, como lo veremos en el depurado 73. Habria *arranque* cuando uno de los planos límites es tanjente a la primera base, y el otro tanjente a la segunda.

FIG. 73. 306. De las ramas infinitas. Tomemos por ejemplo de estas investigaciones los dos conos representados sobre el plano vertical por D'S'E' y A'T'B, y cuyas bases son la elipse DFE y el círculo AHB. Si en primer lugar determinamos los planos *límites* (núm. 299), hallarémos que las rectas RL y RK son tanjentes al círculo y secantes a la elipse; cada una de estas trazas, la RL por ejemplo, nos dará en seguida tres aristas proyectadas sobre TN, SM y SL, situadas en el mismo plano; y cuyos encuentros nos darán tambien los dos puntos λ y μ, en que las jeneratrices SL y SM tocarán a la curba (núm. 299). Respecto a otro plano secante RIGHF situado entre los planos límites, obtendrémos cuatro aristas que solo nos darán tres puntos y, φ y f de la interseccion, porque en el caso actual no tendrá lugar el encuentro de las dos jeneratrices TH y SG sino por el lado de arriba de las cúspides T y S, y por consiguiente sobre la napa superior de los dos conos, de la que hacemos abstraccion por el mismo motivo que en el núm. 297.

Los puntos cuyas proyecciones horizontales acabamos de determinar se hallarán sobre el plano vertical, proyectando sobre la línea de tierra los pies de las jeneratrices producidas por cada plano secante, y uniendo estos últimos puntos con T' y S'. Ademas, si consideramos las jeneratrices relativas al contorno aparente de los dos conos, que segun la presente disposicion de los datos, están las cuatro situadas en el

plano vertical RST, obtendrémos inmediatamente los puntos d', δ', ε', que será preciso proyectar sobre RT a d, δ, ε; y en seguida, como los puntos V y U, en que se cortan las dos bases, forman evidentemente parte de la interseccion de los dos conos, esta curba se presentará en el caso actual bajo la forma de dos ramas distintas

$$(df\lambda\varphi\delta xd,\ d'f'\lambda'\delta') \text{ y } (V\mu\gamma\varepsilon U,\ V'\mu'\varepsilon').$$

307. Si hubiéramos tomado en consideracion las dos napas superiores, habria habido otra tercer rama de interseccion; pero en todos los casos en que las bases de los conos sean curbas de segundo grado, la totalidad de las ramas de interseccion deberá formar, sobre cada plano de proyeccion, un sistema de líneas tales, que una recta no podrá encontrar en mas de *cuatro* puntos. Con efecto, siendo entónces las equaciones mismas de las dos superficies cónicas de segundo grado, no podremos venir a parar, por medio de la eliminacion de una de las variables x, y o z, sino a una equacion final que a lo mas será de cuatro grado; de modo que la combinacion de esta última equacion con la de una recta cualquiera, no nos dará jamas mas de cuatro soluciones comunes.

308. En el depurado que presentamos, hemos dispuesto las dos bases y las cúspides de modo que el plano vertical RST divida, en dos partes iguales, a todas las cuerdas que en cada superficie cónica le son perpendiculares, como a VU, LK....; y así este plano, es *un plano* PRINCIPAL *comun a estas dos superficies de segundo grado.* Pero sabemos que entónces la curba de interseccion no solo es simétrica a los dos lados de este plano, sino que ademas se proyecta, la totalidad de ella, sobre este plano principal, segun *una línea de segundo grado (*);* por consiguiente, las curbas $\varepsilon'\mu'V'$ y $\delta'\lambda'd'$ son aquí porciones de una misma *hipérbola.* Ademas, la rama $\lambda'\delta'$ prolongada hasta el encuentro de las dos jeneratrices A'T' y E'S', principiará a recibir la proyeccion de la curba segun la que se cortan las napas superiores de los dos conos.

309. Por una consecuencia de la simetría que presenta la intersec-

---

(*) *Véase el* Análisis aplicado a la Jeometría de las tres dimensiones, *cap. IX.*

cion de estos dos conos a una y otra parte del plano vertical RST, es por la que esta curba corta bruscamente, a las jeneratrices del contorno aparente en los puntos d', δ' y ε'; en lugar de que, en jeneral, una curba situada sobre una superficie cualquiera debe *tocar, en proyeccion,* al contorno aparente en el punto en que le encuentre. Con efecto, respecto a este punto, la tanjente de la curba y la del contorno aparente están ámbas situadas en un plano tanjente que es perpendicular (núm. 106) al plano de proyeccion, y por consiguiente se confunden las proyecciones de estas dos tanjentes; pero cuando como aquí sucede al punto (d, d'), la tanjente de la curba es *perpendicular al plano vertical,* entónces la proyeccion de esta recta se reduce a un solo punto d'; y como el *elemento* que ha sido comun a la curba y al contorno aparente llega a desaparecer sobre la proyeccion vertical, no presentan ya estas dos líneas ningun contacto entre sí.

310. Examinemos ahora si la interseccion presenta *ramas infinitas,* y para esto indaguemos si *sobre uno de los conos existe alguna jeneratriz que sea paralela a alguna de las jeneratrices de la otra superficie cónica;* porque si no tiene lugar esta circunstancia, no podrá efectuarse el encuentro de dos aristas situadas en un mismo plano sino a una distancia infinita, y por consiguiente ninguna rama de la interseccion se estenderá indefinidamente.

FIG. 73. Con el fin de reconocer si existe en los dos conos dos aristas que sean respectivamente paralelas, nos figurarémos que el cono T, por ejemplo, se ha transportado *paralelamente a sí mismo,* hasta que resbalando su cúspide sobre la recta (TR, T'R'), llegue a coincidir con la cuspide (S, S'); en seguida, contraeremos la traza horizontal de este cono que hemos transportado, al cual llamarémos el cono T''. Para obtener esta nueva base, que será una curba *semejante* a AVB, será preciso, en jeneral, tirar desde el punto (S, S') varias rectas paralelas a las aristas del cono primitivo T, y hallar sus trazas horizontales; pero cuando el cono T tenga por base a un círculo, como sucede en el ejemplo presente, bastará, evidentemente, tirar la recta (S'a', Sa) paralela a (T'A', TA), y la recta (S'b', Sb) paralela (T''B', TB), y en seguida describir un círculo con la distancia ab como diámetro. Ademas, este círculo, o jeneralmente la traza del cono T'', deberá ser tanjente a los dos planos límites RL y RK; porque estos tocaban al cono T, y como pasan por la recta (TR, T'R'), al largo

de la cual ha resbalado la cúspide del cono móvil, estos continuarán siendo tanjentes a esta superficie transportada a T".

311. Sentado esto, si la nueva base aQb no tiene ningun punto comun con la base DLE del cono inmóvil S, tampoco los dos conos S y T" tendrán ninguna jeneratriz comun, y por consiguiente no habrá en los conos S y T aristas paralelas; porque dos aristas que cumpliesen con esta condicion, evidentemente deberian coincidir, cuando la cúspide T llegase a S. Luego, en este caso, la interseccion de los dos conos no tendrá ninguna rama infinita.

312. Si, como sucede en el depurado que presentamos, la base aQb corta en alguna parte, por ejemplo en Q, a la base DLE del cono inmóvil S, los dos conos S y T" tendrán una jeneratriz comun SQ; y en seguida, cuando restituyamos T" a T, esta jeneratriz será la arista TP paralela a SQ; y así estas serán las dos jeneratrices respectivamente paralelas en los conos primitivos T y S, y sus pies P y Q deberán hallarse patentemente sobre una recta que termine en R, que será la traza del plano que contiene a estas dos aristas. En este caso, a medida que los planos secantes se aproximen a RQP, estarán las dos aristas que nos den, mas próximas a ser paralelas, su punto de seccion estará tambien mas distante, y por último se hallará a una distancia infinita cuando lleguemos a las dos jeneratrices SP y SQ; de modo que habrá una rama infinita $\varepsilon\mu V$ que converjirá ácia una u otra de estas jeneratrices. Una consecuencia análoga tendrá lugar respecto a la rama εU, cuya prolongacion indefinida está indicada por las dos jeneratrices paralelas Sq y Tp, a que nos conduce el segundo punto de seccion q del círculo aQb con la elipse DLE; y ademas, los dos mismos pares de jeneratrices paralelas, nos darán tambien los puntos infinitamente distantes de la rama de interseccion producida por las dos napas superiores, que no hemos creido conveniente representar en el presente depurado.

313. *De las asíntotas.* Cuando una rama infinita $\varepsilon\mu V$ resulta, como en el caso presente, de un punto de *seccion* verdadera entre las bases DLE y aQb, esta rama admite una asíntota. Con efecto, como esta asíntota es la tanjente de la curba en el punto infinitamente distante ácia el cual se dirijen las dos jeneratrices paralelas TP y SQ, dicha asíntota nos la dará la interseccion de los planos tanjentes a los dos conos, al FIG. 73.

largo de estas jeneratrices; pero como estos planos tienen por trazas a las rectas Pθ y Qθ tanjentes a las bases, y que *no son paralelas entre sí*, el punto θ en que se corten estas trazas, pertenecerá a la asíntota pedida, que será la recta θω tirada *paralelamente* a SQ; porque como estos dos planos tanjentes son paralelos a SQ, no podrán cortarse sino segun una línea paralela a esta jeneratriz.

La otra arista ξω se obtendrá de un modo enteramente semejante, y en razon a la simetría de los presentes datos a uno y otro lado del plano vertical RST, esta asíntota deberá cortar a la primera sobre la recta RT; ademas, estas dos asíntotas serán al mismo tiempo el límite de las tanjentes a la rama de interseccion de las dos napas superiores.

314. Proyectando el punto θ o ξ a la línea de tierra, y tirando una paralela a la jeneratriz S'Q', tendríamos la asíntota comun a las dos ramas μ'V' y λ'δ' de la hipérbola que recibe la proyeccion vertical de la interseccion; pero las consideraciones precedentes no nos proporcionan la segunda asíntota de esta hipérbola. Es fácil percibir la razon de esta diferencia; porque las ramas μ'ε' y λ'δ', aunque son indefinidas, no contienen ningun punto de la interseccion del otro lado de ε' y de d', y segun esto están verdaderamente *limitadas*, en tanto que se las considere como pertenecientes a la vez a los dos conos, y por consiguiente bajo este punto de vista, que es el mismo del problema que nos ocupa, no admiten asíntotas. En lugar que, de las dos remas μ'V' y λ'δ', la primera es verdaderamente indefinida bajo todo aspecto (num. 312); y aun cuando la segunda parezca terminarse en el punto δ', cuando se la mira como el lugar de los puntos comunes a las dos superficies cónicas, sin embargo, despues de un intérvalo *imajinario* bajo este concepto, vuelve esta rama a ser *réal*, efectuándose esto desde el punto de encuentro de las jeneratrices A'T' y E'S'; porque entónces recibe la proyeccion de la interseccion de las dos napas superiores (núm. 308), que tambien es una curba indefinida. Y así, por este motivo, el método de las intersecciones debia darnos la asíntota de esta rama de hipérbola.

FIG. 73. 315. *Rama infinita sin asíntotas.* Si hubiese sucedido que despues de efectuada la construccion del núm. 310, la base *a*Q*b* del cono T" hubiera *tocado* a la base DLE en un punto tal como Q; entónces la arista SQ habria sido comun a los dos conos S y T", y por consiguiente las superficies S y T hubieran tambien tenido

dos jeneratrices paralelas SQ y TP; por consiguiente, la interseccion presentaria aun una rama infinita, pero esta curbá no tendria asíntota. Con efecto, como las bases DLE y *aQb* tienen, en la actual hipótesis, *una tanjente comun* en Q, coincidirán completamente las planos tanjentes a los conos S y T" en todo el largo de la arista SQ; luego, cuando T" se haya vuelto, paralelamente a sí mismo, a la posicion primitiva T, los planos tanjentes en toda la lonjitud de las jeneratrices SQ y TP, se hallarán *paralelos entre sí;* y entónces su interseccion, que debe ser la asíntota pedida, se trasladará toda ella a una distancia infinita, es decir que no existirá ya para nosotros. Esto es lo que sucede en una parábola comun, en que las tanjentes no tienen límite finito.

PROBLEMA 3. *Interseccion de un cono y de un cilindro.*

316. Como esta cuestion tiene mucha analojía con los dos problemas precedentes, nos contentarémos con indicar su solucion por medio de una figura en perspectiva. Sean, pues, SAB el cono y CDE el cilindro propuestos: tirarémos por la cúspide S una parélela SR a las jeneratrices del cilindro; y considerando que por esta recta se han tirado diversos planos secantes, estos evidentemente producirán en las dos superficies, secciones *rectilíneas* mui fáciles de construir, y cuyos puntos mútuos de encuentro serán pertenecientes à la curba pedida. FIG. 74.

317. Los planos secantes *límites* se obtendrán tambien, tirando por el punto R dos rectas RK y RL, cada una de las que sea a la vez tanjente a una de las bases y secante respecto a la otra, y estos planos nos darán los puntos en que es *tocada* la curba por las aristas del cono o por las del cilindro, segun corte el plano límite RL a una u otra de estas superficies. (Véase núm. 299).

318. Cuando las dos bases son curbas cerradas, no habrá *ramas infinitas* sino en caso de que una de las jeneratrices del cono sea paralela a las aristas del cilindro, cuya circunstancia reconocerémos inmediatamente, porque en tal caso la recta SR deberá precisamente terminar sobre contorno de la base ALRK. Y aun será preciso que la tanjente en este punto pueda cortar a la base del cilindro; sin lo cual ninguna rama de la interseccion converjiria ácia la jeneratriz SR, como es fácil conocer construyendo la figura relativa a este caso particular.

PROBLEMA 4. *Interseccion de una esfera y un cono concéntricos.*

FIG. 75. 319. Sean (S, S') la cúspide y ABCDE..... la base del cono propuesto; sean así mismo XKY y X'Z'Y' las proyecciones de la esfera que tiene su centro en (S, S'), y que en el caso presente supondrémos reducida al hemisferio superior, con el fin de dejar ver la curba de interseccion sobre el plano horizontal. Para cortar estas dos superficies, emplearémos planos verticales tirados por la cúspide (S, S'); entre todos estos planos secantes el que tiene por traza a la recta arbitraria SM, encuentra a la base del cono en el punto M, y por consiguiente corta a esta superficie segun la arista (SM, S'M'), en tanto que en la esfera da por seccion un círculo máximo. Por consiguiente, si aplicamos este plano SM al meridiano principal SY, el círculo máximo coincidirá con X'Z'Y', y la jeneratriz vendrá a ser (SP, S'P'), en tal caso estas dos líneas se cortarán en el punto (Q, Q'), bastará restablecer este, por medio de un arco de círculo horizontal, al punto (*m*, *m*') de la jeneratriz primitiva, y así se hallará un punto de la curba de interseccion del cono con la esfera.

320. Será mui bueno que apliquemos, al mismo tiempo, la construccion precedente a los dos planos meridianos SM y SN que encuentran a la base del cono en dos puntos M y N situados a igual distancia de S; porque por medio del mismo paralelo RQ' de la esfera, obtendrémos otro segundo punto (*n*, *n*') situado sobre la jeneratriz (SN, S'N'), la que evidentemente viene tambien a aplicarse sobre S'P'. Ademas, sirviéndonos del mismo procedimiento, deberemos construir especialmente los puntos de la curba de interseccion que estén situados sobre las aristas

(SA, S'A'), (SB, S'B'), (SE, S'E'), (SF, S'F'),

las cuales forman el contorno aparente del cono, o están colocadas en el meridiano que da a conocer el contorno aparente de la esfera, porque así obtendrémos los cuatro puntos

(*a*, *a*'), (*b*, *b*'), (*e*, *e*'), (*f*, *f*'),

en que la curba debe, en el plano vertical, *tocar* a uno u otro de estos contornos aparentes. Ademas, segun la regla establecida en el núm.

304, en uno de estos puntos será siempre en el que se efectue el paso de la parte *visible* a la *invisible* en la proyeccion vertical, por ejemplo, en el presente caso, tiene lugar este paso en (*b*, *b*'), y no en (*a*, *a*'), porque la arista (SA, S'A') está ya detras del meridiano (SX, Z'X'); cuando a la otra estremidad de la curba, este paso se efectúa en el punto (*e*, *e*'), porque la jeneratriz (SE, S'E') está delante del meridiano (SY, Z'Y').

En cuanto a la proyeccion horizontal, es visible en su totalidad, porque suponemos que se ha quitado el hemisferio superior, que la superficie cónica se ha reducido a su napa inferior, y que tiene su cúspide proyectada dentro de la base, en este caso no admite por plano tanjente ninguno que sea vertical (núm. 303).

321. Es mui interesante determinar la posicion exacta del punto *g*', FIG. 75. en que la proyeccion vertical de la interseccion forma un *nudo*. Al efecto, observarémos que este nudo debe provenir de dos puntos (*g*, *g*') y (*v*, *g*'), que estarán, 1.° colacados sobre dos aristas SG y SV, que se confundirán en la proyeccion vertical, y cuyos pies se hallan, por consiguiente, sobre una cuerda GV *perpendicular a la línea de tierra*; 2.° situados sobre un mismo paralelo de la esfera, y entónces sucederá, como anteriormente respecto a los puntos *m*' y *n*', que los pies de las jeneratrices cumplirán con la condicion de SG=SV, de modo que la cuerda incógnita GV deberá tener su *medio* I *colocado* sobre SY. Pero como AE es evidentemente el diámetro conjugado de todas los cuerdas paralelas a EE', síguese de aquí que tambien se halla sobre él el medio I de cuerda GV; por consiguiente, esta última quedará determinada por medio del encuentro de AE con SY, y aplicando a las jeneratrices SG y SV, el procedimiento jeneral del núm. 319, hallarémos los dos puntos que se proyectan en *g*' sobre el plano vertical.

322. *De la tanjente.* Para obtener esta línea respecto a un punto cualquiera (*m*, *m*'), es preciso hallar la interseccion de dos planos que toquen a la esfera y al cono en este punto. Pero en virtud de lo que hemos dicho (núm. 133) respecto a una superficie de revolucion, será suficiente tirar por Q' la tanjente Q'T' al meridiano principal de la esfera, y en seguida tomar la distancia D'T' de S a T sobre el maridiano SM, y por último tirar, perpendicularmente a este último plano, la recta Tθ, que será la traza horizontal del plano tanjente de la esfera respecto

al punto (m, m'). En cuanto al plano tanjente al cono, este plano deberá tocar a la superficie en todo el largo de la jeneratriz (SM, S'M'), y por consiguiente tendrá por traza a la recta Mθ, que toca a la base en el punto M. Luego el punto θ, en que se cortan estas dos trazas, pertenecerá a la tanjente pedida, y por consiguiente, estará proyectada sobre θm y $\theta' m'$.

323. Tambien podemos construir el *punto mas alto* o *mas bajo* de la curba, es decir, hablando con mas jeneralidad, los puntos en *que la tanjente es horizontal.* Con efecto, supuesto que una recta de esta naturaleza debe estar contenida a un mismo tiempo en los dos planos tanjentes a las superficies propuestas, será evidentemente preciso que estos tengan sus trazas horizontales *paralelas* una a otra. Pero suponiendo que el punto que buscamos se halle sobre la jeneratriz (SC, S'C'), el plano tanjente del cono tendrá por traza a la tanjente en el punto C de la base, y el plano tanjente de la esfera tendrá su traza horizontal perpendicular al meridiano SCK; y así, para que estas dos trazas sean paralelas, es indispensable que SC sea *normal* a la curba ABDE. Luego, tirando dasde el punto S, en el plano horizontal, una normal SC a la base del cono, y construyendo por el procedimiento jeneral del núm. 319, el encuentro de la jeneratriz (SC, S'C') con la esfera, obtendrémos el punto (c, c'), en que la tanjente de la interseccion es horizontal. Este punto es, en el caso presente, *el mas bajo,* y hallaríamos *el mas alto* tirando otra normal que terminase hácia el punto L de la la base; no hemos espresado en el depurado esta última construccion, porque hubiera resultado confusion con algunas otras líneas cuya manifestacion era esencial.

Segun los datos del problema presente, no se pueden tirar desde el punto S sino dos normales a la elipse ABDE; pero respecto a otra posicion de S, el número de estas normales podrá subir hasta *cuatro,* segun lo vamos a probar; y entónces la curba de interseccion nos presentará, con sus inflexiones, cuatro puntos en que su tanjente será horizontal.

325. Tirar una normal *á una curba plana* ABDE, *por un punto* S *dado en su plano.* Este problema, cuya solucion sería útil en la cuestion precedente, no puede resolverse por un método directo, sino trazando primeramente la *evoluta* $abde$ de la curba primitiva, cuya

evoluta se obtiene (núm. 197) por medio de los encuentros subcesivos de las normales tiradas por puntos tomados mui próximos sobre la curba ABDE; réstanos tirar en seguida desde el punto S una o mas tanjentes a esta evoluta, cuya operacion se ejecuta con toda la exactitud que puede desearse, dirijiendo *una regla* de modo que pase por el punto S y que se apoye en la curba $\alpha\beta\delta\varepsilon$. La única incertidumbre que en el caso presente pudiera haber, consiste en la posicion exacta del punto de contacto de esta tanjente con la evoluta; pero esta posicion es absolutamente indiferente en la presente cuestion; en tanto que el punto C, en que termina la normal en la voluta ABDE, estará claramente determinado.

Si la curba primitiva ABDE es una elipse, como sucede en el depurado anterior, sabemos (núm. 200) que la evoluta $\alpha\beta\delta\varepsilon$ nos presentará cuatro ramas que se reunirán por medio de puntos de retroceso situados sobre los ejes; y en este caso, cuando el punto dado S se halle fuera de la evoluta, es evidente que no se podrán tirar a esta curba sino dos tanjentes SC y SL, y estas serán las normales pedidas para la curba primitiva ABDE. Pero si el punto dado S' se hallase dentro de la evoluta, podrán tirar a esta curba cuatro tanjentes, a saber S'C y S'C''', que tocarán como anteriormente a las ramas $\delta\varepsilon$ y $\beta\alpha$; y ademas, otras dos tanjentes S'C' y S'C'' que tocarán a la misma rama $\beta\delta$, entre la cual y los dos ejes está comprehendido el punto dado S'. De este modo hemos justificado suficientemente la asercion emitida al fin del núm. 323, sobre el número de normales que se podian tirar a la base elíptica del cono, por el punto S.

325. *Método por medio de una curba de error.* Para resolver el problema de la normal tirada desde un punto S a una curba plana AA'A''A''',.... se da alguna vez un método que, a pesar del grave defecto que presenta, merece sin embargo conocerse. Por un punto arbitrario A de la curba propuesta, tirémosle una tanjente AT, y bajemos sobre esta última la perpendicular ST. Si A fuese verdaderamente el punto en que debia terminar la normal que sale de S, es evidente que el pie T de la perpendicular bajada sobre la tanjente deberia coincidir con A, es decir hallarse sobre la curba dada AA'A''....; por consiguiente, la suposicion precedente es *errónea;* pero tirando diversas tanjentes A'T', A''T'',.... y bajando sobre ellas las perpendiculares ST', Fig. 77.

ST"...., los pies T, T', T"..... formarán una *curba de error* o *curba ausiliar* TT'T"...., que por medio de su encuentro con AA'A"..... nos dará el punto que buscamos N; en cuyo caso la normal pedida será SN.

326. Por desgracia sucede que la curba ausiliar TT'T"...., léjos de cortar a AA'A"..... segun un ángulo bien marcado, como sería necesario para concluir claramente la posicion del punto N, es siempre tanjente a la curba primitiva. Por consiguiente, esta marcha dejará tanta incertidumbre respecto a la posicion del punto N, como si despues de haber tirado las normales a los dos puntos vecinos A y A', y de haber reconocido que una de ellas pasa encima de S y otra debajo, nos hubiéramos contentado con apreciar a ojo la situacion de N entre los puntos A y A'. Por consiguiente, es preciso tener cuidado en todos los problemas en que se haga uso de una curba de error, de evitar el inconveniente que acabamos de señalar, y que hubiera sido mas sensible aun, si el punto S hubiese estado colocado dentro de la línea AA'A"....; porque entónces la curba de error hubiera vuelto su concavidad ácia AA'A"...., y hubiera dado así lugar a mayor incertidumbre sobre el verdadero lugar de contacto.

De todos modos, observemos que cuando la línea dada AA'A"..... sea cerrada, la curba de error TT'T"..... será tambien cerreda; y que si el punto S está colocado fuera de la curba primitiva, la curba de error pasará dos veces por este punto S, y presentará en él un nudo en la forma

$$TT'T''T'''ST^{iv}T^{v}T^{vi}T^{vii}....$$

Ademas, tocará otra vez en *n* a la línea dada AA'A"...., lo que nos proporcionará otra segunda normal S*n*, cuya direccion no coincidirá, en jeneral, con la de la primera normal SN, aun cuando esto sucede en el caso presente en razon de la forma circular que hemos adoptado por línea primitiva.

FIG. 77. 327. TIRAR UNA TANJENTE *a una curba plana* BB'B"... *por un punto* S *dado en su plano.* Aun cuando es suficiente, para obtener *la direccion* de esta tanjente SM con toda la exactitud que requieren las operaciones gráficas, dirijir *una regla* de modo que pase por el punto S y se apoye sobre la curba BB'B"...., sin embargo queda alguna incertidumbre sobre la posicion del punto de contacto; y si se necesita conocer

este con precision, podremos determinarlo por medio de una *curba de error*, suponiendo siempre que se sabe tirar las tanjentes a la línea BB'B"..... por puntos dados sobre esta curba.

Construirémos las normales BT, B'T', B"T"..... de los diversos puntos tomados sobre la línea dada, y bajarémos sobre estas normales las perpendiculares ST, ST', ST"..... Conocemos bien que si en este caso, fuese B', por ejemplo, el punto de contacto de la tanjente que saliese de S, deberia suceder que el pie T" de la perpendicular bajada sobre la normal en B", coincidiria con el punto B", es decir que T" deberia hallarse sobre la curba dada; y supuesto que no sucede así, la hipótesis precedente es *errónea;* pero de aquí resulta que la *curba de error* TT'T"..... deberá pasar por el punto de contacto que buscamos, y por consiguiente este punto M nos lo dará a conocer la interseccion de la línea TT'T"..... con BB'B"..... En el caso presente, estas dos curbas se cortan perpendicularmente, y el método no padece el inconveniente señalado en el núm. 326; ademas, como la curba de error encuentra otra vez en *m* a la línea dada BB'B"..... hai otra tanjente S*m* que puede tirarse desde el punto S.

328. *Otra solucion.* Ved aquí otro nuevo método, que tiene la ventaja de no exijir que se sepan construir las normales, o las tanjentes de la curba propuesta, por puntos asignados sobre esta línea. Sea XMY la curba a la cual se trata de tirar una tanjente por el punto S; tiraremos por este punto una secante cualquiera SBA, sobre la que levantarémos dos perpendiculares Aα y Bβ, igual cada una de ellas a la cuerda interceptada AB, y en los estremos de esta cuerda, pero dirijidas una a un lado y otra a otro de la secante; esta misma operacion la repetirémos con otras secantes tales como SB'A', SB"A"...., y la curba $\alpha'''\alpha\beta\beta'''$, determinada por las estremidades de todas estas perpendiculares, deberá pasar evidentemente por el punto de contacto que buscamos de la tanjente SMT, supuesto que esta tanjente es una secante cuya parte interior es igual a cero. Por consiguiente, el encuentro de las curbas XMY y $\alpha'''\alpha\beta\beta'''$ nos dará a conocer el punto M, que deberémos unir con el S para tener la tanjente pedida; ó por lo ménos, este encuentro servirá para fijar la posicion del punto de contacto M de la tanjente ST, si nos contentamos, como lo hemos dicho mas arriba, con trazar esta recta ST con la regla. Ademas, es evidente que si trastornamos todas las per- FIG. 74.

pendiculares al lado opuesto en que las hemos levantado, hallarémos otra segunda curba ausiliar, que tambien deberá pasar por el mismo punto M, y podrá servirnos de comprobante; finalmente, podremos dar a cada perpendicular una lonjitud igual al doble o a la mitad de la cuerda correspondiente, cuya razon puede ser útil variar, segun sea la curba dada mas o ménos aplanada en las inmediaciones del punto M.

329. Podríamos tambien emplear una curba de error, para resolver los problemas siguientes:

Tirar una tanjente a una curba plana paralela a una recta dada en su plano.

Tirar una tanjente comun a dos curbas situadas en el mismo plano; pero en todas estas cuestiones habrá siempre tanta exactitud y quizás mas, en hacer solo uso de *una regla* que apoyaremos sobre las dos curbas dadas, o sobre la curba única y en la direccion que se nos señale, como en recurrir a líneas ausiliares en cuya forma hai siempre algo de arbitrario. Solo cuando el lugar del contacto parezca incierto, y necesitemos conocerle con mas exactitud, podremos, despues de haber tirado la tanjente, recurrir al método del número precedente.

PROBLEMA 5. *Desarrollo de una superficie cónica cuya base es una curba cualquiera.*

FIG. 75. 330. El problema que hemos resuelto en el núm. 319, puede servirnos para efectuar este desararrollo. Porque si despues de haber construido la curba de interseccion (*abcdm....*, *a'b'c'd'm'....*) del cono propuesto con una esfera de un radio arbitrario y cuyo centro esté colocado en la cúspide, desarrollemos (núm. 222) el cilindro recto que proyecta esta curba segun *abcdm....*, y trazamos sobre este cilindro desarrollado, la transformada de la línea de doble curbatura (*abcdm....*, *a'b'c'd'm'....*), obtendrémos una curba plana que espresarémos por $\alpha\beta\gamma\delta\mu$...., y cuyos arcos, fáciles al presente de medir, tendrán la misma lonjitud absoluta que los de la línea de doble curbatura. Hecho esto, como todos los puntos de esta última curba se hallan sobre el cono, a igual distancia de la cúspide, es claro que despues del desarrollo de la superficie cónica; estos mismos puntos deberán todos estar colocados sobre la circunferencia de un círculo descrito desde el punto arbitrario S", con el radio S'Y' de la esfera secante. Por consiguiente, despues de haber

trazado esta circunferencia sobre el plano del desarrollo (dejarémos al lector el cuidado de efectuar estas varias operaciones), marcarémos en él los arcos

$$\alpha'\beta', \beta'\gamma', \gamma'\delta', \delta'\mu',\ldots.$$

iguales en lonjitud absoluta a los arcos

$$\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\delta, \delta\mu,\ldots.$$

de la primera transformada; uniendo en seguida los puntos de division α', β', γ.... con el centro S", no restará mas que tomar sobre estos radios las lonjitudes

$$S''\alpha'A'', S''\beta'B'', S''\gamma'C'', S''\delta'D'', S''\mu'M'',\ldots.$$

respectivamente iguales a las de las jeneratrices del cono que terminan en los diversos puntos

$$(A, A'), (B, B'), (C, C'), (D, D'), (M, M')\ldots.;$$

de este modo obtendrémos el desarrollo de la superficie cónica, sobre el que la base primitiva tendrá por transformada a la curba

$$A''B''C''D''M''\ldots.$$

331. En este método, la curba interseccion del cono con la esfera concéntrica, corta evidentemente a todas las jeneratrices formando ángulos rectos; de modo que ocupa en el caso presente el lugar de lo que hemos llamado *seccion recta* o *seccion ortogonal*, cuya curba nos ha servido con mucha comodidad (núm. 243) para desarrollar un cilindro cualquiera; porque conocemos con anticipacion la forma rectilínea que debe tomar despues del desarrollo del cilindro. En las superficies cónicas se conoce tambien con anticipacion la forma *circular* que debe tomar en el desarrollo, la seccion *ortogonal* del cono; pero por desgracia esta seccion no es una línea plana, de modo que para medir sus arcos, nos vemos precisados a hacerla perder una de sus curbaturas (*), efec-

(*) *Hablamos aquí en conformidad con el lenguaje comun; pero véase lo que decimos en los núm.* 7 *y* 654.

tuando el desarrollo previo de un cilindro. Y así, es preciso confesar que este método, que exijie un gran número de operaciones preliminares que siempre multiplican las causas de errores, no nos dará resultados gráficos mas exactos que los que hubiéramos obtenido siguiendo la marcha mas corta indicada en el núm. 267.

PROBLEMA 6. *Interseccion de dos superficies de revolucion cuyos ejes se encuentran.*

FIG. 78. 332. Elijamos los planos de proyeccion de modo que el primero sea paralelo a los dos ejes, y el segundo perpendicular a una de estas rectas, considerando este último plano como horizontal; el eje de la primera superficie tendrá por proyecciones a la vertical O'Z' y al punto O, en tanto que el otro eje estará proyectado segun Z'T y OI paralela a la línea de tierra. Los meridianos *principales* A'B'C' y *a'b'c'*, es decir, los que se hallan en el plano vertical OI, se nos dan por la cuestion, y se proyectan verticalmente segun su verdadera mognitud, estas curbas, que al propio tiempo forman sobre el plano vertical los contornos aparentos de las dos superficies (núm. 131), son, en el caso presente, dos elipses; pero el método que vamos a esponer es independiente de la naturaleza de los meridianos. El primer elipsoide tiene por contorno aparente, sobre el plano horizontal, al equador BLX*l*; respecto a la otra superficie no harémos mencion de ella sobre este plano de proyeccion, porque el trazado de su contorno aparente requeriria que hallásemos la curba de contacto de este elipsoide con un cilindro vertical circunscrito a él (núm. 106), cuya cuestion enseñarémos a resolver mas tarde, pero al presente complicaria el problema sin utilidad.

333. Sentado esto, observemos que dos superficies de revolucion, que tienen un eje comun en direccion, no pueden cortarse sino segun uno o mas *círculos perpendiculares a este eje*, descritos desde los puntos en que se encuentran sus meridianos. Como ademas de esto, puede considerarse una esfera como un cuerpo de revolucion enjendrado al rededor de cualesquiera de sus diámetros, si nos figuramos una serie esferas secantes, que todas tengan por centro al punto (Z', O), que es comun a los dos ejes, tendremos que cada una de estas esferas cortará a las superficies propuestas segun dos círculos respectivamente perpen-

diculares a los ejes, y cuyos puntos de seccion será fácil conocer. Con efecto, tracemos desde el punto Z', y con un radio arbitrario, el círculo D'F'E'G' para representar la proyeccion de una de estas esferas; esta encontrará a los meridianos dados en los puntos D' y E', F' y G'; en virtud de esto y de las observaciones precedentes, resulta que las rectas D'E' y F'G' son las proyecciones verticales de los dos círculos, segun los que la esfera proyectada sobre D'F'E'G' corta a los elipsoides. Pero como los planos de estos dos círculos tienen por interseccion una cuerda horizontal (M', M*m*), que en el caso actual cae *dentro* del contorno de la esfera, podemos afirmar que sus circunferencios, *situadas ademas sobre esta esfera,* se cortarán en dos puntos proyectados verticalmente en M', y horizontalmente en M y *m*, en el encuentro de la cuerda M*m* con el círculo (DME, D'E'). Y como estos puntos son evidentemente comunes a los dos elipsoides, pertenecerán a su línea de interseccion; empleando operaciones semejantes a esta, repetidas con otros esferas descritas siempre desde el punto Z', nos darán por proyecciones de esta curba sobre los dos planos a

K'L'M'H' y KLMH*ml*K.

334. Será preciso aplicar el precedente método, con especialidad, a la esfera que pasa por el equador (B'X', BLX); porque así determinarémos los dos puntos (L', L) y (L', *l*), desde los cuales la curba pasa por debajo del equador, y es *invisible* sobre el plano horizontal. Ademas, aun cuando esta curba de interseccion está mui léjos de ser tanjente, en el espacio, al equador, sin embargo las tanjentes de estas dos líneas en el punto (L', L) se hallan ámbas en el plano tanjente que evidentemente es *vertical* en toda la estension del equador, de aquí resulta que las proyeccionos horizontales de estas dos tanjentes se confundirán; y que segun esto la curba KLM.... *tocará* al círculo BLX en L y *l*.

335. Esta consecuencia jeneral no padecerá escepcion sino cuando la tanjente en el punto (L', L) de la línea de doble corbatura, sea exactamente *vertical*. En este caso, el elemento que hubiese sido comun a las proyecciones horizontales de esta tanjente y del equador, desaparece o se reduce a un punto matemático; de modo que la curba cesa de *tocar* al equador, y llega a *cortarle* formando jeneralmente un retroceso. Una circunstancia análoga va a presentásenos en el caso presente con

los puntos (K', K) y (H', H), que nos da inmediatamente el encuentro de dos meridianos principales. Con efecto, en cada uno de estos puntos, los planos tanjentes a las dos superficies son necesariamente perpendiculares a los planos meridianos, y por consiguiente al plano vertical; luego su interseccion, que será tanjente a la curba, es tambien perpendicular a este mismo plano vertical, y se proyecta en él segun *un punto único*; de aquí resulta, por las razones precedentes, que la proyeccion K'L'H' no presenta ya contacto con los contornos aparentes de las dos superficies, cuando este contacto tiene lugar jeneralmente. Ademas, no hai en este caso retroceso en los puntos K' y H', porque las dos ramas de la interseccion, situadas una delante y otra detras del plano vertical OI, tienen posiciones simétricas y se confunden en la proyeccion vertical, segun se ve por la construccion jeneral que nos ha dado los dos puntos (M, M') y (*m*, M').

FIG. 78. 336. Es útil observar, que la proyeccion vertical K'L'H' será precisamente *una línea de segundo grado*, siempre que las dos superficies de revolucion sean tambien de este órden. Con efecto, siendo el plano vertical OI un plano meridiano respecto a estas dos superficies, divide evidentemente en dos partes iguales a todas las cuerdas que le son perpendiculares, tales como (M*m*, M'); luego este plano es *un plano principal* que es *comun* a las dos superficies, y en tal caso se demuestra, por un cálculo mui simple, que la interseccion de estas se proyecta sobre este plano segun una línea de segundo órden (*). Debemos aprovecharnos de esta nocion, adquirida anticipadamente sobre la naturaleza de la curba K'L'H', para enmendar los errores de construccion que, en esta línea, pudiesen producir las inflexiones o una corbatura que no concordase con la forma bien conocida de las secciones cónicas.

337. Observemos aun que cualquiera que sea el grado de las dos superficies de revolucion, la curba plana K'L'H' considerada en sí misma, e independientemente de la curba gausa cuya proyeccion vertical recibe, no se termina repentinamente en los puntos K' y H', sino que

---

(*) *Esta teoría interesante la debemos a M.* J. Binet. *Véase el* Análisis aplicado a la Jeometría de las tres dimensiones, *cap. IX.*

debe prolongarse mas allá para volver sobre sí misma o para estenderse indefinidamente. De modo que si continuamos trazando sobre el plano vertical, círculos que tengan siempre al punto Z' por centro, y que se estiendan mas allá o mas acá de los puntos H' y K', podremos, siempre que la forma de los meridianos permita que sigan siendo cortados por estos círculos, hallar puntos de la curba K'L'H', situados fuera de la parte que recibe la proyeccion de la interseccion de las dos superficies. Esta circunstancia, que notarémos mas claramente en el depurado 79 relativo a una cuestion análoga (núm. 344), estriba en que la propiedad gráfica que sirve para hallar cada punto M' de la curba K'L'H', es mas jeneral que la definicion de este mismo punto considerado como proyeccion de un punto comun a las dos superficies. Con efecto, bajo este último respeto, es preciso que M' se halle no solamente en el encuentro de las dos cuerdas D'E' y F'G', sino que tambien esté situado en el interior del círculo D'F'E'G', como lo hemos enunciado en el núm. 333; de modo que cuando las dos cuerdas D'E' y F'G' no se corten sino en su prolongacion, el punto de seccion convendrá, mui bien, aun a la curba plana K'L'H', pero no a la curba gausa segun la cual se cortan las dos superficies de revolucion.

338. De la tanjente; *primer método.* Podremos hallar esta recta Fig. 78.
respecto al punto (M, M'), determinando la interseccion de los planos que toquen a las dos superficies en este punto. Y como el plano tanjente relativo al elipsoide A'B'C', le obtendremos (núm. 133) transportando el punto M' a D' sobre el meridiano principal, y trazando en seguida la tanjente D'T' a este meridiano; si hecho esto se restituye el pie T' de esta tanjente a T sobre el meridiano OM, la recta Tθ perpendicular a OM será la traza horizontal del plano que buscamos.

En cuanto al elipsoide *a'b'c'* cuyo eje no es vertical, conducirémos primeramente el punto M' al meridiano principal a F', y en seguida construirémos la normal F'N', de la cual concluirémos (núm. 136) la normal (M'N', MN) relativa al punto (M, M'); hecho esto, será suficiente tirar por este punto un plano perpendicular a esta última normal. Para efectuarlo, figurémonos en este plano una recta paralela a su traza vertical, y cuya proyeccion vertical será la línea M'P' perpendicular a M'N'; y su proyeccion horizontal será MP paralela a la línea de tierra; en seguida tirarémos por el pie (P, P') de esta línea ausiliar,

y perpendicularmente a MN, la recta PQ, que evidentemente es la traza horizontal del plano tanjente al elipsoide *a'b'c'* en el punto (M, M').

Sentado esto, las trazas PQ y Tθ de los dos planos tanjentes van a encontrarse en el punto θ, y aquí se halla el pie de la tanjente pedida, la cual, segun esto, tiene por proyecciones a θM y θ'M'.

339. *Segundo método, por medio del plano normal.* Hemos visto núm. 214 que la tanjente a la interseccion de dos superficies, debia ser perpendicular al plano tirado por las dos normales de estas mismas superficies; por consiguiente, bastará hallar este plano, que es tambien él mismo normal a la curba. Como hemos construido ya la normal (M'N', MN) del segundo elipsoide, para hacerlo mismo con el primero, tirarémos en el punto D' del meridiano principal, la recta D'R' perpendicular a la tanjente D'T', y hecho esto, sabemos (núm. 130) que la recta (M'R', MO) es la normal del punto (M', M). Esto supuesto, será mui fácil hallar la traza vertical del plano tirado por las dos normales indicadas arriba; pero como no necesitamos conocer sino *la direccion* de esta traza, y como esta direccion es la misma sobre los planos verticales OI y O'I' que son paralelos, observarémos que las normales en cuestion van a encontrar a los ejes en R' y N'; de aquí resulta inmediatamente que N'R' es la traza del plano normal sobre el plano vertical OI, y que tirando por el punto M' la recta M'θ' perpendicular a esta traza, tendremos la proyeccion vertical de la tanjente pedida.

Para obtener la otra proyeccion, prolongarémos hasta el plano horizontal dos cualesquiera de las rectas que reunen los tres puntos (M', M), (N', N) y (R', O), que están situados sobre el plano normal. Hecho esto, vemos que la recta (N'M', NM) penetra al plano horizontal en el punto α, y que la recta (N'R', NO) lo encuentra en β; luego αβ es la traza horizontal del plano normal, y tirándole una perpendicular Mθ, esta será la proyeccion horizontal de la tanjente que buscamos.

FIG. 78. 340. El método que acabamos de emplear es, en ciertos casos, no solo mas sencillo que el de los dos planos tanjentes, sino que aun presenta la ventaja de poderse aplicar a puntos particulares, para los que sería insuficiente el otro método.

Con efecto, consideremos el punto (K, K') situado a un mismo tiempo sobre los dos meridianos principales; en razon a esta particularidad,

los dos planos tanjentes serán perpendiculares al plano vertical, y por consiguiente su interseccion, que es la tanjente de la curba (K'L'H', KLH....), estará proyectada horizontalmente segun una perpendicular a KO, y verticalmente en *un punto* único K'. Esta construccion nos da a conocer la posicion que ocupa en el espacio la tanjente de la curba gausa; pero no nos dice nada sobre la recta que tocase en K' a la curba plana K'L'H', cuya recta la debemos considerar como la proyeccion de la tanjente que inmediatamente precedia en el espacio a la que se ha reducido a un punto único al proyectarse sobre el plano vertical; en tanto que la consideracion de las dos normales manifiesta una propiedad constante de que goza la curba plana K'L'H' mirada como trazada en el plano de los dos meridianos, e independientemente de la línea de doble corbatura cuya proyeccion recibe. Esta propiedad consiste en que si transportamos el punto arbitrario M', que se halla sobre los dos meridianos, a D' y F' por medio de perpendiculares a los ejes, y si en seguida tiramos las normales D'R' y F'N', *siempre la recta* R'N' *será perpendicular a la tanjente en* M'. Pero como esta relacion existe en todos los putos de la curba plana K'L'H', y no recae sino *sobre las líneas situadas en ese plano,* debe tambien ser cierta respecto al punto K', al que, con mas sencillez, debe ser evidentemente aplicable, porque este punto está por sí mismo transportado sobre los dos meridianos. Por consiguiente, será suficiente tirar lar normales K'V' y K'U', y trazar en seguida la recta U'V', sobre la cual se bajará la perpendicular K'S', que será la tanjente pedida.

Otra construccion enteramente semejante, nos dará la tanjente en el punto H'.

PROBLEMA 7. *Interseccion de un paraboloide con un hiperboloide, ámbos de revolucion, y cuyos ejes se encuentran.*

341. Sean (O, O'Z') el eje del paraboloide, y A'C'B' el meridiano principal de esta superficie, que supondrémos terminada en el círculo (A'B', AB), de modo que sea visible sobre el plano horizontal el interior de este paraboloide. Sea así mismo (OI, Z'I') el eje del hiperboloide, lo que supone que el plano vertical de proyeccion se ha elejido de modo que sea paralelo a un mismo tiempo a los dos ejes: en cuanto al meridiano de esta segunda superficie, no le mirarémos como dado FIG. 79.

por la cuestion, porque si así fuese estaria el problema enteramente comprehendido en el del núm. 332; pero definirémos el hiperboloide por medio de la jeneratriz rectilínea (PQ, P'Q'), que lo enjendrará jirando al rededor de la recta fija (OI, Z'I'), sin considerar de ningun modo a esta segunda superficie como si realmente existiese, es decir, que en el caso que nos ocupa subsistirá solo el paraboloide, y estará penetrado segun cierta y determinada curba, formada por las diversas posiciones de la recta móvil (PQ, P'Q'). Prescindiendo de esto, emplearémos tambien, para hallar esta curba, esferas secantes (núm. 333) descritas todas desde el punto Z'; solo que como no conocemos *a priori* el meridiano del hiperboloide, no trazarémos arbitrariamente el círculo máximo de una de estas esferas, sino que principiarémos por construir un paralelo de este hiperboloide.

342. Tiremos pues, por un punto ω' tomado a discrecion sobre el eje, un plano F'ω'G' que le sea perpendicular; este plano encontrará a la jeneratriz en el punto (ϱ', ϱ), cuya distancia al punto ω' será manifiestamente la hipotenusa de un triángulo construido con los lados ω'ϱ' y ϱ'ϱ"=αϱ; y así, si describimos con esta hipotenusa ω'ϱ" un círculo F'ϱ"G', este será el abatimiento del paralelo segun el cual el plano F'ω'G' corta al hiperboloide, y las estremidades F' y G' de su diámetro serán dos puntos de *la hipérbola meridiana*, que se hallará situada en el plano vertical OI.

Sentado esto, adoptemos por radio de una de las esferas secantes la distancia Z'F'; en tal caso, esta esfera cortará al hiperboloide segun el paralelo proyectado sobre F'G', y al paraboloide segun un círculo proyectado sobre D'E'; por consiguiente, el punto M', en que se encuentran estas dos cuerdas y que cae *dentro* de la esfera, representa la proyeccion vertical de los dos puntos en que se cortan las circunferencias de estos dos paralelos; y es donde se hallan dos puntos de la interseccion de las dos superficies propuestas; en el plano horizontal los hallarémos, trazando sobre él el paralelo (DME, D'E') y bajando la vertical M'*m*M.

343. Otras construcciones análogas nos darán tantos puntos cuantos queramos de la curba

(K'L'λ'M'H', KLλMH*ml*K),

segun la cual el hiperboloide corta al paraboloide; y el meridiano V'F'S'U' de la primera de estas superficies, que se concluirá de todos los puntos lo mismo que el F, deberá tocar, sobre el plano vertical, a la proyeccion de la jeneratriz en el punto (S, S') en que esta recta atraviesa al meridiano princial OI. Ademas, el encuentro de este meridiano V'F'S'U' con el meridiano del paraboloide, será el qne nos dé los puntos estremos (K, K') y (H, H') de la interseccion.

344. Observemos tambien que una misma esfera podrá darnos dos puntos como L' y λ' situados sobre un solo paralelo, y pertenecientes ámbos a la interseccion de las superficies propuestas; miéntras que, otras veces, una esfera secante nos dará dos puntos M' y μ, de los que solo uno pertenecerá verdaderamente a la interseccion, porque el segundo estará colocado fuera del contorno de la esfera. Sin embargo, como este punto μ' continúa llenando la propiedad gráfica que sirve para construir cada punto de la curba plana K'M'H', considerada independientemente de la curba gausa cuya proyeccion recibe, siempre pertenecerá a la prolongacion de esta línea plana (núm. 337); y esta evidentemente será una hipérbola, segun las razones citadas en el núm. 336.

345. *De la tanjente.* Hallemos, como anteriormente (núm. 339), las normales de las dos superficies respecto a un punto cualquiera (M, M'). En el paraboloide, la normal E'R' del meridiano, nos da a conocer el punto R', en que terminaria sobre el eje O'Z', la normal en (M, M') de la superficie; y sin trazar esta última recta, nos bastará haber obtenido este punto R'.

En el hiperboloide, cuyo meridiano no ha sido dado por la cuestion, observamos que el plano tanjente relativo al punto proyectado en (β, β') y abatido en β'', pasará por la tanjente β''T del paralelo y por la jeneratriz (βP, β'P'), que penetra al plano vertical OI en (S, S'); por consiguiente, sobre este plano de los dos ejes, tendrá por traza el plano tanjente a la recta TS'; luego, tirándole una perpendicular β'N', esta será la proyeccion de la normal relativa al punto (β, β'). Pero este punto se halla sobre el mismo paralelo que (M, M'); luego, tambien respecto a este último, la normal de la superficie encontrará al eje I'Z' en el punto N'; y en virtud de esto, queda determinada esta normal.

Sentado esto, el plano de las dos normales en (M, M') cortará evi-

dentemente al plano vertical OI segun la recta R'N'; luego, si bajamos sobre esta línea una perpendicular M'θ', esta será la proyeccion vertical de la tanjente a la curba de intersección. En seguida, podrémos determinar sobre el plano horizontal de proyeccion la traza del plano de las dos normales, el cual pasará por los tres puntos conocidos (M', M), (R', O), (N', N); pero será mucho mas corto determinar esta traza sobre el plano horizontal D'E', en el cual está ya situado el punto (M, M'). Porque, prolongando R'N' hasta que corte a este plano en ρ', y proyectando este último punto a ρ, la recta ρM será evidentemente la traza pedida; si ahora le tiramos la perpendicular Mθ, tendrémos la proyeccion horizontal de la tanjente a la interseccion de las dos superficies.

LIBRO V.

DE LOS PLANOS TANJENTES CUYO PUNTO DE CONTACTO NO ES DADO.

346. Los problemas que hemos resuelto en el libro II sobre los planos tanjentes, suponian que se nos habia dado el punto de contacto sobre la superficie: Para completar esta importante teoría, solo nos resta examinar las cuestiones en que, sin señalar el punto de contacto, se exija que el plano tanjente que buscamos cumpla con ciertas condiciones, tales como las siguientes:

1.ª Que el plano tanjente pase por un punto dado fuera de la superficie;

2.ª Que sea paralelo a una recta conocida;

3.ª Que pase por una recta dada, o por dos puntos señalados en el espacio;

4.ª Que el plano tanjente que buscamos sea paralelo a un plano dado;

5.ª Que toque a un mismo tiempo a varias superficies.

Estas varias condiciones nos dan a conocer la division natural de este libro en varios capítulos, en los que no tratarémos ya de lo concerniente a las superficies cilíndricas o cónicas, porque hemos completado consecutivamente, en el capítulo III del libro II, los problemas relativos a estos dos jéneros sencillos de superficies.

CAPITULO PRIMERO.

De los planos tanjentes tirados por un punto esterior a la superficie.

FIG. 80. 347. Sea V el punto dado fuera de la superficie arbitraria S; tiremos por este punto varios planos secantes en una direccion cualquiera, y por ejemplo, hagamos que todos pasen por una recta tambien arbitraria VAD que atraviese a la superficie. Hecho esto, dichos planos cortarán a la superficie segun curbas tales como AMD, AM'D, AM"D,.... que sabremos construir por los métodos que anteriormente hemos espuesto, y a las cuales podremos en jeneral tirar, desde el punto V, las tanjentes VM, VM', VM",.... de modo que todas estas rectas manifiestamente formarán un cono que tendrá por cúspide al punto V, y que estará *circunscrito* a la superficie S, es decir, que la *tocará en toda la estension de la curba* MM'M".... Con efecto, respecto al punto M", por ejemplo, el plano tanjente de S contendrá a la tanjente M"T de la curba MM'M", y tambien a la arista M"V que, por construccion, es tanjente a la superficie; luego este plano será tambien tanjente al cono; y como segun esto tienen las dos superficies un plano tanjente comun en M", presentarán un verdadero contacto en este punto y en todos los de la línea MM'M".....

348. Sentado esto, para resolver el problema jeneral que es el objeto de este capítulo, *bastará construir la línea de contacto* MM'M" *de la superficie propuesta* S *con un cono circunscrito que tenga su cúspide en* V, *y en seguida tirar un plano tanjente a* S *en un punto cualquiera de esta línea;* este plano cumplirá evidentemente con la cuestion, porque precisamente tocará (núm. 347) al cono circunscrito; y segun esto, pasará por la cúspide V que es el punto dado.

Reciprocamente, todo plano tirado desde el punto V tanjencialmente a la superficie S, tocará a esta en un punto que llamarémos *m*, y que unido con V nos dará una recta V*m*, que evidentemente será tanjente a S; luego, esta recta V*m* será precisamente una de las aristas del cono

circunscrito VMM'M",.... y por consiguiente el punto *m* deberá hallarse sobre la curba MM'M",.... que segun esto es *el lugar de todas las soluciones* del problema propuesto.

Solo será imposible el problema, cuando no exista el cono circunscrito, es decir, cuando el punto V esté colocado de tal modo que no se pueda tirar desde él ninguna tanjente a las varias secciones causadas por los planos que pasan por VAD.

349. De aquí resulta que la cuestion que nos ocupa admite una infinidad de soluciones, esceptuando solo el caso de que la superficie propuesta S sea *desarrollable*. Con efecto, hemos visto (núm. 183) que estas superficies eran las envolventes de todas las posiciones de un plano móvil sujeto a una lei de movimiento, en que no quedaba sino una sola condicion arbitraria (*): luego, cuando este plano móvil, que es al mismo tiempo el plano tanjente de la superficie desarrollable, llegue a pasar por el punto dado V, no podrá ya tomar otra posicion, o por lo ménos, no podrá ocupar entónces sino un número limitado de posiciones, segun la naturaleza y el número de napas de la superficie. Y así, respecto a esta clase de superficies, el problema de construir un plano tanjente que pase por un punto dado, es enteramente determinado (**), y esto es lo mismo que hemos reconocido en los conos y en los cilindros (núm. 116 y 123).

350. Como ademas, un plano tanjente toca a una superficie desarrollable en todo el largo de una misma jeneratriz rectilínea (núm. 177), síguese de aquí que si en el caso presente efectuamos las secciones in-

---

(*) *O en otros términos, que no deja en su equacion* sino una sola constante arbitraria; y *así la condicion de pasar por el punto* V *fijará completamente la posicion de este plano en el espacio.*

(**) *La escepcion que presentan las superficies desarrollables es la única, porque no tiene tampoco lugar en las* superficies gausas. *Con efecto, veremos que en estas, cualquier plano tirado por el punto* V *y por una jeneratriz rectilínea, es tanjente a la superficie en cierto punto que es preciso construir; de modo que uniendo este punto de contacto con* V, *obtendrémos tambien una de las aristas del cono circunscrito, que subsiste aquí como en cualesquiera otras superficies.*

dicadas núm. 347, y les tiramos tanjentes por el punto V, todos los puntos de contacto estarán situados sobre una recta de la superficie: y entónces el cono circunscrito se reducirá a uno o mas planos tanjentes que todos pasarán por V.

351. El problema de tirar, por un punto V, un plano tanjente a una superficie S no desarrollable, se convertiria en determinado, si agregásemos que este plano debiese tocar a la superficie *en una curba dada*, sobre un meridiano, por ejemplo, o sobre un paralelo, cuya posicion se señalase. Con efecto, despues de haber construido la línea de contacto MM'M".... del cono circunscrito a S, bastará examinar cuales son los puntos en que esta encuentra a la curba dada, y allí evidentemente se hallarán los puntos de contacto de los planos tanjentes que satisfacen al problema. Este sería imposible, siempre que la curba señalada sobre la superficie, no tuviese ningun punto comun con la línea MM'M"....

352. Por lo que hace a la construccion de la línea de contacto de una superficie cualquiera S, con un cono circunscrito que tiene por cúspide un punto dado V, cuya curba es mui útil conocer en *la Perspectiva*, porque manifiestamente es el *contorno aparente* de la superficie vista desde el punto V, el único método enteramente jeneral es el que hemos indicado núm. 347; pero, no obstante, como su ejecucion demanda operaciones gráficas bastante trabajosas, vamos a esponer otros métodos mas sencillos, pero que solo son aplicables a ciertos jéneros de superficies que son las que se encuentran con mas frecuencia. Mas ántes demostrarémos un teorema importante respecto a estas líneas de contacto, que dice relacion a todas las superficies de segundo grado.

353. *La curba de contacto de un cono circunscrito a una superficie de segundo grado, es simpre* PLANA, *y su plano es paralelo al plano diametral, que es conjugado del diámetro tirado por la cúspide del cono.*

FIG. 80. Sea V la cúspide del cono, y S la superficie de segundo grado de que se trata; supondrémos desde luego que esta admite un centro O; por lo demas, puede ser indiferentemente un elipsoide o uno de los dos hiperboloides. Haciendo pasar por la recta VO diferentes planos secantes, obtendrémos las curbas de segundo grado ABD, AB'D, AB"D,.... que todas tienen por diámetro comun a OA, y si las cortamos con el *plano diametral* BB'E, que es *conjugado con* OA, es decir, que divide

en dos partes iguales a todas las cuerdas de la superficie paralelas a esta direccion, hallarémos las rectas OB, OB', OB",.... que evidentemente gozarán de la misma propiedad respecto a las cuerdas tiradas en cada una de estas curbas paralelamente a OA. Y así es que OA y OB, OA y OB', OA y OB".... formarán de dos en dos sistemas de diámetros conjugados, en las varias curbas de segundo grado ABD, AB'D, AB"D....

Sentodo esto, tirarémos a una de estas curbas una tanjente VM; y en seguida, tiremos tambien por el punto de contacto M un plano paralelo a BB'E : este nuevo plano cortará a la superficie S segun una curba MM'N, y a las secciones primitivas segun las ordenadas PM, PM', PM",.... que serán respectivamente paralelas a OB, OB', OB". Si en este caso tiramos por los diversos puntos M', M".... tanjentes a las curbas AM'D, AM"D,.... decimos que estas tanjentes terminarán sobre la recta AO, en el mismo punto V del que salió la primera MV. Con efecto, sabemos que en toda línea de segundo órden *referida a dos diámetros conjugados*, no depende la subtanjente sino de la abscisa del punto de contacto y del diámetro sobre el cual se cuenta esta abscisa; por consiguiente, respecto a los diversos puntos M, M', M",.... que corresponden a la misma abscisa OP, la subtanjente tendrá un valor comun, a saber:

$$PV = \frac{\overline{OA}^2}{OP} - OP, \text{ y de aquí } OV = \frac{\overline{OA}^2}{OP}.$$

Luego, todas las tanjentes tiradas por los puntos M, M', M".... formarán un cono circunscrito a la superficie de segundo grado, y cuya línea de contacto será la curba *plana* MM'M"N paralela al plano diametral BB'E que es conjugado con VO (*). Ademas, este diámetro VO con-

---

(*) *En el caso particular en que la superficie sea una esfera, la curba de contacto del cono circunscrito es* un círculo menor, perpendicular a la recta VO, *que une la cúspide* V *con el centro de la esfera. Esto se prueba directamente, haciendo jirar al rededor de* VO *un círculo máximo y su tanjente tirada desde el punto* V.

tendrá al centro P de la curba MM'M",.... como vamos a darlo a conocer.

354. *Las diversas secciones hechas, en cualquiera superficie de segnndo grado, por planos paralelos entre sí, son curbas* SEMEJANTES, *cuyos centros están situados sobre el diámetro que es conjugado con el que entre todos estos planos secantes pasa por el centro de la superficie.* Con efecto, sea cual fuere una de estas secciones planas MM'M"N, podremos tirar por el centro O un plano BB'B"E que le sea paralelo, y construir el diámetro OA conjugado con este último plano. En este caso, todas las secciones ABD, AB'D, AB"D.... tendrán por diámetros conjugados considerados de dos en dos a OA y OB, OA y OB', OA y OB"; luego, las ordenadas MP, M'P, M"P,.... que corresponden a la misma abscisa OP, serán proporcionales a los diámetros no comunes OB, OB', OB",.... y por consiguiente estas rectas consideradas como *radios vectores* PARALELOS tirados en las dos curbas MM'N y BB'E, cumplirán con la condicion jeneral de la *semejanza*. Ademas, como el punto O es evidentemente el centro de figura de la curba BB'E, será precisamente lo mismo P respecto a la curba MM'N; y así es que los centros de las secciones paralelas al plano diametral BB'E están todos situados sobre el diámetro OA que es conjugado con este plano.

FIG. 81. 355. Volvamos al teorema demostrado núm. 353 respecto a las superficies dotadas de un centro, y con el objeto de estenderle a las superficies que carecen de él, es decir, a los paraboloides, modifiquemos la demostracion del modo siguiente. Tiremos por el punto V, una paralela VX' al eje o diámetro principal OX del paraboloide; esta recta VAX' será tambien un *diámetro* de la superficie, y los diversos planos secantes tirados por este diámetro darán las secciones *parabólicas* AME, AM'E', AM"E".... Esto supuesto, tiremos a una de ellas la tanjente VM, y por el punto de contacto M, tiremos tambien paralelamente al plano tanjente del paraboloide en A, un plano MM'M"N, el cual cortará a las parábolas segun las ordenadas MP, M'P, M"P,.... paralelas respectivamente a las tanjentes AT, AT', AT",..... de estas curbas. Sabemos que respecto a esta clase de ordenadas será la subtanjente constantemente igual al duplo de la abscisa comun AP; y por consiguiente todas las tanjentes en los puntos M, M', M",.... terminarán en el mismo punto V, y en virtud de esto formarán un cono circunscrito que tocará al parabo-

loide en toda la estension de la curba *plana* MM'M"N. Vemos ademas que, el plano de esta curba es *paralelo al plano tanjente* en A, el cual, en el caso presente, reemplaza al plano diametral conjugado con VX'; porque este último estaria a una distancia infinita.

Tambien en el elipsoide de la figura 80, sería paralelo el plano tanjente en A a BB'B"E, y por consiguiente, a la curba de contacto MM'M"N; pero no hemos querido emplear este plano tanjente, porque no existiria en el hiperboloide, en caso de que el diámetro VO no encontrase a la superficie.

PROBLEMA 1. *Hallar la curba de contacto de una superficie de revolucion con un cono circunscrito cuya cúspide se nos ha dado.*

356. Sean (O, I'Z') el eje de revolucion, que miraremos como vertical, y (X'C'Y'D', CD) el meridiano principal de la superficie. En este caso la curba es una elipse, uno de cuyos diámetros principales coincide con el eje de revolucion; pero el método que vamos a esponer es enteramente jeneral, y puede aplicarse un meridiano cualqiera. Sea ademas (V, V') el punto señalado por cúspide del cono circunscrito: la curba X'M'Y' segun la que este cono tocará al elipsoide, puede determinarse, con construir subcesivamente los puntos que se hallen sobre cada paralelo de la superficie, o tambien los que se hallen situados sobre los diversos meridianos, esto va a dar lugar a dos métodos, que cada uno por sí solo será suficiente para trazar la curba pedida. FIG. 84.

357. *Método del paralelo.* Sea (E'F', EMF) el paralelo elejido arbitrariamente sobre la superficie de revolucion S; sustituyendo a este un cono recto enjendrado por la revolucion de la tanjente E'Z' al rededor del eje, es evidente que este cono tocará a la superficie S en toda la estension del círculo E'F'; y que así todo plano tanjente tirado a este cono por el punto (V, V'), tocará a S en el punto en que la arista de contacto encuentre al círculo E'F'. Por consiguiente, este punto de encuentro pertenecerá a la curba pedida X'M'Y', que no es otra cosa (núm. 348) que *el lugar de los puntos de contacto de los diversos planos tanjentes tirados a la superficie* S, *por el punto* (V, V').

358. Por consiguiente, la cuestion queda reducida a hallar un plano que, partiendo desde el punto (V, V'), vaya a tocar al cono Z'E'F' : esto lo conseguirémos (núm. 123) uniendo la cúspide (Z',

O) (*) con (V, V'), hallando en seguida el punto en que esta recta va a cortar el plano horizontal E'F', y tirando, por fin, desde este último punto tanjentes al círculo (E'F', EMF). Pero como la cúspide (Z', O) puede, como sucede en el ejemplo precedente, hallarse a una distancia incómoda, y ademas el punto de donde deben salir las tanjentes a la base del cono, variará tambien a medida que cambiemos de paralelo, vamos a emplear una marcha que obviará estos dos inconvenientes.

Adoptemos por base del cono recto al círculo (G'H', GPH) segun el cual le corta el plano horizontal V'G'H'; como entónces esta nueva base contiene *en su plano* al punto dado (V, V'), será ya inútil recurrir a la cúspide del cono, y bastará tirar las tanjentes a la actual base por el punto (V, V'); ademas de esto, como solo nos interesan los puntos de contacto, describirémos sobre la recta VO, como diámetro, una circunferencia que cortará al círculo GPH en los puntos P y Q, y los radios OP y OQ serán manifiestamente las proyecciones horizontales de las jeneratrices segun las que los planos tanjentes tirados de (V, V') tocarán al cono recto. Luego, si prolongamos estos radios hasta el paralelo dado EMF, tendremos que los puntos M y N que se proyectarán sobre E'F' en M' y N', serán dos puntos que pertenecerán (núm. 356) a la curba de contacto de la superficie S con el cono circunscrito cuya cúspide estuviese en (V, V').

359. Para hallar los puntos de esta curba que están sobre otro paralelo, operarémos de un modo enteramente semejante; y la *misma circunferencia* descrita sobre VO como diámetro, *servirá para todas estas operaciones*, supuesto que las tanjentes a la base del nuevo cono recto deberán tambien salir del punto (V, V'). Por ejemplo, si consideramos el paralelo (E'''F''', EMF) igual al precedente, será preciso tirar la tanjente E'''G''', que jirando al rededor del eje vertical, describirá un cono recto cuya base, considerada en el plano horizontal V'G', será el

---

(*) *Los tres puntos señalados con Z', en el actual depurado, se consideran como que representan el punto único en que la tanjente* E'Z' *iria a cortar al eje vertical, cuyo punto es la cúspide del cono recto, que no ha podido comprenderse en el cuadro de la lámina.*

círculo (G"'H"', G"P"H"); y como este está cortado por la circunferencia VO en dos puntor P" y Q", tendremos que los radios OP" y OQ" serán las proyecciones horizontales de las aristas de contacto del cono recto G"'E"'F"'H"' con los planos tanjentes que se le tirasen por el punto (V, V'); y en seguida, el encuentro de estos radios con el paralelo (EMF, E"'F"'), nos dará los puntos (M", M"') y N", N"') situados sobre este paralelo, y pertenecientes a la curba de contacto de la superficie S con el cono circunscrito que tiene su cúspide en (V, V').

360. *Método del meridiano.* Para hallar los puntos de esta misma curba que están situados sobre un meridiano cualquiera $\alpha O \beta$, figurémonos que por todos los puntos de este meridiano se han tirado rectas perpendiculares a su plano, cuyo conjunto formará *un cilindro* horizontal manifiestamente *circunscrito* a la superficie S, en toda la estension de esta curba meridiana. Si entónces tiramos por el punto (V, V') un plano tanjente a este cilindro; dicho plano será tambien tanjente al elipsoide en el punto en que toca a la base del cilindro; y por consiguiente, este punto pertenecerá a la curba que buscamos, porque esta es (núm. 348) el lugar de todos los puntos de contacto del elipsoide con los planos tanjentes que salen de (V, V').

Pero para construir este plano tanjente al cilindro horizontal, es preciso (núm. 116) tirar desde el punto (V, V') una paralela a las jeneratrices de esta superficie, es decir, una recta (VP", V'H"') perpendicular al plano vertical $\alpha O \beta$ que contiene la base del cilindro; y en seguida, desde el punto P" en que esta recta encuentra al plano meridiano, tirar tambien a esta base una o mas tanjentes. Pero para ejecutar esta última operacion, aplicarémos la meridiana $\alpha O \beta$ al plano vertical, haciendo lo mismo con el punto P", este último punto se traslada manifiestamente a (H", H"'); y tirando las tanjentes H"'φ' y H"'F"', obtendrémos los puntos de contacto (φ', φ) y (F"'F) sobre la base del cilindro abatido; si hecho esto, los restituimos, por medio de arcos de círculo horizontales, al meridiano primitivo $\alpha O \beta$, tendrán por verdadera posicion a (ψ, ψ') y a (M, M').

361. El último punto coincide con uno de los que hemos obtenido por el *método del paralelo,* porque en el caso presente se ha elejido el plano meridiano $\alpha O \beta$, de modo que contenga al punto (M", M"') que se ha construido ya; hemos preferido esta disposicion, con el objeto de

manifestar claramente que aun cuando los dos métodos se apoyan en consideraciones mui diferentes, a lo ménos emplean *las mismas operaciones gráficas, ejecutadas en un órden exactamente inverso,* como debemos verlo aquí respecto al punto (M", M'"). Ademas, sea cual fuere el método que se emplee, hai puntos particulares que se obtienen por medio de un procedimiento directo; y recomendamos *principiar la ejecucion del depurado* por la indagacion de estos *puntos notables.*

362. *Puntos situados sobre los contornos aparentes.* En cuanto a los que están situados sobre el equador (C'D', CLD), es evidente que los planos que toquen al elipsoide en estos puntos, serán *verticales,* y en este caso sus trazas horizontales serán las tanjentes VL y VK que salen del punto V; ademas, los puntos de contacto L y K están determinados, en la proyeccion horizontal, por el encuentro del círculo CLD con la circunferencia cuyo diámetro es VO, y será suficiente proyectar L y K a L' y K' sobre C'D'. Observemos, ademas, que como estos dos puntos se hallan, con respecto al plano horizontal, sobre el contorno aparente de la superficie, formarán sobre esta proyeccion los límites comunes del *arco visible* LMXK y del *arco invisible* LM"YK; ademas, el primero de estos arcos se distinguirá fácilmente del otro, con examinar si uno de sus puntos (M, M') está situado *encima* del equador C'D'.

Del mismo modo, respecto a los puntos situados sobre el meridiano principal (X'C'Y'D', CD), tendremos que los planos tanjentes al elipsoide, serán (núm. 159) perpendiculares al plano vertical; y así sus trazas pasarán por el punto V', y serán las dos tanjentes V'X' y V'Y' cuyos puntos (*) de contacto X' e Y' deberán proyectarse a X e Y sobre CD. Ademas, como estos dos puntos están, respecto al plano vertical, colocados sobre el contorno aparente de la superficie, separarán *en esta proyeccion el arco visible* X'M'Y' *del invisible* X'N'Y'; y el primero de estos dos arcos se distinguirá, examinando si uno de sus puntos (M, M')

(*) *Será suficiente tirar estas tanjentes con una regla que se apoyará en* V' *y en el meridiano; pero en seguida será preciso fijar su punto de contacto con exactitud, y para ello emplearémos las cuerdas suplementarias de la elipse meridiana.*

está colocado *delante* del plano vertical CD que contiene al meridiano principal.

363. *Puntos límites.* Entendemos por tales, a los pnntos en que *la tanjente* de la curba de contacto *es horizontal*, y por consiguiente estarán mas altos o mas bajos que los demas puntos vecinos. Esta circunstancia no podrá hallarse sino en el meridiano VO que pasa por la cúspide (V, V') del cono circunscrito; con efecto, el método jeneral que ha dado (núm. 358) los puntos (M, M') y (N, N'); nos dice claramente que los diversos puntos de la curba están *situados*, de dos en dos, *sobre las cuerdas horizontales* (MN, M'N') *que el plano vertical* VO *divide en dos partes iguales*: luego, siempre que uno de estos puntos correspondientes se halle en el plano vertical VO, el otro tambien se halla en él, y por consiguiente la cuerda relativa a estos puntos que así se han confundido, se habrá convertido en tanjente a la curba, sin haber dejado de ser horizontal.

Para determinar ahora estos púntos límites que ya sabemos están colocados sobre el meridiano VO, observarémos que la recta que uniese a uno de ellos con (V, V'), seria precisamenta *tanjente a la meridiana* VO, supuesto que se hallará a mismo tiempo en el plano de esta curba y en el plano tanjente del elipsoide: luego, si aplicamos este meridiano al plano vertical, haciendo tambien lo mismo con el punto (V, V'), que patentemente se habrá trasladado a V", y tiramos en seguida la tanjente V"U', cuyo punto de contacto U' determinarémos exactamente por medio de las cuerdas suplementarias, no habrá mas que proyectar este punto a U, y restituirle, por medio de un arco de círculo horizontal, a su verdadera posicion (R, R'). Este será el punto mas bajo de la curba, y la *tanjente horizontal* U'R' indicará la última de las paralelas que pueden contener pnntos de esta línea.

Del mismo modo se obtendrá el pnnto mas alto (T, T'); pero no hemos querido efectuar la construccion que para esto se necesita, por temor de causar alguna confusion en la figura.

364. En el presente ejemplo, en que la superficie de revolucion es de segundo grado, la curba de contacto es precisamente *plana* (núm. 353), y ademas es una elipse que en el espacio tiene por uno de sus *ejes* a la recta (RT, R'T'); pues que las tanjentes en los estremos de esta línea le son perpendiculares, en virtud de que lo son al plano

vertical VO (núm. 363). Sería tambien fácil concluir de aquí el segundo eje y los otros dos vértices, con dar una seccion al elipsoide por el medio de la recta (RT, R'T'); debemos ademas observar que estos dos *diámetros principales* permanecerán siendo los *ejes* de la proyeccion horizontal RLTK, porque siendo uno de ellos horizontal, permanecerá recto el ángulo comprehendido entre sus proyecciones; en tanto que sobre el plano vertical, estos dos diámetros no será perpendiculares uno a otro, y solo serán *dos diámetros conjugados oblícuos* de la curba R'L'T'K'.

365. Observacion. Si recordamos que toda superficie de revolucion puede considerarse como el *involucro de un cono móvil* (núm. 194) circunscrito siempre en la estension de un paralelo, o tambien como el *involucro de un cilindro móvil* (núm. 196) constantemente circunscrito a toda la estension de un meridiano, nos persuadirémos que en los dos métodos empleados núm. 357 y 360, nuestro objeto ha sido el sustituir a la superficie de revolucion propuesta un *involucro* cónico o cilíndrico, en el que es mes fácil la construccion del plano tanjente tirado desde el punto (V, V') que en la superficie primitiva. Pero como las superficies de revolucion pueden admitir tambien un *involucro esférica* (núm. 193), cuyo radio sea la normal al meridiano, de aquí resulta otro tercer método, ménos ventajoso en la práctica, pero que es interesante conocer.

FIG. 84. 366. *Tercer método por un involucro esférico.* Tracemos un círculo con la normal E'ω del meridiano, el cual jirando al rededor del eje vertical, enjendrará una esfera que será evidentemente tanjente a la superficie de revolucion S, en todo el largo del paralelo E'F'; y en seguida, figurémonos un cono circunscrito a esta esfera, y que tenga por cúspide al punto dado (V, V'). La curba de contacto de este cono ausiliar con la esfera, será un círculo menor (núm. 353 *nota*) cuyo plano será perpendicular a la recta (V'ω, VO); y como en los puntos en que este círculo menor encuentre al paralelo E'F', los planos tanjentes de la esfera serán comunes a la superficie S, síguese de aquí que estos puntos pertenecerán a la curba que buscamos X'M'Y'. Pero si hacemos jirar simultáneamente a la esfera y al cono circunscrito a ella, al rededor de la vertical O, hasta que el eje (V'ω, VO) de este llegue a ser paralelo al plano vertical, la cúspide (V, V') se trasladará a V''; y tirando las tanjentes V''γ y V''δ, el círculo de contacto sobre la esfera

estará entónces proyectado segun la cuerda $\gamma\delta$. En esta situacion, este círculo de contacto corta al paralelo E'F' en dos puntos colocados a las estremidades de la cureda proyectada verticalmente sobre el punto ε'; pero como la distancia de esta cuerda al eje de revolucion no varia cuando restituimos la esfera y el cono circunscrito a sus posiciones primitivas, es claro que refiriendo, por medio de un arco de círculo, el punto ε' sobre el meridiano primitivo VO a ε, y tirando por este último punto una cuerda perpendicular a VO, las intersecciones de esta cuerda con el paralelo EMF, nos darán los puntos pedidos M y N, que deberemos proyectar en seguida a M' y N' sobre E'F'.

PROBLEMA 2. *Tirar un plano tanjente a una superficie de revolucion, por un punto dado que la toque en un paralelo tambien dado.*

367. Nos será aquí necesario, como jeneralmente lo hemos enunciado en el núm. 351, construir la curba de contacto de la superficie con un cono circunscrito; es suficiente sí que apliquemos al paralelo señalado por la cuestion, el método del núm. 357 o el del núm. 366, y obtendrémos directamente los puntos de contacto de los planos tanjentes pedidos. En seguida, serán fáciles de construir estos planos (núm. 132).

PROBLEMA 3. *Tirar un plano tanjente a una superficie de revolucion, por un punto dado que la toque en un meridiano tambien dado.*

368. Este problema se resolverá tambien directamente, aplicando al meridiano asignado por la cuestion, el método esplicado en el núm. 360. Así conocerémos los puntos de contacto de los planos tanjentes que buscamos, y en este caso serán fáciles de determinar estos planos (núm. 132).

PROBLEMA 4. *Hallar la curba de contacto de una superficie* CUALQUIERA *de segundo grado, con un cono circunscrito cuya cúspide se nos ha dado.*

369. Tenemos por ejemplo un elipsoide de tres ejes desiguales, y elijamos los planos de proyeccion paralelos a dos de los tres *planos principales* de este cuerpo. En este caso, los contornos aparentes de la superficie serán las dos elipses (ABDE, A'D') y (A'C'D'F', AD), cada una de las cuales tendrá dos ejes comunes con el elipsoide; y represen- FIG. 85.

tando por (V, V') la cúspide del cono circunscrito, tratarémos de hallar los puntos de la curba de contacto, que estén situados sobre una seccion horizontal cualquiera G'H'. Esta seccion es una elipse *semejante* a ABDE, en la que (G'H', GH) es uno de los diámetros principales; si la miramos como la base de un cono *ausiliar*, que tenga la cúspide en el punto T' en que el eje vertical de la superficie es encontrado por la tanjente G'T', este cono T'G'H' estará circunscrito al elipsoide. Con efecto, todas las secciones producidas en la superficie por los planos tirados segun la vertical (O, O'T'), serán elipses que tendrán un eje comun (O, C'F'); ademas, como para todos los puntos de estas elipses colocados sobre G'H', es la misma la abscisa O'I', tambien la subtanjente será constantemente igual a I'T'; por consiguiente, las tanjentes a estas elipses verticales terminarán todas en el punto T', y de este modo formarán el cono circunscrito T'G'H'. Sentado esto, si tiramos un plano tanjente a este cono ausiliar que salga de (V, V'), la arista de contacto encontrará a la base G'H' en un punto que pertenecerá a la curba pedida; porque el plano tanjente del cono ausiliar en este punto, tocará al elipsoide y pasará ademas por el punto (V, V'), que es el carácter distintivo (núm. 348) de la curba de contacto de la superficie con el cono circunscrito cuya cúspide esté en (V, V').

370. Ahora, para tirar desde el punto (V, V') un plano tanjente al cono T'G'H', y a fin de no tener que operar sino sobre la elipse principal ABDE, *dato inmediato* de la cuestion, prolongarémos este cono hasta el plano horizontal A"D", que se ha elejido de modo que corte a esta superficie segun una elipse igual a la precedente; adoptando en seguida esta seccion (A"D", ABDE) por base del cono, y uniendo la cúspide con el punto (V, V'), inquirirémos el encuentro de esta recta (V'T'R', VOR) con el plano A"D"; y por último, tirarémos desde el punto R dos tanjentes RP y RQ, a la elipse ABDE. Una vez fijos con exactitud los puntos de contacto de estas tanjentes (por medio de las cuerdas suplementarias), tirarémos los radios OP y OQ, que son las proyecciones horizontales de las aristas de contacto, y fácilmente concluirémos de aquí sus proyecciones verticales T'P', T'Q'. Por último, como estas rectas cortan a la elipse G'H' en los puntos M' y N', las proyectarémos a M y N, y así obtendrémos los dos puntos de la curba pedida, que están colocados sobre la seccion horizontal G'H' del elipsoide.

Hubiéramos podido hallar directamente los puntos M y N, con proyectar H' a H, y tirar por este último punto las paralelas HM y HN a las cuerdas DP y DQ; porque en dos elipses semejantes, como las G'H' y A"D", los radios vectores OM y OP son proporcionales a los semi-ejes OH y OD.

371. En cualquiera otra seccion horizontal diferente de G'H', operarémos de un modo análogo; pero si sucediese que la cúspide T' del cono ausiliar estuviese situado a una distancia incómoda, podríamos adoptar por base de este cono, a la seccion K'L' dada por el plano horizontal tirado por el punto (V, V'); y en este caso, bastaria concebir que por este último punto se habian tirado tanjentes a esta elipse K'L'. Y estas rectas, así como tambien sus puntos de contacto, son fáciles de determinar por medio de una construccion directa, *sin necesidad de describir la curba*, y en virtud del solo conocimiento de los ejes, que aquí son proporcionales con AD y DB, y uno de los cuales es K'L'. Esta construccion está esplicada en un caso análogo (núm. 374) que veremos en breve.

372. *Puntos sobre los contornos aparentes.* Determinarémos estos, como en el problema precedente (núm. 362), tirando las tanjentes V'X' y V'Y' al contorno aparente del elipsoide sobre el plano vertical, y proyectando los puntos de contacto X' e Y' a X e Y sobre AD. Así mismo, las tanjentes Vx y Vy al contorno aparente sobre el plano horizontal, nos darán dos puntos x e y que deberémos proyectar a x' e y' sobre A'D'. Estos dos sistemas de puntos indicarán, ademas, las estremidades de los *arcos visibles* sobre los dos planos de proyeccion.

373. *Los puntos límites*, es decir, aquellos en que la tanjente de la curba es horizontal, están precisamente situados en el plano vertical VO. Con efecto, de la construccion jeneral que nos ha dado los puntos P y Q, o M y N, evidentemente resulta que, los puntos de la curba de contacto están de dos en dos sobre las cuerdas horizontales (MN, M'N'), que son constantemente *paralelas al diámetro conjugado con* OR en la elipse ABDE; y por consiguiente, cada una de estas cuerdas está dividida en dos partes iguales por el plano vertical VOR. Luego, cuando uno de estos puntos correspondientes se halle en el plano VOR, tambien el otro se hallará precisamente en él, y la cuerda que los una habrá llegado a ser tanjente a la curba, sin haber dejado de ser horizontal.

374. Para construir ahora estos puntos cuya altura sea un *máximo* o un *mínimo*, bastará tirar por el punto (V, V') dos tanjentes a la seccion producida en el elipsoide por el plano vertical VOR. Y como esta seccion es una elipse cuyos semi-ejes son O'C' y Oα; si la abatimos sobre el plano vertical, así como tambien al punto (V, V') que se trasportará a V", no habrá mas que tirar por este último dos tanjentes a una elipse cuyos semi-ejes son O'C' y O'α', problema que puede resolverse *sin trazar la curba*. Con efecto, despues de haber construido los focus φ y ψ de esta elipse, describirémos un arco de círculo con el radio V"φ, y otro desde el punto ψ como centro, y con un radio igual al eje mayor de la elipse; hecho esto, estas dos circunferencias se cortarán en los puntos β y γ, sabemos (*) que la recta V"δ tirada por el medio del arco $\varphi\beta$, es la tanjente pedida, y que su encuentro con la recta $\psi\beta$ nos dará a conocer al punto ε' de contacto. Por consiguiente, no habrá mas que restablecer el punto (ε, ε') en el plano vertical VO, por medio de un arco de círculo horizontal, y así obtendrémos el punto mas bajo (λ, λ') de la curba de contacto.

Así mismo, la segunda tanjente a la elipse precedente, será la recta V"ω que pasa por medio del arco $\varphi\gamma$; y su encuentro con $\psi\gamma$ determinará el punto de contacto (π, π'), que restituido al plano vertical VO, será el punto mas alto (μ, μ') de la curba en cuestion.

375. Podríamos tambien construir, de un modo análogo, los dos puntos de esta curba que estuviesen situados en el plano V'O', perpendicular al plano vertical; porque la seccion producida en el elipsoide por este plano secante V'O', sería una elipse cuyos ejes son fáciles de hallar: pero por no hacer difícil la lectura del depurado, dejamos al cargo del lector la ejecucion de esta construccion, que es enteramente semejante a la anterior.

376. Al terminar este asunto, haremos observar que el método empleado aquí respecto a un elipsoide, es así mismo aplicable a un hiperboloide, y tambien a un paraboloide, con solas las lijeras modificaciones

---

(*) *Véase, en los Tratados de análisis aplicado a la Jeometría,* el método gráfico de los antiguos *para tirar tanjentes a las secciones cónicas.*

que naturalmente lleva consigo la naturaleza de las secciones planas orijinadas en estas superficies.

CAPITULO II.

De los planos tanjentes paralelos a una recta dada.

377. Sea S una superficie cualquiera, y VO la recta dada (o una línea paralela a la recta dada, y tirada por un punto tomado arbitrariamente en el interior de S): si tiramos por la línea VO varios planos secantes, estos cortarán a la superficie S segun las curbas ABD, AB'D, AB"D,.... que siempre podrán construirse por los métodos jenerales del libro IV; y tirando a estas secciones las tanjentes BU, B'U', B"U".... paralelas a VO, estas formarán un cilindro que será *circunscrito* a S, es decir, que *tocará a esta superficie en toda la estension de la curba* BB'B"E. Con efecto, el plano tanjente de S relativo a un punto cualquiera B", evidentemente contendrá a la arista B"U" del cilindro, así como tambien a la tanjente *B"t* a la curba BB'B".... que le sirve de base; luego, este plano será tambien tanjente al cilindro, y en virtud de esto, esta última superficie tendrá un verdadero contacto con S en el punto B", así como tambien en todo el largo de la línea BB'B"E. FIG. 80.

378. Sentado esto, para *tirar un plano tanjente a la superficie* S *de modo que sea paralelo a una recta dada* VO, será suficiente determinar la curba de contacto BB'E de esta superficie con un cilindro circunscrito paralelo VO, y construir en seguida el plano tanjente de S tirado por un punto cualquiera de los de esta línea de contacto; porque este plano tocará precisamente al cilindro circunscrito, y por consiguiente contendrá a una de sus aristas que son todas paralelas a VO; luego, él mismo será tambien paralelo a esta recta.

Y reciprocamente, todo plano paralelo a VO que toque a la superficie S en un punto determinado que llamarémos *b*, precisamente conten-

drá a una recta tirada por este punto *b* paralelamente a VO: luego, esta última recta será una arista del cilindro circunscrito, y su punto de contacto *b* deberá por consiguiente hallarse sobre la curba BB'E, que es, segun esto, *el lugar esclusivo de todas las soluciones* del problema propuesto.

Por consiguiente, este problema será imposible, cuando no exista el cilindro circunscrito paralelo a la recta dada; lo que tendrá lugar, entre otros ejemplos, en un paraboloide, siempre que la recta propuesta sea paralela al *eje* de la superficie; porque entónces las intersecciones ABD, AB'D.... serán parábolas, las cuales no tienen tanjente paralela a su diámetro principal.

379. De estos principios resulta que la cuestion jeneral que nos ocupa, es susceptible de una infinidad de soluciones, o no da ninguna. Debemos esceptuar únicamente el caso de ser S una superficie *desarrollable*, porque entónces, segun la observacion hecha en el núm. 349, el plano móvil que enjendra semejante superficie, y que es al mismo tiempo su plano tanjente, está completamente determinado por la nueva condicion de ser paralelo a una recta dada. Esto es lo mismo que hemos reconocido ya respecto a los cilindros y conos, en el capítulo III del libro II.

380. El problema de tirar a una superficie S, que no sea desarrollable, un plano tanjente paralelo a una recta dada sería determinado, si agregásemos la condicion de que este plano debiese tener un punto de contacto *sobre una curba conocida*, porque en tal caso este punto nos daria el encuentro de esta curba con la línea de contacto del cilindro circunscrito.

En cuanto a la construccion de esta última línea, que tambien es mui útil en la *teoría de las sombras*, el único método jeneral es el que hemos indicado núm. 377; pero daremos mui pronto procedimientos mas cómodos, para ciertos jéneros de superficies que se hallan frecuentemente, despues que háyamos hecho algunas observaciones sobre las líneas de contacto en las superficies de segundo grado.

381. *La curba de contacto de un cilindro circunscrito a una superficie de segundo grado, es siempre* PLANA, *y está situada en el plano diametral que es conjugado con el diámetro paralelo al cilindro.*

FIG. 80. Con efecto, si por el centro O de la superficie de segundo grado S,

concibimos una recta VO paralela a la direccion del cilindro, las diversas secciones ABD, AB'D, AB"D... producidas por los planos tirados segun VO, serán curbas de segundo grado que todas tendrán un diámetro comun AOD: pero cortando a estas curbas con el plano diametral BB'E conjugado con AD (es decir el plano que divida en dos partes iguales a cada una de las cuerdas paralelas a AD), las intersecciones serán las rectas OB, OB', OB",.... que precisamente serán *diámetros conjugados con* OA, en cada una de las curbas correspondientes. Luego, las tanjentes BU, B'U', B"U",.... tiradas a estas secciones por los diferentes puntos B, B', B",.... serán paralelas a OA, y segun esto formarán un cilindro circunscrito a la superficie S, cuya línea de contacto BB'B" estará toda ella colocada en el plano diametral BB'E conjugado con OA (*).

Este resultado importante, puede ademas considerarse como una consecuencia del teorema demostrado núm. 353, respecto a la línea de contacto de un cono VMM'N circuscrito a S; porque si la cúspide V se alejase al infinito sobre la recta OAV, es fácil ver que los diversos puntos de contacto M, M', M".... se transportarian a B, B', B"....

382. Para estender el teorema precedente a los dos paraboloides que están destituidos de centro, figurémonos que por el eje principal OX de la superficie pasa un plano EOF paralelo a la direccion asignada a las jeneratrices del cilindro, y tírese en esta direccion una tanjente VBU a la parábola EOF; en este caso, el plano diametral que corte en dos partes iguales a todas las cuerdas paralelas a VBU, pasará evidentemente por el punto de contacto B de esta tanjente, y producirá en la superficie, una seccion parabólica BB'B"C. Sentado esto, todas las rectas B'U', B"U",.... tiradas por los diversos puntos de esta última parábola, paralelamente a VBU, serán precisamente tanjentes a la superficie; porque de no ser así, sus partes interiores, o *cuerdas*, no es- FIG. 82.

(*) *En el caso particular en que la superficie propuesta sea una esfera, la curba de contacto del cilindro circunscrito se convertirá en* un círculo máximo perpendicular a la direccion VO *de las aristas del cilindro; cuyo resultado se prueba directamente, haciendo jirando al rededor de* VO *a un círculo máximo y su tanjente paralela a esta recta.*

tarian cortadas en su medio por el plano BB'C, que suponemos ser diametral y conjugado con VBU. Por consiguiente, todas las rectas BU, B'U', B"U"..... formarán el cilindro circunscrito que se nos pedia, y vemos ademas que su línea de contacto BB'B"C con la superficie, será plana y siempre *parabólica*.

Hubiéramos podido emplear en el núm. 331 un raciocinio semejante, fundado en la definicion misma del plano diametral.

PROBLEMA I. *Hallar la curba de contacto de una superficie de revolucion, con un cilindro circunscrito y paralelo a una recta dada.*

FIG. 86. 333. Sea (O, I'Z') el eje de la superficie de revolucion, y (E'C'E'"D', CD) el meridiano principal, cuya forma particular no tendrá ninguna influencia en el resultado del método. Sea ademas (AB, A'B') la recta a que debe ser paralelo el cilindro circunscrito; puede construirse la curba de contacto *x'm'y'* (*) de este cilindro con la superficie propuesta, indagando sucesivamente los puntos de ella que estén situados sobre cada paralelo, o bien los que se hallen sobre cada meridiano; de donde resultan los dos procedimientos siguientes.

334. *Método del paralelo.* Sea (E'F', E*m*F) un paralelo elejido arbitrariamente sobre la superficie de revolucion S; sustituyendo a este el cono recto enjendrado por la revolucion de la tanjente E'Z' del meridiano, es claro que este cono tocará a la superficie en toda la estension del paralelo E'F', y que así todo plano tanjente que se tire a este cono, paralelamente a (AB, A'B'), tocará a S en el punto en que la arista de contacto encuentre al paralelo E'F'; luego, este punto pertenecerá a la curba pedida, cuya propiedad característica (núm. 378) consiste en que, *en cada uno de sus puntos, el plano tanjente de la superficie* S *es paralelo a* (AB, A'B').

Así es que nos hemos contraido a dirijir un plano tanjente al cono Z'E'F' paralelamente a una recta dada; pero para no vernos en la pre-

---

(*) *Como el presente problema tiene mucha analojía con el del núm. 356, haremos aquí uso de letras minúsculas, con el fin de notar los puntos análogos, sin confundir no obstante las dos curbas que a la vez están reproducidas en el diseño.*

cision de recurrir a la cúspide del cono Z', que podrá mui bien estar situada a una distancia incómoda, y con el objeto tambien de no tener que tirar tanjentes, sino desde un mismo punto fijo, modificarémos el procedimiento jeneral del núm. 124, del modo siguiente.

Figurémonos que se ha transportado el cono recto Z'E'F' paralelamente a sí mismo, con el plano tanjente pedido, hasta que la cúspide haya llegado a colocarse en un punto O' del eje vertical (O, I'Z'); conocemos mui bien que la arista de contacto habrá conservado en este movimiento la misma proyeccion *horizontal*; y la traza horizontal del cono así transportado, se obtendrá tirando la recta O'*e*' paralela a Z'E', y describiendo con un radio O*e* = I'*e*' el círculo *epf*. En este caso, para tirar a este cono un plano tanjente paralelo a (AB, A'B'), tirarémos en esta direccion la recta (O'*a*', O*a*), que penetrará al plano horizontal en el punto (*a*, *a*'), desde el que deberán salir las tanjentes al círculo *epf*; pero como no necesitamos sino de los puntos de contacto, describirémos sobre O*a*, como diámetro, una circunferencia que por medio de su encuentro con el círculo *epf*, determinará estos puntos *p* y *q*; y los radios O*p* y O*q* seran las proyecciones horizontales de las jeneratrices de contacto de los planos tanjentes que buscábamos. Estas jeneratrices van ahora a encontrar al paralelo (E*m*F, E'F'), base del cono primitivo, en los puntos (*m*, *m*') y (*n*, *n*'); por consiguiente, aquí se hallan dos puntos de la curba de contacto de la superficie de revolucion con el cilindro circunscrito.

385. De un modo enteramente semejante se construirán los puntos de esta curba situados sobre otro paralelo, *transportando siempre al punto* O' la cúspide del cono recto circunscrito a la estension de este paralelo; y por lo tanto, *la circunferencia descrita sobre el diámetro* O*a*, *servirá para todas estas operaciones.*

Pero será mui ventajoso, indagar inmediatamente los puntos situados sobre el paralelo E'''F''' igual a E'F', sobre todo si se halla el meridiano, como sucede en este ejemplo, en posicion simétrica sobre el plano horizontal C'D' y debajo de él; porque entónces, no habrá que ejecutar ningunas construcciones gráficas nuevas. Con efecto, si concebimos el cono Z'''E'''F''' circunscrito a toda la estension del paralelo E'''F''', es evidente que sus jeneratrices serán respectivamente paralelas a las del cono Z'E'F'; de modo que, cuando lo transportemos al punto O' se-

gun la regla precedente, coincidirá enteramente con el cono O'*e'f'*; y todas las operaciones ulteriores vendrán a ser las mismas que anteriormente; de aquí concluirémos que las aristas de contacto con los planos tanjentes que buscábamos, se hallarán aun proyectadas horizontalmente sobre los radios O*p* y O*q*, que por su encuentro con el círculo E*m*F, nos darán tambien los puntos pedidos. No obstante, será preciso prolongar aquí estos radios mas allá del punto O, para obtener la verdadera posicion de los puntos *m*" y *n*", que se proyectarán a *m*"' y *n*"' sobre el paralelo E"'F"'; y la razon de esta diferencia consiste en que este paralelo estaba situado sobre la napa *superior* del cono Z"'E"'F"', en tanto que el círculo *epf*, al cual tiramos las tanjentes *ap* y *aq*, se halla sobre la napa *inferior* de este cono transportado a la posicion O'*e'f'*.

FIG. 86. 386. *Método del meridiano.* Si queremos obtener los puntos de la curba en cuestion, que esten situados sobre un meridiano dado αOβ, nos figurarémos tiradas, por todos los puntos de este meridiano, rectas perpendiculares a su plano, las cuales formarán un cilindro horizontal *circunscrito* evidentemente a la superficie de revolucion, en toda la estension de este meridiano. Si en este estado, tiramos a este cilindro ausiliar un plano tanjente paralelo a (AB, A'B'), este plano tocará a la superficie S en el punto en que encuentre a la meridiana αβ, que es la base del cilindro; y por consiguiente, este punto pertenecerá a la curba que buscamos, que es (núm. 378) *el lugar de todos los puntos de contacto de los planos tanjentes de* S *tirados paralelamente a la recta* (AB, A'B').

Para construir este plano tanjente al cilindro ausiliar que es horizontal, tirarémos (núm. 117) la recta (O*a*, O'*a'*) paralela a (AB, A'B'), y por el pie (*a*, *a'*) bajarémos una perpendicular *ap* al plano vertical αOβ; uniendo entónces el punto *p* con (O, O'), tendremos la direccion segun que es preciso tirar una tanjente a la meridiana αβ, que es la base del cilindro propuesto. Pero para poder efectuar esta operacion, abatirémos sobre el plano vertical esta meridiana y la recta que reuna los puntos *p* y (O, O'); de este modo, el punto *p* se transporta a (*e*, *e'*), y la recta en cuestion es (O*e*, O'*e'*); por consiguiente, tirarémos paralelamente a esta última una tanjente Z'E' al meridiano principal, y despues de referido el punto de contacto (E', E) al meridiano primitivo Oα por medio de un arco de círculo, nos dará el punto pedido (*m*, *m'*).

Como podemos tirar al meridiano principal otra segunda tanjente paralela a O'e', existe otro segundo punto de contacto (F''', F), que referido al meridiano αOβ, nos dará un nuevo punto (m'', m'''), que tambien pertenecerá a la curba que buscamos.

387. Hallamos aquí dos puntos que son los mismos que hemos construido ya por otro método, en virtud de haber elejido el meridiano αOβ de modo que pase por estos mismos puntos; y de este modo hemos querido manifestar la circunstancia notable de que, si los dos métodos están fundados en consideraciones diferentes, a lo ménos emplean *las mismas operaciones gráficas* ejecutadas *en un órden exactamente inverso*. Pero, ademas de los puntos situados sobre un paralelo o un meridiano cualquiera, hai otros muchos que se obtienen por procedimientos directos, y recomendamos al lector que principie la traza del depurado por la indagacion de estos puntos notables.

388. *Puntos sobre los contornos aparentes.* Los planos tanjentes de la superficie en los puntos de la curba en cuestion que se hallen sobre el equador (C'D', ClD), serán verticales; y así las trazas horizontales de estos planos serán rectas paralelas a AB y tanjentes al círculo ClD. Luego, tirando el diámetro *kl* perpendicular a AB, los estremos *k* y *l*, que proyectarémos sobre C'D' a *k'* y *l'*, nos darán los puntos pedidos. Ademas, el arco de curba que es *visible sobre el plano horizontal*, se terminará precisamente en estos dos puntos, puesto que pertenecen al contorno aparente de la superficie respecto a este plano de proyeccion; y este arco visible *lmnk* se distinguirá del resto de la curba, examinando si uno de sus puntos (*m*, *m'*) se halla *encima* del equador C'D'. FIG. 86.

En cuanto a los puntos de la curba que están colocados sobre el contorno aparente de la superficie respecto al plano vertical, es decir, sobre el meridiano principal, observarémos que los planos tanjentes correspondientes serán perpendiculares al plano vertical; luego, sus trazas serán rectas paralelas a A'B' y tanjentes a la meridiana E'C'E'''. Y así, tirando estas tanjentes y determinando sus puntos de contacto *x'* e *y'*, que proyectarémos sobre CD a *x* e *y*, obtendrémos los puntos que buscamos, que tambien formarán las estremidades del arco de curba *visible sobre el plano vertical*; este arco será aquí *x'm'y'*, porque uno de sus puntos (*m*, *m'*) está colocado *delante* del plano vertical CD que contiene al meridiano principal.

389. *Los puntos límites*, es decir, aquellos en que *la tanjente* á la curba es *horizontal*, estarán precisamente situados en el meridiano O*a* paralelo a la recta dada (AB, A'B'). Con efecto, manifiestamente resulta de la construccion jeneral que nos ha dado los dos puntos (*m*, *m*') y (*n*, *n*') relativos a un mismo paralelo, que este plano vertical O*a* divide en dos partes iguales a todas las cuerdas que le son perpendiculares, tales como (*mn*, *m'n'*): luego, cuando uno de estos puntos se halle en el plano meridiano O*a*, el otro punto correspondiente deberá tambien hallarse en él, y la recta indefinida que los reune se habrá convertido en tanjente a la curba, sin haber dejado de ser horizontal.

Para construir, ahora, estos puntos colocados sobre el meridiano O*a*, observaremos que la arista del cilindro circunscrito que pasase por uno de ellos, sería precisamente tanjente a la meridiana O*a*, puesto que se hallaria en su plano; por consiguiente, bastará tirar tanjentes a esta meridiana, paralelamente a la recta (AB, A'B'). Al efecto, abatirémos sobre el plano vertical al meridiano O*a* y a la recta (O*a*, O'*a*'), que es paralela a (AB, A'B'); esta recta abatida es la O'*a*", y tirando en esta direccion una tanjente al meridiano principal, el punto de contacto *u*' se proyectará en *u*; y en seguida cuando se restituya este punto al meridiano primitivo O*a* tomará la posicion (*r*, *r*') que es el punto *mas bajo* de la curba. El punto mas alto (*t*, *t*') lo hallaremos de un modo semejante tirando al meridiano principal otra segunda tanjente paralela a O'*a*"; pero en el ejemplo presente en que el meridiano es una elipse, sabemos que los dos puntos de contacto de estas tanjentes paralelas, se hallarán sobre un mismo diámetro cuyo medio O' permanecerá inmóvil cuando hagamos jirar el meridiano al rededor del eje vertical; por consiguiente, los dos puntos (*r*, *r*') y (*t*, *t*') deberán tambien hallarse sobre un diámetro de la superficie, y así, este último podrá deducirse del otro.

390. Esta relacion, y la manifiesta dependencia que existe aquí entre los puntos (*m*, *m*') y (*m*", *m*"'), (*n*, *n*') y (*n*", *n*"'),.... es una consecuencia necesaria del teorema demostrado en el núm. 381, en virtud del cual hemos visto, que cuando la superficie es de segundo grado, la curba de contacto de un cilindro circunscrito está toda ella en el plano diametral conjugado con el diámetro (O*a*, O'*a*'); de donde resulta evidentemente que el centro (O, O') de la superficie de segundo grado, debe ser tambien *el centro de la curba* de contacto. Podemos tambien

observar que en el espacio, los dos ejes de esta curba son los diámetros (kl, $k'l'$) y (rt, $r't'$), supuesto que las tanjentes tiradas en los estremos de cada uno de ellos les son perpendiculares (núm. 339). Y como uno de estos dos ejes es *horizontal*, continuarán siendo los *diámetros principales* de la curba en la proyeccion horizontal; pero no será lo mismo sobre el plano vertical, en el que simplemente son *diámetros conjugados* oblícuos.

391. *Tercer método, por un involucro esférico.* En razon a las observaciones hechas en el núm. 365, podremos obtener los puntos de la curba precedente, que están situados sobre un paralelo dado E'F', sustituyendo a la superficie de revolucion S, una esfera que le esté circunscrita en toda la estension de este paralelo, y cuyo radio sea la normal F'ω en el punto F' del meridiano principal. Con efecto, concibamos un cilindro *ausiliar* circunscrito a esta esfera y paralelo a (AB, A'B'); la curba de contacto será, en este caso, un círculo máximo perpendicular a esta recta (núm. 381, *nota*); y como en los puntos en que este círculo máximo encuentre al paralelo E'F', los planos tanjentes de la esfera serán comunes a la superficie S, síguese de aquí que estos puntos pertenecerán a la curba pedida, cuyo carácter consiste en que cada plano tanjente de S sea paralelo a (AB, A'B'). Pero si hacemos jirar al rededor de la vertical O, a la esfera y al cilindro circunscrito, así como tambien a la recta (Oa, O'a') que indica la direccion de las aristas de este cilindro, hasta que esta última recta haya llegado a la posicion O'a'' paralela al plano vertical, entónces el círculo máximo de contacto sobre la esfera, estará proyectado segun el diámetro γωδ perpendicular a O'a''; y en esta situacion, este círculo máximo cortará al círculo E'F' en dos puntos situados en los estremos de la cuerda horizontal proyectada en ε'. Pero la distancia de esta cuerda no varia respecto al eje vertical O, cuando restituyamos el sistema a su estado primitivo; por cononsiguiente, si referimos, por medio de un arco de círculo, el punto ε' a ε sobre el meridiano Oa, y tiremos la cuerda $m\varepsilon n$ perpendicular a Oa, tendremos que los puntos m y n, en que esta cuerda encuentre al paralelo EmF, serán los puntos pedidos, que en seguida será preciso proyectar sobre E'F' en m' y n'. FIG. 86.

PROBLEMA 2. *Tirar un plano tanjente a una superficie de revolu-*

cion, paralelo a una recta dada, y cuyo punto de contacto se halle sobre un paralelo conocido.

392. No será necesario en este caso, como lo hemos indicado jeneralmente en el núm. 380, el construir la curba de contacto de la superficie de revolucion con un cilindro circuscrito, cuyas aristas sean paralelas a la recta dada; sino que bastará aplicar inmediatamente al paralelo señalado por la cuestion, el método del núm. 384 o el del núm. 391, que nos dará a conocer el punto de contacto del plano pedido; hecho esto, será ya mui fácil la construccion de este plano.

PROBLEMA 3. *Tirar un plano tanjente a una superficie de revolucion, paralelo a una recta dada, y cuyo punto de contacto se halle sobre un meridiano conocido.*

393. Resolverémos directamente este problema, aplicando al meridiano dado por la cuestion, el método espuesto núm. 386, que nos dará a conocer inmediatamente el punto de contacto del plano tanjente que buscamos, lo que será suficiente para construir este plano.

PROBLEMA 4. *Construir la curba de contacto de una superficie* CUALQUIERA *de segundo grado, con un cilindro circunscrito paralelo a una recta dada.*

394. Disponiendo los datos de la cuestion como en el depurado 85 relativo al problema del núm. 369, sustituirémos, en primer lugar, al elipsoide un cono circunscrito a toda la estension de una seccion horizontal G'H'; en seguida, tirarémos a este cono T'G'H' un plano tanjente paralelo a la recta dada, en lugar de hacerle pasar por el punto (V, V'). Al efecto, sabemos que será preciso tirar por la cúspide una paralela a la recta señalada por la cuestion, inquerir en seguida el punto de encuentro de esta paralela con el plano A"D", que tambien adoptarémos por base del cono; y por este punto será por donde deberémos tirar tanjentes a la elipse ABDE. Prescindiendo de esta modificacion, las operaciones gráficas serán las mismas que en el ejemplo ya citado; y por lo tanto, dejamos al lector el cuidado de ejecutar las construcciones, que tambien son aplicables de un modo análogo, o cualquiera otra superficie de segundo grado.

CAPITULO III.

De los planos tanjentes tirados por una recta dada.

395. Para resolver jeneralmente este problema respecto a una superficie cualquiera S, que es preciso suponer *no desarrollable,* porque de otro modo sería la cuestion imposible (núm. 349); concibamos un cono circunscrito a S, y cuya cúspide V esté colocada arbitrariamente *sobre la recta dada* AB; determinemos en seguida, por alguno de los métodos espuestos anteriormente, la curba de contacto $X\lambda Y$ de este cono con la superficie S. Como esta curba es (núm. 348) *el lugar de los puntos de contacto de todos los planos tanjentes de* S *que van a pasar por el punto* V, necesariamente contendrá al punto de contacto λ del plano tanjente tirado por AVB; y si construimos del mismo modo la curba de contacto $X'\lambda Y'$ de otro segundo cono circunscrito tambien a S, y que tenga su cúspide V' sobre AB, esta curba deberá así mismo pasar por el punto pedido λ, y por consiguiente nos le dará a conocer la interseccion de las dos líneas $X\lambda Y$ y $X'\lambda Y'$. Fig. 83.

Reciprocamente, todo punto λ o μ que sea comun a estas dos curbas, cumplirá con las condiciones del problema; porque en el hecho mismo de que μ se halle sobre XY, el plano tanjente de S en μ pasará por el punto V; en seguida, con motivo de que tambien este punto μ se halla sobre X'Y', este mismo plano tanjente pasará por V'; de todo lo cual debemos concluir que este plano contendrá a la recta dada AB.

396. Podemos tambien combinar la curba $X\lambda Y$ con la línea de contacto $x\lambda y$ de un cilindro circunscrito a S, paralelamente a la recta AB. Con efecto, esta última línea es el lugar de los puntos de contacto de todos los planos tanjentes a S que son *paralelos a* AB (núm. 378); y como el plano que buscamos cumple con esta condicion, deberá tambien hallarse su punto de contacto λ sobre la curba $x\lambda y$. Reciprocamente, en todo punto comun a las curbas $x\lambda y$ y $X\lambda Y$, el plano tanjente a S cumplirá con las dos condiciones siguientes : 1.ª ser paralelo a

AB; 2.ª pasar por el punto V; luego, este plano contendrá a la recta AVB.

397. De aquí resulta que, cuando las curbas xy, XY, X'Y',.... no se encuéntran, será imposible el problema de tirar un plano tanjente a la superficie S por la recta dada AB; y conocemos *a priori* que esto debe tener lugar en ciertas posiciones de esta recta.

398. Observacion. Sabemos que cuando la superficie propuesta S es de segundo grado (núm. 353) todas las curbas de contacto XY, X'Y', X"Y".... de los conos circunscritos cuyas cúspides se hallan sobre AB, son *planas;* por consiguiente, los planos de estas curbas tienen entónces por interseccion comun a la cuerda $\lambda\mu$ que reune los puntos de contacto de los dos planos tanjentes tirados por AB a la superficie S. Por otra parte, es fácil ver que esta cuerda es *conjugada* con el plano diametral que pase por AB.

399. Ademas, cuando la recta AB esté situada en un plano *principal* de la superficie S, que para simplificar el lenguaje llamarémos *horizontal*, los planos de las curbas XY, X'Y', X"Y",.... que son (núm. 353) respectivamente paralelos a la planos diametrales conjugados con las rectas VO, V'O', V"O", serán todos *verticales*, y por consiguiente las curbas XY, X'Y'.... se proyectarán segun rectas que todas pasarán por el punto en que se proyecta la cuerda $\lambda\mu$; como ademas los conos mismos circunscritos a la superficie se proyectarán segun pares de tanjentes a la seccion principal, podremos concluir de aquí este teorema notable de jeometría plana: *si hacemos mover sobre una recta* AB *el vértice* V *de un ángulo variable* XVY *cuyos lados permanezcan tanjentes a una curba de segundo grado, las cuerdas que unan de dos en dos los puntos de contacto de estas tanjentes correspondientes, se encontrarán todas en un punto solo, que estará situado sobre el diámetro conjugado con la recta* AB. Esta última circustancia resulta de que la cuerda $\lambda\mu$ se halla en el plano $x\lambda y$, que es él mismo (núm. 381) plano diametral conjugado con AB.

400. Volviendo al problema jeneral que es el objeto de este capítulo, vemos que su solucion requerirá ordinariamente el trazado de las curbas de contacto de los dos conos, o bien de un cono y de un cilindro circunscrito a la superficie propuesta S; pero en muchos casos, podrá

simplificarse esta marcha valiéndonos de las consideraciones particulares que vamos a esponer en diversos ejemplos.

PROBLEMA 1. *Tirar un plano tanjente a una esfera, por una recta dada.*

401. Hagamos pasar los dos planos de proyeccion por el centro de la esfera dada, en cuyo caso las secciones producidas por estos planos, que formarán el contorno aparente de la superficie, estarán abatidas segun un solo círculo EE'F'F descrito desde el punto O con el mismo radio de la esfera. Sea ademas (AB, A'B') la recta dada; si nos imajinamos un cono circunscrito a la esfera, y cuya cúspide esté en un punto cualquiera de esta recta, será suficiente tirar a este cono un plano tanjente que pase por (AB, A'B'), para obtener la solucion del problema propuesto; porque como este plano contiene a una jeneratriz del cono circunscrito y a una tanjente a su base, que son dos rectas tanjentes a la esfera, será él mismo tanjente a esta última superficie. FIG. 87

Elijamos por cúspide de este cono circunscrito, al punto (A, A') en que la recta dada penetra al plano horizontal; en seguida, tiremos las tanjentes AE y AF al círculo máximo horizontal de la esfera, el cono EAF tocará a esta superficie segun un círculo menor perpendicular a la línea AO (núm. 353, *nota*); por consiguiente, este círculo menor será *vertical* y estará proyectado sobre su diámetro EF; en seguida, como el plano vertical EF va a encontrar a la recta dada en el punto (R, R'), desde este punto es de donde debemos tirar (núm. 123) tanjentes a la base del cono. Al efecto, abatirémos el círculo vertical EF sobre el plano horizontal, haciéndole jirar al rededor de su diámetro EF, este círculo es el ETF; pero a cansa de este movimiento, el punto (R, R'), cuya menor distancia a la charnela EF era la vertical (R, R'G), se trasladará, perpendicularmente a esta charnela, a una distancia RR"=R'G; cuyas tanjentes R"S y R"T nos darán a conocer, en el abatimiento, los puntos de contacto S y T de los planos tanjentes pedidos con la base del cono, y tambien con la esfera. Ahora, para restituir estos puntos a su verdadera posicion, levantarémos el sistema haciéndole jirar al rededor de la charnela EF, y bajando sobre esta línea las perpendiculares Sλ y Tμ, obtendrémos las proyecciones horizontales λ y μ de los puntos de contacto que buscamos. En cuanto a las proyecciones verticales, observarémos que los puntos S y T, cuando se levanten, tendrán por alturas

sobre el plano horizontal a las ordenadas $S\lambda$ y $T\mu$; luego, si tomamos sobre perpendiculares a la línea de tierra, las distancias $I\lambda'=S\lambda$ y $V\mu'=T\mu$, tendremos por último a (λ, λ') y (μ, μ') por puntos de contacto de la esfera con los planos tanjentes tirados por la recta (AB, A'B').

402. Una vez hallados los puntos de contacto, será mui fácil obtener las trazas AX y XB', AY e YB', de cada plano, supuesto que todas ellas deben pasar por los puntos A y B', y ser respectivamente perpendiculares a las proyecciones de los radios tirados a los puntos de contacto. Sin embargo, como esta última condicion no siempre presentará en la práctica, toda la exactitud descable, podremos reemplazarla con una recta que úna el punto de contacto con un punto arbitrario de (AB, A'B'), o que sea paralelo a esta última línea.

FIG. 87. 403. *Segundo método.* Ademas del cono EAF circunscrito ya a la esfera, concibamos otro cono circunscrito tambien a la misma esfera, y cuya cúspide esté en (B, B'). Este último tocará a la esfera segun un círculo menor perpendicular a la línea B'O (núm. 353, *nota*), y por consiguiente perpendicular al plano vertical de proyeccion, que es el mismo en que está colocada esta línea; y así, tirando las tanjentes B'E' y B'F', este círculo menor de contacto estará proyectado verticalmente sobre E'F' que será su diámetro. Pero segun las consideraciones jenerales espuestas en el núm. 395, los círculos EF y E'F' deben ámbos pasar por los puntos de contacto de la esfera con los planos tanjentes tirados por (AB, A'B'); luego, estos dos puntos se hallarán en las estremidades de la cuerda segun la cual se cortan estos dos círculos, cuya cuerda tiene precisamente por proyeccion horizontal a la recta indefinida EF, y por proyeccion vertical a E'F'.

Sentado esto, abatamos esta cuerda con uno de los círculos que la contiene, por ejemplo, con el círculo vertical EF que, jirando al rededor de su diámetro horizontal, ha llegado a colocarse en ETF. Durante este movimiento, el punto (K, K') en que la cuerda en cuestion penetra al plano horizontal, permanecerá inmóvil, porque se halla sobre la charnela EF; otro segundo punto de esta cuerda, por ejemplo, su traza vertical (L, L') describirá un arco de círculo cuyo radio será la vertical L'L levantada desde este punto a la charnela; luego, si tomamos en una direccion perpendicular a EF, la distancia LL"=LL', el punto L" será la posicion que tomará (L, L') despues del abatimiento de la

cuerda, y esta última se convertirá en KL". En este caso, los puntos S y T en que esta recta corte al círculo menor abatido segun ETF, serán las dos estremidades de la cuerda; y no habrá mas que referirlos a EF, por medio de las perpendiculares Sλ y Tμ, y por último proyectar los puntos λ y μ sobre E'F' a λ' y μ'.

404. *Tercer método.* Despues de haber determinado solamente las rectas EF y E'F', por medio de los pares de tanjentes tiradas a la esfera por los puntos A y B', y de haber observado que allí es donde se hallan *las proyecciones de la cuerda* que une los dos puntos de contacto de los planos tanjentes pedidos; podemos evitar el trazar otra nueva circunferencia, hallando el encuentro de esta cuerda (EF, E'F') con el *círculo máximo* que la contiene. El plano de esta última tendrá por traza horizontal a OK, y abatiéndolo al rededor de esta recta, este círculo máximo se confundirá con el contorno de la esfera. En cuanto a la cuerda (EF, E'F') transportada por el mismo movimiento, siempre pasará por el punto K, que por hallarse sobre la charnela, permanece inmóvil; en tanto que el punto (L, L') de esta curba describirá un arco de círculo cuyo radio será la perpendicular bajada desde este punto a la OK. Pero si tiramos la LM de modo que forme ángulo récto con OK, veremos con facilidad que el radio en cuestion terminará en M, y será la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados son LM y LL'; si construimos este triángulo NLM, y prolongamos a LM una cantidad Ml'= MN, el punto l' será la posicion que tomará (L, L') despues del abatimiento de la cuerda, y por consiguiente, esta recta se convertirá en Kl'". En cuyo caso los puntos P y Q, en que esta última línea corte al contorno de la esfera, serán los puntos que buscamos, y que en seguida será preciso referir, por medio de perpendiculares a la charnela OK, a λ y μ sobre EF; y por último, proyectarémos estos últimos puntos sobre E'F' a λ' y μ'. FIG. 87.

405. *Cuarto método.* En este método, que llegaria a ser necesario si las dos trazas de la recta dada estuviesen colocadas a distancias mui considerable, se miran como construidos los dos planos tanjentes tirados a la esfera por lá recta (AB, A'B'); y cortándolos en seguida con un plano dirijido por los radios que terminan en los puntos de contacto, es evidente que hallarémos por secciones *dos rectas tanjentes al círculo máximo* contenido en este plano secante, y que el conocimiento FIG. 88.

de estas tanjentes bastará para determinar los puntos de contacto que buscamos. Es fácil construir estas tanjentes, porque como el plano secante de que hablamos pasa por dos radios respectivamente perpendiculares a estos planos tanjentes será tambien perpendicular a su interseccion (AB, A'B'); síguese de aquí que sus trazas serán las rectas OC y OD' tiradas formando ángulo recto con AB y A'B'. Ademas, este plano COD' cortará a la recta (AB, A'B') en un punto (R, R'), que ya sabemos construir (núm. 30), desde el cual será preciso tirar tanjentes al círculo máximo (*), segun el cual corta a la esfera este mismo plano COD'. Para esto, abatamos este plano haciéndolo jirar al rededor de su traza horizontal OC: el círculo máximo de que tratamos vendrá a confundirse con el contorno de la esfera; el punto (R, R') describirá, al rededor de la charnela OC, un arco cuyo radio será la perpendicular (RC, R'C') bajada sobre esta recta: luego, si construimos la verdadera magnitud CH de este radio, y le abatimos de C a R", este último punto será la nueva posicion de (R, R'), y las tanjentes que buscamos estarán abatidas segun R"P y R"Q.

Veamos ahora lo que sucede a los puntos de contacto P y Q cuando restituimos estas tanjentes al plano COD'. La primera R"P encontraba a la charnela OC en un punto V que permanecerá inmóvil; y así esta recta estará proyectada horizontalmente sobre RV, y por consiguiente su proyeccion vertical será R'V'; luego, refiriendo, por medio de una perpendicular a OC, el punto P a λ sobre RV, y proyectando en seguida λ a λ' sobre R'V', obtendrémos la verdadera situacion del punto de contacto (λ, λ') del primer plano tanjente a la esfera.

En cuanto a la tanjente abatida segun R"Q, vemos que en el caso actual va a cortar a la charnela OC a una distancia mui considerable, para que podamos sacar partido de este punto inmóvil. Para suplirle, observarémos que PQ representa el abatimiento de la cuerda que uniria los dos puntos de contacto de los planos tanjentes; y como esta cuerda

---

(*) *Este círculo máximo no es otra cosa que la curba de contacto de la esfera con un cilindro circunscrito y paralelo a la recta* (AB, A'B'); *de modo que para todos los puntos de esta circunferencia, los planos tanjentes de la esfera son paralelos a la recta dada.*

encuentra a la charnela OC en el punto (K, K'), tiene precisamente por proyecciones a Kλ y K'λ'. Luego, refiriendo, por medio de una perpendicular a OC, el punto Q a μ sobre Kλ, y proyectando en seguida μ a μ' sobre K'λ', obtendrémos el punto de contacto (μ, μ') del segundo plano tanjente a la esfera. Podríamos tambien apoyar en esta consideracion, que la cuerda ($\lambda\mu$, $\lambda'\mu'$) debe evidentemente ser perpendicular al plano AOB' que pase por el centro de la esfera y por la recta dada (AB, A'B').

PROBLEMA 2. *Tirar un plano tanjente a una superficie de revolucio, cuyo meridiano arbitrario es dado, por una recta tambien dada.*

406. Sea (O, I'Z') el eje de revolucion, (X'C'Y'D', CD) el meridiano principal de la superficie, y (AB, A'B') la recta por donde es preciso conducir el plano tanjente pedido. En el caso presente, emplearémos el método jeneral indicado en los números 395, 396, y por consiguiente indagarémos : FIG. 89.

1.° La curba de contacto (XKYRL, X'K'Y'R'L') de la superficie propuesta, con un cono circunscrito cuya cúspide (V, V') se ha tomado a discrecion sobre la recta (AB, A'B'); esta curba se construirá por los medios empleados en el problema del núm. 356, y hemos tenido cuidado de conservar aquí las mismas letras que sirvieron en el depurado 84, relativas a este problema aislado; de modo que las esplicaciones anteriores se aplicarán literalmente al presente depurado.

2.° La curba de contacto (*xtlyr*, *x't'l'y'r'*) de la superficie propuesta con un cilindro circunscrito paralelamente a (AB, A'B'), esta curba se construirá tambien por los mismos medios empleados para resolver el problema del núm. 383, en el depurado 86, cuyas anotaciones hemos conservado en el presente depurado.

Examinemos ahora si estas dos curbas de contacto se cortan en alguna parte, y para hallar un punto de seccion cuidemos mucho no combinar, sobre el mismo plano de proyeccion, una rama de línea *seguida* o visible, con otra *puntuada* o invisible; porque como semejantes ramas no están situadas sobre la misma napa de la superficie, no podrán tampoco encontrarse. Vemos en el caso presente que las curbas se cortan en dos puntos (λ, λ') y (μ, μ'), cuyas proyecciones horizontales y verticales deben, ademas estar, respecto a cada uno de ellos, co-

locadas sobre una misma perpendicular a la línea de tierra; en cuyo caso, segun los raciocinios espuestos en los números 395 y 396, es en ellos donde se hallan los puntos de contacto de la superficie de revolucion con los planos tanjentes que pasen por (AB, A'B'); y una vez conocidos estos puntos, será mui fácil construir, por varios medios conocidos las trazas de estos planos. Solo haremos observar que las trazas horizontales deberán pasar por el pie A de la recta, y ser perpendiculares a las proyecciones $O\lambda$ y $O\mu$ de las normales relativas a los dos puntos hallados de contacto.

407. *Caso particular.* Si la recta dada fuese vertical, manifiestamente bastaria tirar por su pie dos tanjentes a la proyeccion horizontal del equador.

Si esta recta fuese horizontal, tiraríamos un plano meridiano que le fuese perpendicular, y desde el punto en que la encontrase, tiraríamos dos tanjentes a la meridiana contenida en este plano; cuya operacion es fácil de ejecutar, despues de haber abatido este punto y la meridiana en cuestion sobre el plano vertical, segun se ha hecho en el núm. 360 respecto al punto P'' del depurado 84.

408. *Segundo método.* Cuando la superficie de revolucion es *de segundo grado,* habrá mucha ventaja en emplear, como en el núm. 395, dos conos circunscritos cuyas cúspides se colocarán en los dos puntos en que la recta dada encuentre al plano del equador y al del meridiano principal, porque entónces, segun el teorema demostrado núm. 353, cada una de las curbas de contacto estará proyectada segun *una recta* sobre uno de los dos planos de proyeccion; y en todo el depurado no habrá mas que construir *una sola recta,* como lo espondrémos en detalle en el problema análogo y *mas jeneral* del núm. 417.

409. *Tercer método.* Si aun suponemos que la superficie de revolucion es *de segundo grado,* podremos no emplear sino uno solo de los dos conos circunscritos de que acabamos de hablar; porque, como la curba de contacto está (núm. 353) toda ella en un plano perpendicular al plano horizontal (o al plano vertical), bastará tirar a esta curba dos tanjentes por el punto en que su plano encuentra a la recta dada (*).

(*) *Esta marcha es análoga à la que hemos seguido respecto a la esfera, en el núm.* 401.

Ademas, hemos visto (núm. 374) cuan fácil era construir estas tanjentes con sus puntos de contacto sin trazar la curba de segundo grado de que tratamos, con solo conocer sus dos ejes; y como uno de estos lo obtendrémos inmediatamente, tirando por la cúspide del cono circunscrito dos tanjentes al equador (o al meridiano principal), de aquí se deducirá el eje segundo por un medio mui fácil de concebir (*véase* núm. 418).

Aconsejamos al lector que aplique este método a un elipsoide de revolucion; y para variar los ejemplos, vamos a aplicarle ahora a un hiperboloide gauso de revolucion, definido por su jeneratriz rectilínea, y no por su meridiana.

PROBLEMA 3. *Tirar un plano tanjente a un hiperboloide gauso de revolucion, por una recta dada.*

410. Sea (O, O'O") el eje vertical de la superficie, y (ADB, A'D'A") FIG. 90. la recta móvil que, jirando al rededor de este eje, enjendra (núm. 140) al hiperboloide que suponemos terminado en las dos secciones horizontales A'B' y A"B", distantes igualmente del círculo de la garganta. No ejecutarémos la representacion de la superficie sobre el plano vertical; porque esto nos obligaria a trazar el hiperboloide meridiano cuyo uso queremos evitar; pero sobre el plano horizontal, mirarémos a la superficie como realmente proyectada; y en consecuencia con esto, puntuarémos las partes de líneas principales que están debajo de la napa superior.

411. Sea ahora ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) la recta por donde se trata de tirar el plano tanjente; si desde el punto (V, V'), en que esta recta penetra al plano horizontal del círculo de la garganta, nos figuremos un cono circunscrito, dos de cuyas aristas evidentemente serán las tanjentes VX y VY, este cono tocará al hiperpoloide segun una curba que toda ella estará situada (núm. 353) en el plano vertical XY, y que por consiguiente será una hipérbola que tendrá por eje real a la cuerda XY. Luego, tirando dos tanjentes a esta curba por el punto (R, R') en que su plano va a cortar a la recta ($\alpha V\beta$, $\alpha'V'\beta'$), hallarémos los puntos de contacto de los planos tanjentes al hiperboloide.

412. Para construir estas tanjentes, es preciso primeramente hacer jirar el plano vertical XY al rededor del eje (O, O'O") hasta que tome la posicion xy paralela al meridiano principal, y en este caso, el punto

(R, R') se trasladará a (r, r'). En esta situacion, la hipérbola contenida en el plano vertical yx es semejante a la meridiana principal de la superficie, y tiene como ella, por proyecciones de sus asíntotas, a las rectas A'D' y B'D'; de aquí, y por medio del eje real $x'y'$, deducimos fácilmente los dos focus φ y ψ. Sentado esto, para tirar por el punto r' (*) tanjentes a esta hipérbola, describirémos un arco de círculo con la distancia $r'\varphi$ por radio, y otro arco cuyo centro esté en ψ y el radio sea igual a $x'y'$; tirando en seguida la recta $r'l'$ por la mitad del arco $\varphi\gamma$, obtendrémos una de las tanjentes que buscamos, y su punto de contacto l' quedará determinado por su encuentro con la recta $\psi\gamma$. Del mismo modo, la otra tanjente será la recta $r'm'$ tirada por la mitad del arco $\varphi\delta$, y la línea $\psi\delta$ prolongada determinará el punto de contacto m' de esta segunda tanjente.

No queda ahora mas que hacer que proyectar los puntos l' y m' a l y m sobre xy, y referir en seguida estos puntos al plano vertical primitivo XY a (λ, λ') y (μ, μ'). Aquí se hallan los puntos de contacto del hiperboloide con los dos planos tanjentes tirados por la recta ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$); y con estos solos datos son fáciles de construir sus trazas $\alpha B_2 A_2$ y $\alpha A_3 B_3$.

413. Pero como sabemos que en el hiperboloide gauso, cada plano tanjente debe contener a dos jeneratrices rectilíneas de la superficie, que se cortan en el punto de contacto, podremos tirar por los puntos λ y μ cuatro tanjentes al círculo de la garganta, a saber: λA_2, λB_2, μA_3, μB_3, las que, por medio de su encuentro con la traza horizontal de la superficie, nos darán cuatro puntos pertenecientes a las trazas de los planos tanjentes. Ademas, como las dos jeneratrices λA_2 y μB_3 forman parte, la una del sistema (AD, A'D') y la otrad el (BD, B'D'), irán precisamente a cortarse (núm. 144) en un punto que evidentemente deberá hallarse sobre la recta ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$); y este punto (ε, ε') será precisamente el mismo *en que esta recta penetra al hiperboloide*. Habrá tambien otro segundo punto de seccion que nos le dará a conocer el encuentro de las jeneratrices λB_2 y μA_3.

414. Observacion. Si el punto (V, V'), en que la recta dada ($\alpha\beta$,

---

(*) *Véase en los tratados de secciones cónicas*, el Método de los antiguos *para tirar tanjentes a estas curbas.*

$\alpha'\beta'$) penetra al plano horizontal del círculo de la garganta, se hallase dentro de este círculo, no podríamos ya tirar las tanjentes VX y VY; y esto indicaria que la curba de contacto del hiperboloide con el cono circunscrito que tiene su cúspide en (V, V'), cambia de posicion y se convierte en una hipérbola cuyo *eje real* es vertical, permaneciendo siempre su plano perpendicular a la horizontal VO. En este caso, tiraríamos desde el punto (V, V') dos tanjentes a la meridiana situada en el plano VO, y la cuerda comprehendida entre sus puntos de contacto sería el eje real que buscamos; hecho esto, lo demas que queda de las construcciones se ejecutará de un modo análogo a lo que se a practicado en el primer caso.

415. Otra solucion. Las observaciones hechas en el núm. 413 nos dan un método mui simple y aplicable a todas las posiciones de la recta dada. Con efecto, si despues de haber construido por el procedimiento núm. 284, los puntos de interseccion de la recta ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) con el hiperboloide, tiramos por uno de ellos (ε, ε') las tanjentes εA_2 y εB_2 al círculo de la garganta, estas jeneratrices combinadas alternativamente con ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) determinarán inmediatamente los dos planos tanjentes pedidos, que tendrán por trazas horizontales a αA_2 y αB_3. En cuanto a los puntos de contacto, nos los darán a conocer las otras dos jeneratrices que salen de los puntos B_2 y A_3 (*). FIG. 90.

416. De aquí resulta que, si la recta dada no cortase en alguna parte al hiperboloide, sería imposible tirar por esta recta un plano tanjente a la superficie; cuya condicion es evidente *a priori*, porque debiendo, en el caso presente, contener todo plano tanjente a dos jeneratrices que se corten, habrá por lo ménos una que encuentre a la recta ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) situada, por hipótesis, en este plano tanjente. Solo que este punto de encuentro se aleja al infinito, en el caso mui particular en que estas dos jeneratrices y la recta ($\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$) sean las tres paralelas; pero entónces, la posicion del plano tanjente será mas fácil de asignar, porque será evidentemente (núm. 280) tanjente al cono asíntota.

(*) *Una solucion semejante puede aplicarse al hiperboloide de una napa que no sea de revolucion. (Véase núm.* 590.)

PROBLEMA 4. *Tirar un plano tanjente a una superficie* CUALQUIERA *de segundo grado, por una recta dada.*

FIG. 91. 417. Tomemos por ejemplo un elipsoide referido a dos planos de proyeccion que cada uno de ellos sea paralelo a un plano principal de la superficie; esta tendrá por contornos aparentes las elipses *principales* (ABDE, A'D') y (A'C'D'F', AD), que cada una tiene dos ejes comunes con el elipsoide. Sea ademas (RS, R'S') la recta dada; los puntos de contacto de los planos tanjentes tirados por esta recta, nos los darán (núm. 395) las intersecciones de las curbas de contacto de los dos conos circunscritos al elipsoide, que tengan sus cúspides situadas donde se quiera sobre la recta dada; pero para simplificar la construccion de estas curbas, coloquemos las cúspides de estos conos en los puntos (V, V') y (v, v'), en que la recta (RS, R'S') va a encontrar a los planos de las dos elipses principales que son paralelas a los planos de proyeccion.

418. Si entónces tiramos las tanjentes V'α' y V'δ' a la elipse A'C'D'F', los puntos α' y δ' pertenecerán evidentemente a la proyeccion vertical de la curba de contacto del cono circunscrito (V, V'); y esta curba, que es plana (núm. 353), estará proyectada verticalmente sobre la recta $\alpha'\delta'$. Con efecto, como la cúspide (V, V') está situada en un plano vertical VAD que divide al elipsoide en dos partes exactamente simétricas, es cierto que los puntos de la curba de contacto deben estar situados de dos en dos sobre cuerdas perpendiculares a este plano principal; luego tambien el plano de la curba que buscamos será perpendicular al plano vertical VAD, y se proyectará en él segun la recta $\alpha'\delta'$ que une los dos puntos hallados ya.

Por la misma razon, la recta ($\alpha\delta$, $\alpha'\delta'$) es *un eje* de la curba en el espacio, y continua gozando de esta propiedad en la proyeccion horizontal, en la cual nos da los dos vértices de la curba α y δ. De aquí se deduce, con suma facilidad, la direccion $\omega\delta$ del eje segundo: pero para determinar su lonjitud, observarémos que estos dos ejes son proporcionales a los de la seccion dada al elipsoide, con un plano diametral O'a' paralelo a la curba de contacto $\alpha'\delta'$. Luego, si se proyecta a' a a, y tiramos $\alpha\beta$ paralela a aB, obtendremos la lonjitud $\omega\beta$ del segundo eje que buscamos; y entónces será ya mui fácil trazar la elipse $\alpha X\beta\delta Y$ que, ademas,

deberá pasar por los puntos X e Y que se deducen de la seccion X', en los cuales deberá manifiestamente *tocar* al contorno ABDE sobre el plano horizontal.

419. El segundo cono circunscrito cuya cúpide está en (v, v'), tocará ahora al elipsoide segun una curba plana que, por razones análogas a las que hemos citado mas arriba, estará proyectada horizontalmente sobre la recta xy; en seguida, sin cambiar la proyeccion vertical de esta curba, que obtendrémos por medio de procedimientos semejantes a los que nos han servido para el primer cono, podremos conocer inmediatamente los puntos de seccion λ y μ de las dos curbas de contacto, sobre el plano horizontal, y referir estos puntos a λ' y μ' sobre $\alpha'\delta'$. Entónces tendremos para cada plano tanjente pedido, su punto de contacto (λ, λ') o (μ, μ') y una recta (RS, R'S') por la que debe pasar, de modo que es mui fácil hallar sus trazas por medio de construcciones, de que el presente depurado solo presenta los resultados.

420. *Otro método.* Podemos resolver el problema precedente, con solo el cono circunscrito cuya cúspide está en (V, V'); porque todo plano tanjente a este cono, tirado por la recta (RV, R'V') cumplirá evidentemente con la cuestion. Por consiguiente, indagarémos el punto (R', R) en que corta a esta recta el plano de la base $\alpha'\delta'$; y en seguida, desde el punto R se tirarán dos tanjentes a la curba $\alpha Y\delta X$: debemos aun observar que, es inútil trazar la elipse $\alpha Y\delta X$, y que con los dos semi-ejes $\omega\alpha$ y $\omega\beta$, sabremos construir los puntos de contacto μ y λ de las tanjentes Rμ y Rλ, segun lo hemos hecho en los números 374 y 412. Así es que los puntos (λ, λ') y (μ, μ') serán los mismos en que los planos tanjentes dirijidos por la recta (RV, R'V') tocarán al elipsoide, y por consiguiente, estos dos planos quedarán determinados por un método que tendrá la ventaja de no emplear sino *la línea recta y el círculo*. FIG. 91.

CAPITULO IV.

De los planos tanjentes paralelos a un plano dado.

421. Sea S la superficie a que nos proponemos tirar un plano tanjente que sea paralelo a un plano dado P. Figurémonos que en este último, se trazan dos rectas arbitrarias A y B, y que en seguida se determinan, por los procedimientos indicados en el capítulo II, las curbas de contacto X e Y de la superficie S con dos cilindros circunscritos, uno de ellos paralelo a A y otro a B. En este caso, sabemos (núm. 378) que respecto a todos los puntos de la curba X, los planos tanjentes de S serán paralelos a A; que respecto a todos los de la curba Y, los planos tanjentes son paralelos a B; luego, si las curbas X e Y se cortan, cada interseccion nos dará un punto en el que el plano tanjente de la superficie S, será paralelo a un mismo tiempo a las dos rectas A y B, y por consiguiente, será paralelo al plano dado P.

422. Está bien observemos, que el problema precedente viene en sustancia a convertirse en este : *tirar una normal a una superficie* S, *que sea paralela a una recta dada* D. Con efecto, si construimos un plano P perpendicular a la recta D, será suficiente hallar un plano tanjente paralelo a P, y la normal relativa al punto de contacto de este plano tanjente, será evidentemente paralela a la línea D. Esta investigacion es necesaria para hallar el *punto brillante* de una superficie, iluminada por rayos de luz que se miran como paralelos entre sí.

423. Cuando la superficie S sea desarrollable, el problema en jeneral será imposible, en virtud de que la condicion de ser paralelo a una recta dada, es suficiente (núm. 379) para determinar completamente el plano tanjente de una superficie de esta especie, y así no podria exijirse que este plano fuese a un mismo tiempo paralelo a dos rectas A y B, o al plano P que las contiene.

424. El método de solucion que hemos indicado en el núm. 421 es jeneral; pero de ordinario nos empeñará en operaciones gráficas mui

complicadas; por esta razon, es preciso tratar de aprovechar, en cada superficie, las propiedades particulares de ella que puedan simplificar la solucion, segun vamos a indicar en algunos ejemplos.

1.° Si la superficie propuesta es de revolucion, en cuyo caso cada plano tanjente es perpendicular al plano meridiano correspondiente, principiarémos por tirar un plan meridiano perpendicular al plano dado P, y que corte a este último segun una recta que llamarémos δ; en este caso, tirando a la seccion meridiana obtenida de este modo, una tanjente paralela a δ, su punto de contento será evidentemente el de un plano tanjente que será paraleló a P. Esta marcha será de una fácil aplicacion respecto a la esfera, al elipsoide, al toro, &a.

2.° Si se trata de un hiperboloide de revolucion de una sola napa, que admite (núm. 146) dos sistemas de jeneratrices rectilíneas respectivamente paralelas a las aristas del cono asintótico, cortarémos este cono con un plano tirado por la cúspide, paralelamente a P. Este plano secante nos dará dos aristas α y α' paralelas a P, y de aquí deducirémos con suma facilidad las cuatro jeneratrices correspoudientes del hiperboloide, a saber A y B paralelas a α, y en seguida A' y B' paralelas a α'. Si en este estado, combinamos las jeneratrices A y B', hallarémos un plano que evidentemente será paralelo a P, y que tocará al hiperboloide en el punto en que se cortan estas dos rectas; en seguida, hallarémos otro segundo plano que llenará las mismas condiciones, combinando entre sí a las jeneratrices A' y B que tambien se cortan.

El mismo método se aplicará a un hiperboloide de una napa y *que no sea de revolucion*, en virtud de que esta superficie admite tambien, segun lo veremos en el libro VII, dos sistemas de jeneratrices rectilíneas paralelas a las aristas de un cono asintótico (*véase* núm. 581).

CAPITULO V.

De los planos tanjentes a varias superficies a un tiempo.

425. *Hallar un plano que toque a un mismo tiempo a dos superficies dadas* S *y* T. Para resolver este problema de un modo jeneral, y cualesquiera que sean los planos de proyeccion adoptados, tiremos en el espacio un plano arbitrario; y en seguida, determinemos la curba de contacto X de la superficie S con un cilindro circunscrito y paralelo al plano P, cuya cuestion está comprehendida en el núm. 377, puesto que las aristas de este cilindro deberán ser *paralelas a una recta conocida,* a saber, a la perpendicular al plano P. Así mismo, determinemos la curba análoga Y correspondiente a la superficie T, y construyamos las proyecciones x e y de estas dos líneas sobre el plano P; echo esto, si tiramos una tanjente comun a las dos curbas x e y, esta será la traza de un plano π perpendicular a P, que evidentemente tocará a los dos cilindros, y será precisamente tanjente a las superficies S y T. De este modo obtendrémos una solucion del problema propuesto; pero habrá otras infinitas π', π'',.... que hallarémos repitiendo construcciones análogas con diferentes planos P', P",.... elejidos en otras varias direcciones.

426. Podemos enlazar entre sí todas estas soluciones, construyendo *la superficie desarrollable que esté a un mismo tiempo circunscrita a las dos superficies* S *y* T. Para esto imajinémonos que los puntos de contacto m y n de las curbas x e y con su tanjente comun sobre el plano P, se han proyectado sobre las curbas X e Y a M y N, aquí es donde se hallarán los puntos en que el plano π toca a las dos superficies S y T: y si del mismo modo construimos los puntos de contacto M' y N', M" y N",.... de los planos π', π'',.... la serie de rectas MN, M'N', M"N",.... formará una superficie Σ, que evidentemente tocará a S y T al largo de las curbas MM'M"..., y NN'N"....; pero agregamos que esta superficie Σ será *desarrollable.* Con efecto, si se han tomado los puntos M y M' infinitamente próximos, el plano tanjente π contendrá a los ele-

mentos lineales MM' y NN', en virtud de esto, las dos jenaratrices MN y M'N' estarán situadas en un mismo plano, que es el carácter distintivo de las superficies desarrollables (núm. 179). Ademas, podemos mirar a las rectas infinitamente próximas MN, M'N', M"N",.... como las intersecciones consecutivas de los planos π, π', π'',.... (núm. 182), o sino como el involucro del espacio recorrido por el plano π cuando rueda sobre las superficies S y T, permaneciendo siempre tanjente a ámbas (núm. 184).

Sentado esto, y despues de haber construido la superficie Σ, tendrémos que todos los planos tanjentes que se le tiren, tocarán así mismo a S y T, y nos darán las diversas soluciones del problema primitivo.

427. Es indispensable atender en la *teoría de las sombras*, a la superficie desarrollable Σ circunscrita a las superficies S y T; que de ordinario presenta *dos napas* distintas, procedentes de que las curbas x e y del núm. 425 pueden tener una tanjente comun *esterior* y otra *interior*. Sobre todo, estas jeneralidades las, aclararémos por medio del sencillo ejemplo de las dos esferas que tomarémos en consideracion en el núm. 437.

428. Cuando una de las dos superficies propuestas, por ejemplo, la S, es *desarrollable*, no es en jeneral imposible, el problema de tirarles un plano tanjente comun; pero no admite ya en este caso una infinidad de soluciones, como podemos persuadirnos haciendo rodar un plano tanjente sobre la superficie S hasta que encuentre a T. Ademas, en la hipótesis actual, la curba x relativa al plano P (núm. 425) se reducirá a una o mas líneas rectas, a quienes no sería posible tirar una tanjente comun con la curba y; a no ser que una de ellas mismas fuese tanjente a esta curba y, lo que no podria suceder, sino respecto a algunos de los planos P, P', P",.... de modo que el problema sería determinado, y la superficie Σ se reduciria entónces a uno o mas planos. Veremos un ejemplo de esto en el núm. 434.

429. Finalmente, el problema no admitirá, en jeneral, ninguna solucion, cuando las superficies dadas S y T sean ámbas desarrollables, porque siendo en este caso las dos curbas x e y del núm. 425 líneas rectas sobre todos los planos P, P', P",.... no sería posible tirarles una tanjente comun.

430. Cuando ninguna de las dos superficies dadas S y T es desa-

rrollable, podremos hacer que el problema de tirarles un plano tanjente comun sea *determinado,* señalando un punto esterior V por el que deba pasar el plano pedido. Con efecto, esto vendrá a reducirse a dirijir por este punto V, un plano tanjente a la superficie desarrollable Σ que está circunscrita (núm. 426) a las superficias S y T, y esta última cuestion no es susceptible sino de un número limitado de soluciones, segun lo hemos visto en los números 349 y 350. Para obtenerlas, es preciso, en jeneral, construir la seccion causada en la superficie Σ con un plano cualquiera, tirado desde el punto V; y tirar en seguida por este punto tanjentes a esta seccion: en cuyo caso, cada una de estas tanjentes unida a la jeneratriz rectilínea que pasa por su punto de contacto, determinará un plano tanjente a la superficie Σ, y por consiguiente, a las dos superficies primitivas S y T. Hallarémos un ejemplo de este jénero en el número 437.

431. *Hallar un plano que toque al mismo tiempo a tres superficies dadas* S, T, *y* U.

La marcha jeneral para resolver este problema, consiste en concebir una superficie desarrollable Σ circunscrita a S y a T, y en seguida otra Σ_2 circunscrita a S y a U. Y construyendo despues (núm. 426) las curbas de contacto MM'.... y $M_2M'_2$.... de estas dos superficies Σ y Σ_2 con S, cada punto μ, en que se encuentran estas curbas, será de tal naturaleza, que el plano tanjente en él a S manifiestamente tocará a un mismo tiempo a las superficies Σ y Σ_2, y por lo tanto, este mismo plano tocará tambien a la superficies T y U. Por consiguiente, esta será una solucion del problema; pero como las operaciones gráficas son por lo comun mui complicadas, nos limitarémos a citar un ejemplo en que estas construcciones son mui sencillas (*véase* núm. 441).

Observemos que aun cuando hemos dicho (núm. 429) que, en jeneral no se podia tirar un plano tanjente comun a dos superficies desarrollables, en el caso presente llega esto a ser posible, porque las dos superficies Σ y Σ_2 presentan la particularidad, de estar circunscritas a la misma superficie S.

432. Si una o mas de las tres superficies dadas fuesen *desarrollables,* el problema sería en jeneral imposible. Con efecto, si S es desarrollable, las superficies Σ y Σ_2 del número precedente, se reducirán a *superficies planas* (núm. 428) a las que no será posible tirar un plano

tanjente comun; a no ser que por circunstancias particulares, lleguen a coincidir completamente dos de estas superficies planas.

433. No podria proponérsenos el problema de hallar un plano que tocase a un mismo tiempo a cuatro superficies S, T, U y V, o a un número mayor de ellas. Porque si nos imajinamos las tres superficies desarrollables Σ, Σ_2 y Σ_3 circunscritas a los grupos S y T, S y U y S y V, no sucederá, en jeneral, que las tres curbas segun las que Σ, Σ_2 y Σ_3 tocan a la superficie S, se corten todas en un mismo punto μ, cuya circunstancia es necesaria para que el plano tanjente de S en μ, toque al mismo tiempo a Σ, Σ_2 y Σ_3, y por consiguiente, a las demas superficies propuestas T, U y V.

PROBLEMA 1. *Construir un plano que toque a un mismo tiempo a una esfera y a un cono recto* (*).

434. Hagamos pasar los dos planos de proyeccion, por el centro O de la esfera dada que tiene por radio a OA, y dirijamos el plano horizontal perpendicularmente al eje del cono que tiene por cúspide a (S, S'), y por base al circulo del radio SB. El problema de tirar un plano tanjente comun a estas dos superficies, será determinado (núm. 428), porque una de ellas es en el caso actual desarrollable; y para resolverle con mas sencillez por el método jeneral, supongamos que PQR' es el plano que buscamos. Este toca al cono segun una arista situada en el plano meridiano SM perpendicular a PQ; de modo que la distancia de este plano tanjente al pie (S, I') del eje, es una recta igual a I'G, y está situada en el plano meridiano SM; pero si transportamos el plano PQR' paralelamente así mismo, hasta que pase por el centro O de la esfera, se habrá aproximado al punto (S, I') una cantidad igual al radio OA; y en este caso será tanjente a otro cono recto cuya jeneratriz T"F', paralela a S'B', se habrá alejado de ella la distancia OA. Y como este último cono, así como tambien su plano tanjente tirado por el punto O, son fáciles de construir; no habrá, en seguida,

(*) *Este problema está sacado de la* Jeometría descriptiva *de M. Lefébure de Fourcy.*

mas que hacer que tirar un plano tanjente al cono primitivo, paralelo a este.

En virtud de estas consideraciones, tomaremos sobre la perpendicular I'G un intervalo GH=OA; y tirando en seguida por el punto H la recta T'F' paralela a S'B', determinarémos el círculo SF, al que tiraremos, desde el punto O, las dos tanjentes ON y OL. Hecho esto, tirarémos tambien al círculo SB otras dos tanjentes PQ y XY paralelas a las precedentes, y tendrémos las trazas horizontales de los dos planos PQR' y XYZ', que tocarán *esteriormente* a las dos superficies dadas; las trazas verticales de estos planos son mui fáciles de hallar.

435. Hai tambien planos que tocan a estas superficies *interiormente*, es decir, dejando una de ellas a un lado y la otra al opuesto. Para hallarlos, veremos sin mucho trabajo que es preciso aumentar la distancia I'G una cantidad G*h*=OA; tirar en seguida, paralelamente a S'B', la recta *t'f'* que determinará al círculo S*f*, y tirarémos a este las tanjentes O*n* y O*l*. Conduciendo en seguida dos tanjentes *pq* y *xy* al círculo SB paralelas a las precedentes, estas serán las trazas horizontales de los dos planos tanjentes interiores.

436. Si respecto a uno de estos cuatro planos, al PQR', por ejemplo, queremos hallar su punto de contacto con la esfera, cortarémos a esta superficie con un plano OD perpendicular a PQ: y despues de haber abatido la seccion sobre el círculo máximo horizontal, tirarémos la tanjente Dθ, cuyo punto de contacto θ referido a μ nos dará la proyeccion horizontal del punto en que el plano PQR' toca a la esfera. De aquí deducirémos fácilmente la proyeccion vertical μ' de este punto.

PROBLEMA 2. *Tirar un plano tanjente a dos esferas por un punto dado.*

FIG. 93. 437. Adoptemos por plano horizontal al que pasa por los centros O y O' de las dos esferas y por el punto dado A". Echo esto, y sin recurrir al segundo plano de proyeccion, podremos tirar a los dos círculos máximos horizontales la tanjente comun MNA que, jirando al rededor de OO'A, enjendrará una superficie cónica, evidentemente circunscrita a las dos esferas dadas. Este cono AMP es, en el caso presente, el que ocupa el lugar de la superficie desarrollable Σ del núm.

426, porque es el *involucro* de todas las posiciones que tomaria el plano vertical MNA tanjente a las dos esferas, rodando a un mismo tiempo sobre las dos superficies. Y así, como todo plano tanjente a este cono tocará a las dos esferas, y que la recíproca es tambien cierta, el problema primitivo se reduce a *tirar desde el punto dado* A" *un plano tanjente al cono* AMP. Para esto, sabemos que es preciso tirar la recta AA", y desde el punto en que esta penetra al plano del círculo vertical MP, base del cono, tirar a este círculo dos tanjentes; cuya operacion se ejecutará fácilmente, abatiendo el círculo MP al rededor de su diámetro, como lo hemos visto en el núm. 401.

438. Es mas sencillo notar que el problema primitivo se reduce a *tirar un plano tanjente a la esfera* O *por la recta* AA"; porque este plano evidentemente tocará al cono AMP, y por consiguiente a la esfera O' circunscrita por este cono. Pero segun lo que se ha dicho en el núm. 403, es suficiente trazar el nuevo cono A"M"P" circunscrito tambien a la esfera O, y la interseccion de los dos círculos verticales MP y M"P" nos dará a conocer inmediatamente la proyeccion horizontal μ del punto de contacto de la esfera con el plano tanjente pedido. La segunda proyeccion de este punto, sobre un plano vertical tomado a discrecion, se hallará fácilmente abatiendo el círculo MP al rededor de su diámetro, y de este modo quedará enteramente determinada la posicion del plano tanjente; pero dejamos al lector el cuidado de efectuar estas operaciones sencillas, que nos darán manifiestamente dos planos tanjentes *esteriores*.

439. Podemos hallar otros dos planos tanjentes *interiores*, tomando en consideracion al cono *amp* descrito por la tanjente *man* comun a los círculos horizontales, pero colocada entre estas circunferencias. En este caso, empleando consideraciones análogas a las precedentes, veremos que es suficiente *tirar por el punto* A" *un plano tanjente al cono amp*; o sino *tirar por la recta* aA" *un plano tanjente a la esfera* O; de modo que conocerémos el punto de contacto λ por la interseccion de los dos círculos M"P" y *mp*.

440. No hai necesidad do advertir que las cuatro soluciones precedentes se reducirán a dos, o no existirán absolutamente, segun sea la posicion que tenga el punto dado A" con respecto a las dos esferas, o a los conos circunscritos *esteriores* e *interiores*. Ademas, uno de estos

conos o los dos desaparecerán, si se cortan las esferas dadas, o si una envuelve a la otra.

PROBLEMA 3. *Hallar un plano que sea tanjente a tres esferas dadas.*

FIG. 93. 441. Adoptemos tambien por plano horizontal al que pasa por los centros O, O', y O" de las tres esferas dadas; y observemos en seguida, que las superficies desarrollables Σ y Σ_2 (núm. 431) que deben estar circunscritas a las esferas O y O', O y O", son en este caso los dos conos AMP y A"M"P". Trazando ahora sus curbas de contacto con la esfera O, que se reducen a los dos círculos verticales MP y M"P", los dos puntos de seccion que están proyectados en μ serán los mismos en que los planos tanjentes de la esfera O tocan a la vez al cono AMP y al A"M"P"; por consiguiente, estos dos planos serán tambien tanjentes a las esferas O' y O", y las tocarán *esteriormente.*

442. Pero como existen tambien otros dos conos circunscritos *interiormente* a los grupos de las esferas O y O', O y O", los cuales se pueden combinar de un modo análogo, ya sea entre sí, o ya con los conos esteriores, resultarán jeneralmente *ocho soluciones* del problema propuesto, a saber:

Dos planos tanjentes *esteriores*, dados por los conos AMP y A"M"P", cuyos puntos de contacto con la esfera O, están proyectados en μ;

Dos planos tanjentes *interiores* producidos por los conos AMP y *a"m"p"*: los puntos de contacto con la esfera O están proyectados en ν;

Dos planos tanjentes *interiores* dados por los conos *amp* y A"M"P": sus puntos de contacto están proyectados en λ;

Por último, dos planos tanjentes interiores dados por los conos *amp* *a"m"p"*, y cuyos puntos de contacto están proyectados en π.

443. Es fácil conocer que estos ocho planos tanjentes se reducirán a *cuatro* cuando se corten dos de las esferas; cuando una de ellas encuentre a las otras dos, habrá a lo mas dos planos tanjentes comunes; y no habrá ninguno, cuando una de las tres esferas esté envuelta por otra. Pero fuera de estos casos particulares, será imposible la cuestion, siempre que no se corten los cuatro círculos de contacto MP, M"P", *mp* y *m"p"*, y el número de sus puntos de seccion, indicará siempre la cantidad de soluciones que admitirá el problema propuesto.

444. No hemos hablado de los conos N'A'Q' y *n'a'q'*, cada uno de

los cuales está circunscrito a las dos esferas O' y O". Sin embargo, es evidente que todo plano tanjente a las tres esferas, deberá tambien tocar al cono A' o al cono *a'*; de modo que hubiéramos podido combinar el sistema de estas dos superficies cónicas, ya sea con el sistema A y *a*, o ya con el A" y *a"*, para resolver el problema propuesto. Ademas de esto, como cada plano tanjente a las tres esferas tocará al mismo tiempo a tres de estos conos circunscritos, y pasará por sus cúspides, las que se hallan tambien a un mismo tiempo en el plano tanjente y en el que pasa por los tres centros de las esferas; debemos concluir de aquí que las cúspides de los tres conos a quienes toca un mismo plano, estarán siempre *en línea recta*. Y así vemos, en el depurado que presentamos, que las cúspides de los seis conos circunscritos a las esferas están distribuidas de tres en tres sobre cuatro rectas AA"A', A*a'a"*, A"*a'a* y A'*a"a*, la primera de estas contiene a *las tres cúspides esteriores*, y cada una de las otras *una cúspide esterior con otras dos interiores*.

445. De aquí podemos deducir un teorema notable de la Jeometría plana, con solo limitarnos a considerar las jeneratrices de los conos y los círculos máximos de las esferas, que están situados en el plano de los tres centros O, O' y O". En efecto, como las cúspides de estos conos son manifiestamente los puntos de encuentro de los pares de tanjentes comunes a dos de los círculos máximos, concluirémos de aquí que si despues de haber trazado tres círculos cualquiera en un mismo plano, tiramos todas las tanjentes que a un mismo tiempo pueden tocar a dos de estos cículos, *los seis puntos de encuentro* A *y a*, A' *y a'*, A" *y a"* *determinados por cada par de tanjentes, estarán colocados de tres en tres sobre cuatro rectas*, una de las cuales contendrá *los tres puntos esteriores*, y cada una de las otras *un punto esterior* con *dos interiores*.

Citarémos tambien, como ejemplo de un plano tanjente comun a varias superficies, el problema resuelto en el núm. 68, en el cual se trataba de hallar un plano que fuese *tanjente a dos conos* que tuviesen la misma cúspide.

LIBRO VI.

CUESTIONES DIVERSAS.

CAPITULO PRIMERO.

De la hélice y del helizoide desarrollable.

FIG. 95. **446.** La Helice es una curba AMNCD.... trazada sobre un cilindro cualquiera, de tal naturaleza que *las ordenadas* (dirijidas segun las jeneratrices) *son proporcionales a las abscisas curbilíneas contadas sobre la* BASE *partiendo desde un punto fijo* A; entendiendo por *base* del cilindro, la *seccion ortogonal* dada por el punto A. Es decir, que debemos tener las relaciones

$$\frac{MP}{AP}=\frac{NQ}{AQ}=\frac{CB}{AB}=\ldots\ldots=k, \text{ o jeneralmente } z=ks,$$

representando por s un arco cualquiera de la base, y por z la ordenada que termina en su estremo (*). El número k que espresa la razon constante de la ordenada a la abscisa en todos los puntos de una misma hélice, varia de una hélice a otra, porque podemos trazar una infinidad

(*) *Precedentemente hemos dado (núm.* 163*) otra definicion de la hélice; pero vamos a hacer ver dentro de poco que está en perfecta armonía con la presente definicion.*

de ellas sobre el mismo cilindro; pero cada [illegible] *obre la base del cilin-*
mente determinada, desde que se fijan la raz[illegible] *tes corta a la jenera-*
por oríjen de las abscisas. Es ademas evide[illegible] . cuyo resultado nos
precisamente a la base del cilindro en este punto, A, [illegible] ntenida en la del
equacion $z=ks$, la hipótesis $s=0$ da tambien $z=0$.

447. Cuando la base del cilindro es una curba c[illegible] lice, tomando FIG. 94.
de la abscisa variable AP$=s$ llegar a ser igual al per[illegible] esta curba,
base; y entónces obtendremos un punto D en el cual la [illegible] zontal de
otra vez a la arista AF. Y como esta circunstancia se repetirá [illegible] hélice;
damente en todas las abscisas $2p$, $3p$,.... habrá sobre la jeneratriz [illegible] igua-
una infinidad de puntos en que la hélice la encontrará, que [illegible] cia
las alturas

$$AD=h=pk,\ h'=2pk,\ h''=3pk.....;$$

por consiguiente, todos estos puntos distarán unos de otros una cantidad h que llamarémos *paso de la hélice.* Cuando este paso se señala directamente, y se conoce tambien el perímetro de la base, se deducirá inmediatamente la constante k, porque segun la definicion misma de la hélice (núm. 446) este número espresa la razon de la ordenada k con la abscisa correspondiente p; y así, en caso de ser la base del cilindro un círculo cuyo radio es R, tendremos que

$$k=\frac{h}{2\pi R}.$$

448. *De la tanjente a la hélice.* Como no se nos da aquí esta curba FIG. 95.
por la interseccion de dos superficies, es preciso recurrir a consideraciones particulares para hallar su tanjente en un punto cualquiera M. Concibamos desarrollado el cilidro sobre el plano que toca a esta superficie en todo el largo de la jeneratriz PML; esta línea permanecerá inmóvil, y la base *ortogonal* APB se convertirá (núm. 161) en una recta A'PB' perpendicular a PL, miéntras que las posiciones de las otras jeneratrices conservarán su misma lonjitud y su paralelismo. Por consiguiente, si tomamos sobre la transformada de la base, las distancias

$$PA'=PA,\ PQ'=PQ,\ PB'=PB,....$$

y levantamos las perpendiculares

$$Q'N'=QN,\ B'C'=BC....,$$

los diversos puntos A', M, N', C'...., darán la transformada de la hélice sobre el desarrollo del cilindro. Pero es fácil preveer que esta transformada A'MN'C'..... será *una línea recta*; porque teniendo las ordenadas y las abscisas *rectilíneas* de esta nueva línea, la misma magnitud absoluta que las ordenadas y abscisas *curbilíneas* de la hélice, estarán, como estas últimas *en una razon constante*; que es el carácter esclusivo de la línea recta.

Sentado esto, decimos que la recta A'MC' es precisamente tanjente en el punto M de la hélice primitiva AMC. Con efecto, esta recta se halla desde luego situada en el plano tanjente del cilindro, que contiene un elemento superficial LP*pl* de la superficie; y como este elemento permanece inmóvil durante el desarrollo de la superficie, resulta de aquí que el elemento lineal M*m*, es comun a la curba AMC y a la recta A'MC'; luego estas dos líneas son tanjentes una a otra.

449. En virtud de esto, para obtener en adelante la tanjente a la hélice, será preciso construir, en el plano tanjente del cilindro, un triángulo rectángulo MPA' que tenga por altura a la ordenada MP del punto de contacto, y por base a una recta A'P igual a la abscisa AP rectificada; la hipotenusa de este triángulo será la tanjente pedida. Esto lo podemos espresar de un modo abreviado, diciendo que la *subtanjente* A'P *es igual a la abscisa curbilínea* AP *del punto de contacto*; porque esta regla nos dará a conocer el pie A' de la tanjente, y como el punto de contacto M es conocido, quedará completamente fija la posicion de la tanjente.

Vemos ademas que *la tanjente* A'M así determinada, *tendra la misma lonjitud que el arco* de hélice AM; supuesto que la una es la transformada de la otra, en virtud de lo que hemos dicho en el número precedente.

450. Observemos ahora que conocerémos el ángulo MA'P de la tanjente con el plano de la base del cilindro por medio de la fórmula

$$\text{tanj. } A' = \frac{MP}{A'P} = \frac{MP}{AP} = k;$$

y como esta última razon es constante en todos los puntos de una misma hélice (núm. 446), concluirémos de aquí que *las diversas tanjentes*

a esta curba *están todas igualmente inclinadas sobre la base del cilindro*, y por consiguiente, *cada una de estas tanjentes corta a la jeneratriz del cilindro bajo un ángulo constante* A'MP; cuyo resultado nos dice que la definicion dada en el núm. 163, está contenida en la del núm. 446.

451. Construyamos ahora las proyecciones de una hélice, tomando por base del cilindro recto sobre que ha debido trazarse esta curba, un círculo ABCD cuyo plano adoptarémos por plano horizontal de proyeccion. Sean ademas (A, A') el oríjen, y A'A" *el paso* de la hélice; dividiendo este intervalo A'A" u O'O" en cierto número de partes iguales, en *diez y seis*, por ejemplo, y dividiendo tambien la circunferencia ABCD en diez y seis partes iguales AL, LM, MN,.... bastará levantar por estos puntos de division, las ordenadas verticales P'L', Q'M', R'N',.... respectivamente iguales a $\frac{1}{16}, \frac{2}{16}, \frac{3}{16}$,..... del intervalo O'O", para obtener los diversos puntos de la proyeccion vertical A'L'M'N'C'A"..... de la hélice pedida (*). En cuanto a la proyeccion horizontal de esta curba, es evidentemente la base ABCD del cilindro recto. Fig. 94.

(*) *Esta proyeccion es una* sinusoide; *porque si la referimos a dos ejes* B'X *y* B'Z, *cuyo oríjen esté en el punto* B', *y contamos las abscisas curbilíneas de la hélice, sobre la seccion circular dada al cilindro con el plano horizontal* B'X, *tendremos respecto a un punto cualquiera* (E, E'), *las relaciones*

$$B'F = sen\ BE, \frac{E'F}{BE} = k;$$

o bien contando los senos en el círculo cuyo radio es la unidad,

$$x = R\ sen\ \frac{s}{R}, \quad \frac{z}{s} = \frac{h}{2\pi R};$$

y por la eliminacion del arco s, obtendrémos que

$$x = R\ sen\left(2\pi\frac{z}{h}\right)$$

será la equacion de la proyeccion de la hélice sobre el plano de los dos ejes B'X *y* B'Z. *Uniéndole la equacion del cilindro*

452. La tanjente de la hélice en un punto cualquiera (M, M'), la hallarémos tomando sobre la tanjente en un punto M de la base, una lonjitud MT igual al arco MA rectificado (núm. 449); hecho esto, el punto (T, T') será el pie de la tanjente que buscamos, la que tendrá por proyecciones a MT y M'T'.

453. En virtud de esto, vemos que si de este mismo modo construimos varias tanjentes a la hélice, los pies de todas estas rectas estarán situados sobre una curba ATGH,.... en la cual tendremos que MT =MA, BG=BA, EH=EA....; por consiguiente, esta curba no es otra cosa que la *voluta* del círculo ABCD (números 199, 201) y esta es tambien la traza horizontal de la superficie lugar de las tanjentes a la hélice a cuya superficie se le da el nombre de *helizoide desarrollable*, de la cual tratarémos mui pronto.

FIG. 94. 454. *Dada una hélice* (AMBCDA, A'M'C'A"C"....), *tirar una tanjente a esta curba que sea paralela a un plano dado* U'VS.

Recordemos primeramente que, todas las tanjentes a la hélice forman un ángulo constante con la vertical (núm. 450), y segun esto son respectivamente paralelas a las jeneratrices de un cono de revolucion, cuyo eje sea vertical, y el semi-ángulo en el centro iguale a la inclinacion comun de estas tanjentes con las aristas del cilindro. Para conocer esta inclinacion, construiremos la tanjente particular al punto (B, B'), porque esta evidentemente será paralela al plano vertical, y así nos dará la verdadera magnitud del ángulo que buscamos; por consiguiente, tomarémos, sobre la tanjente al círculo, una lonjitud BG igual al arco rectificado AB, y proyectando el punto G a G' sobre la línea de tierra, obtendrémos la tanjente (BG, B'G') relativa al punto (B, B'). Tirándole ahora por el punto (O, B') una paralela (Og,

---

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

que, combinada con la precedente, nos dará

$$y = R \cos\left(2\pi \frac{z}{h}\right),$$

tendremos las tres proyecciones de la hélice sobre planos rectangulares cuyo oríjen esté en el punto (O, B').

B'G'), y haciendo jirar esta recta al rededor de la vertical O, formarémos el cono recto de que se trata, que tendrá por base al círculo cuyo radio es Og. Si ahora cortamos este cono con un plano paralelo a U'VS, tirado por la cúspide (O, B'); ya sabemos como hemos de hallar (núm. 23) la traza horizontal αIβ de un plano como este, que nos da, por sus intersecciones con el cono, las dos jeneratrices Oα y Oβ *paralelas al plano* SVU'; por consiguiente, las tanjentes a la hélice que gozan de esta última propiedad, se obtendrán sobre el plano horizontal, tirando al círculo la tanjente MT paralela a Oα, y la tanjente EH paralela a Oβ. De aquí coucluirémcs sus proyecciones verticales, tomando a MT =MA y a EH=EBA, lo cual nos dará a conocer los pies (T, T') y (H, H') de las tanjentes pedidas, que por último serán (MT, M'T') y (EH, E'H'). Habrá ademas otra infinidad de paralelas a aquellas, relativas a los puntos M" y E", M'" y E'"..... de las varias *espiras* de la hélice indefinida.

Observemos tambien que podríamos tirar, sobre el plano horizontal, otra segunda tanjente $\mu\theta$ paralela a Oα; pero esta recta, considerada como la proyeccion de una tanjente a la hélice, tendria su punto de contacto en (μ, μ'); y vemos claramente que su proyeccion vertical no sería paralela a la de la jeneratriz del cono proyectada sobre Oα; y así es peciso desechar la tanjente $\mu\theta$. Una ambigüedad semejante nos presentará tambien la jeneratriz Oβ; pero siempre se salvará, con exijir que la tanjente y la jeneratriz del cono, sean a un mismo tiempo paralelas a los dos planos de proyeccion.

455. Si se nos pidiese tirar a la hélice *una tanjente* que fuese *paralela a una recta dada*, el problema sería en jeneral, imposible, a no ser que esta recta misma formase con la vertical un ángulo igual a la inclinacion comun de todas las tanjentes de la hélice, con las aristas del cilindro; pero si esta condicion fuese satisfecha, no tendríamos entónces mas que hacer que tirar una tanjente al círculo ABCD paralela a a la proyeccion horizontal de la recta dada, y de aquí deduciriamos, como lo hemos hecho arriba, la proyeccion vertical de la tanjente a la hélice.

456. El elizoide *desarrollable* es la superficie enjendrada por una recta móvil e indefinida, que resbala sobre una hélice, permaneciendo constantemente tanjente a esta. Llamamos *desarrollable* a este helizoide,

tanto para distinguirle de otro helizoide que es *gauso*, y del que hablarémos mas adelante, cuanto porque la presente superficie cumple evidentemente (núm. 181) con la condicion de que dos jeneratrices infinitamente próximas se hallan en el mismo plano. Para representar gráficamente esta superficie, podríamos desde luego trazar la hélice

$$(A\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda\pi A,\ A'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'A''),$$

y en seguida, construir sus tanjentes a los diversos puntos (A, A'), (β, β'), (γ, γ')....; pero sería mas cómodo y mas exacto determinar estas rectas, indagando inmediatamente sus trazas sobre el plano horizontal de proyeccion, y sobre otro plano horizontal $a'A''l'$ elevado sobre el primero, una cantidad A'A'' igual al paso de la hélice; porque entónces la proyeccion vertical de esta hélice estará directamente formada por las intersecciones subcesivas de estas diversas jeneratrices, con tal que sean en bastante número. Pero sabemos ya (núm. 453) que las trazas horizontales de estas rectas están situadas sobre la voluta del círculo ABCDEF,.... que se construye tomando sobre las tanjentes a la base del cilindro, las distancias

$$\beta B = A\beta,\ \gamma C = A\gamma,\ \delta D = A\delta, \ldots\ldots$$

En seguida, para tener sus trazas sobre el plano superior $a'A''$, observarémos que la recta incógnita (Aa A'a') que será tanjente a la hélice en el punto (A, A'), debe formar con la vertical un ángulo determinado (núm. 450) por la relacion

$$\text{tanj. } A''A'a' = \frac{1}{k},\ \text{o bien } \frac{A''a'}{A''A'} = \frac{2\pi R}{h};$$

y como hemos tomado a $A''A' = h$, resulta de aquí que $A''a' = 2\pi R$, es decir, que el intervalo desconocido $A''a'$ o Aa debe ser igual a la circunferencia cuyo radio es OA, lo cual nos proporciona el construir inmediatamente la primera jeneratriz (Aa, A'a') del helizoide. Por otra parte, en las diversas posiciones que tomará esta recta móvil, la porcion comprehendida entre los planos horizontales L'A' y $a'A''$, conservará *una lonjitud invariable*, puesto que siempre tendrá una inclinacion constante (núm. 450) con estos planos paralelos; será así mismo evidente, respecto a las proyecciones horizontales de estas porciones de

jeneratrices, que permanecerán iguales en lonjitud a A*a*. Por consiguiente, si partiendo de la voluta inferior ABCDEF,.... tomamos sobre las tanjentes del círculo, las lonjitudes

$$Aa,\ Bb,\ Cc,\ Dd,\ Ee,\ Ff,\ldots..$$

iguales todas a la circunferencia OA rectificada; y si en seguida proyectamos los diversos puntos *a*, *b*, *c*, *d*, *e*.... al plano horizontal superior *a*'A", al propio tiempo que las estremidades inferiores A, B, C, D, E..:. a la línea de tierra, podremos construir inmediatamente las proyecciones verticales

$$A'a',\ B'b',\ C'c',\ D'd',\ E'e',\ F'f',\ldots..$$

de las jeneratrices del helizoide; y estas rectas, por medio de sus intersecciones consecutivas, espresarán la misma hélice A'ϛ'γ'δ'ε'λ'π'A" a que debian ser tanjentes.

457. La curba *abcdef*,.... que es la proyeccion horizontal de la traza del helizoide sobre el plano superior *a*'A", es necesariamente una voluta del círculo OA, simétrica con la primera ABCDE.... Con efecto, ya que la recta D*δd*, par ejemplo, es igual a la circunferencia total, y que la parte Dδ iguala al arco Aδ, es preciso que el resto *dδ* sea tambien igual al arco δλπA; y así es que esta espiral, situada en el plano superior *a*'A", vendrá a terminarse en el punto (A, A"), si nos limitamos, como en el precedente depurado, a considerar una *sola* revolucion de la jeneratriz móvil. FIG. 96.

458. Segun esto, podremos con facilidad construir *en relieve* la superficie que acabamos de describir; porque, tomando dos planchas y trazando sobre ellas las dos espirales ABCDEF,.... *abcdef*,.... y colocándolas en una situacion paralela y simétrica, por medio de varillas verticales, será suficiente tender hilos que reunan los puntos correspondientes A y *a*, B y *b*, C y *c*, D y *d*,.... y el conjuntos de estos hilos rectilíneos representará el helizoide desarrollable, cuya *arista de retroceso* (núm. 178) será la hélice figurada tambien por las intersecciones consecutivas de estos mismos hilos. Si ademas, sustraemos de la plancha superior, el interior de la circunferencia OA, percibirémos mui sensiblemente esta hélice en forma de arista saliente; lo cual justificará

a los ojos del espectador, la denominacion dada en todas las superficies desarrollables, a la curba formada por las intersecciones de las jeneratrices, que es la que divide a la superficie en *dos napas* distintas, pero reunidas por un *retroceso* en todo el largo de esta curba.

FIG. 96. 459. Para manifestar ahora esta importante circunstancia del retroceso, construyamos la seccion dada al helizoide con un plano horizontal cualquiera X'Y'. Proyectando sobre el plano inferior los puntos de encuentro de X'Y' con las proyecciones verticales de las jeneratrices, obtendrémos una espiral compuesta de dos ramas XWλ y λZY, colocadas una sobre la napa *superior*, formada por las porciones de jeneratrices situadas encima de sus puntos de contacto con la hélice, y la otra sobre la napa *inferior*; decimos que esta espiral es tambien una voluta del círculo OA. Con efecto, si el plano X'Y' se ha tirado, por ejemplo, por el medio λ' de la altura A'A'', dicho plano cortará a todas las jeneratrices en dos partes iguales; de modo que su punto de seccion con la recta (D*d*, D'*d*') estará situado de tal modo que DW será igual a la semi-circunferencia A$\delta\lambda$; pero supuesto que ya es la parte Dδ=Aδ, se seguirá de aquí que el resto δW igualará al arco $\delta\lambda$; así mismo hallarémos que AX=A$\delta\lambda$ y ρZ=$\rho\lambda$.... Luego la seccion XWλZY es una voluta del círculo OA, que tiene por oríjen al punto λ; y la forma de esta espiral en este punto, nos manifiesta bien claramente el retroceso que presentan las dos napas de la superficie, cuando se aproximan a la hélice.

460. Veamos ahora cuales serán las secciones producidas en el helizoide, por un cilindro FWZ*p* concéntrico con el que contiene a la hélice primitiva. Para esto, tomemos en consideracion, en primer lugar, los puntos F, α, θ,.... en que el círculo FWZ*p* corta a las porciones *inferiores* de las jeneratrices sobre el plano horizontal, y refiramos estos puntos a las proyecciones verticales de las mismas rectas; hagamos en seguida la misma operacion respecto a los puntos ξ, η, W,.... en que las porciones *superiores* de las jeneratrices son encontradas por el cilindro propuesto, y hallarémos las dos curbas

$$(F\alpha\theta Z\omega,\ F'\alpha'\theta'Z'\omega') \text{ y } (\xi\eta W\zeta p,\ \xi'\eta'W'\zeta'p'),$$

situadas una sobre la napa inferior del helizoide, y otra sobre la napa superior, que tambien serán *hélices* del mismo *paso* que la hélice (Aβγδ, A'β'γδ'). Con efecto, las porciones de jeneratrices (φF, φ'F'), (λα, λ'α'), (πθ, π'θ'),.... son todas de la misma lonjitud, supuesto que están proyectadas sobre rectas evidentemente iguales φF=λα=πθ,.... y que su inclinacion sobre el plano horizontal es constante. Luego, cuando la recta indefinida (φF, φ'F') recorra la hélice dada, permaneciéndole tanjente en su estremidad móvil (φ, φ'), la otra estremidad (F, F') se elevará cantidades iguales a las diferencias de nivel de los puntos (φ, φ'), (λ, λ'), (π, π')....; pero estas diferencias son proporcionales a los arcos φλ, φλπ,.... que manifiestamente tienen entre sí la misma razon que los arcos Fα, Fαθ,...; por consiguiente, estos últimos, serán tambien *proporcionales a las ordenadas* de los puntos (α, α'), (θ, θ'),.... y la curba (Fαθ, F'α'θ') será asimismo *una hélice* cuyo paso será igual al de la hélice (Aβγ, A'β'γ'); supuesto que al fin de una revolucion, habrán subido una misma cantidad *h* los dos puntos (F, F') y (φ, φ').

Esta misma proposicion la demostrarémos de un modo análogo, respecto a la seccion (ξηW, ξ'η'W').

461. Será bueno observemos aquí, como una consecuencia inmediata de lo que precede, que cuando una recta móvil indefinida (Fφf, F'φ'f') *resbala* sobre una hélice (Aβγδ...., A'β'γ'δ'....), siéndole siempre tanjente *en un mismo punto* que permanece invariable en la recta móvil, cualquiera otro punto (F, F') de esta última línea describe tambien (núm. 460) *una hélice del mismo paso* que la primera. Pero si la tanjente *rodase* sobre la hélice, *sin resbalar*, de modo que cada elemento de la recta viniese a aplicarse subcesivamente sobre los elementos de la curba, en tal caso un punto cualquiera (F, F') de la recta móvil, permanecerá constantemente en un mismo plano horizontal, y en él describirá (núm. 453) *una voluta* del círculo que sirve de base a la hélice primitiva.

462. *El plano tanjente* tirado por un punto cualquiera (θ, θ') del helizoide es el mismo que en cualquiera otro punto de la jeneratriz (P'p, P'θ'p'), segun lo hemos demostrado (núm. 177) respecto a toda superficie desarrollable: luego el plano pedido contendrá a la tanjente PV de la espiral ABCLP, y esta recta será precisamente la traza hori-

zontal de este plano tanjente, que de este modo quedará suficientemente determinado. Observemos, ademas, que como la línea Pπ tanjente a la involuta Aβλπ, es siempre normal (núm. 197) à la voluta ABCLP; síguese de aquí que la traza PV del plano tanjente será perpendicular a la jeneratriz (Pπ, P'π'), y que segun esto este plano contendrá al radio (Oπ, O'π') del cilindro. De aquí podemos concluir que el plano tanjente del helizoide queda determinado por la jeneratriz sobre que está colocado el punto dado, y por el radio del cilindro que termina en el punto de contacto de esta jeneratriz con la arista de retroceso.

463. De aquí resulta evidentemente, que los planos tanjentes del helizoide forman, con el plano horizontal, *un ángulo constante* que es igual a la inclinacion de la tanjente a la hélice primitiva. Ademas, como cada plano tanjente, tal como el πPV, contiene a dos jeneratrices infinitamente próximas, que son tanjentes a la hélice, este plano no es otra cosa que el *plano osculador* (núm. 177) de esta curba; y por consiguiente, el helizoide es la *envolvente* de todos los planos osculadores de su arista de retroceso, como sucede en toda superficie desarrollable (núm. 181).

464. En virtud de esto, el contorno aparente del helizoide sobre el plano vertical, está formado por las rectas (L*l*, L'*l*'), (A*a*, A'*a*'), (AU, A"U") porque el plano tanjente al largo de estas jeneratrices, es perpendicular al plano vertical: solo que una parte de las dos últimas jeneratrices está cubierta por la primera, y por esta circunstancia es invisible. En cuanto al contorno aparente sobre el plano horizontal, está manifiestamente formado por la hélice (Aβγδλ, A'β'γ'δ'λ'), aun cuando los planos tanjentes del helizoide al largo de esta curba no sean *verticales*, como lo exijiria la regla jeneral del núm. 106; pero esto es porque aquí presenta la superficie, por límite de las partes visibles, la circunstancia particular de un *retroceso*. A este contorno debemos agregar las espirales ABCGQRS y *abclpqr*A, que terminan la porcion de superficie que nos hemos limitado a considerar aquí, con la mira de omitir la parte de la primera que está cubierta por la segunda; y en atencion a estas advertencias, fácil le será al lector adquirir un conocimiento perfecto de las partes de los trazos *seguidos* o *puntuados* que presenta el actual depurado.

465. *Desarrollo del helizoide.* Podriamos ejecutarlo en el caso presente, lo mismo que en toda superficie desarrollable, dividiendo una curba plana ABCDGL situada sobre la superficie, en arcos pequeños que sensiblemente se confunden con sus cuerdas; hecho esto, podremos mirar a los sectores elementales proyectados sobre Dδγ C, Eεδ D, Fφε E,.... como triángulos cuyos lados, conocidos por sus proyecciones, serán fáciles de valuar, de modo que si construimos estos triángulos sobre un mismo plano y a continuacion unos de otros, su conjunto representará el desarrollo de la superficie en cuestion. Con todo, es preciso confesar que este sistema de operaciones daria lugar a errores acumulados, que desaparecerian si con anticipacion conociésemos la forma que debe tomar en el desarrollo, una determinada curba dada sobre la superficie primitiva; que así es como lo hemos practicado respecto a los cilindros y conos en los números 243 y 251. FIG. 96.

466. Pero en el helizoide desarrollable, sucede que *todas las hélices tienen por transformadas*, sobre el desarrollo, *círculos concéntricos*. Con efecto, si concebimos la hélice arista de retroceso (Aβ γδ.... A'β'γ'δ'....), como dividida en elementos iguales proyectados sobre Aβ, βγ, γδ,.... es fácil notar que *todos los ángulos de continjencia son iguales entre sí*, en esta línea de doble curbatura; porque el que está proyectado sobre DδC, combinado que sea con la vertical δ, formará un ángulo triedro, en el cual permanecerán las mismas, en todos los puntos de la hélice, dos caras y el ángulo diedro. Pero estos ángulos de continjencia, que jeneralmente varian de magnitud en una curba cualquiera trazada sobre una superficie que se desarrolla, permanecerán *invariables* cuando se trate de la arista de retroceso (núm. 279, *nota*): luego la hélice (Aβγδ.... A'β'γ'δ'....) se transformará en una curba plana, cuyos ángulos de continjencia, respecto a arcos de la misma lonjitud, serán iguales entre sí; por consiguiente, esta transformada tendrá una curbatura uniforme (núm. 198), y segun esto será un círculo.

Respecto a otra hélice (FαΘZω, F'α'Θ'Z'ω') situada sobre el mismo helizoide, obtendremos tambien su transformada trazando en el desarrollo, tanjentes al círculo en que se habrá cambiado la hélice (Aβγ...., A'β'γ'....), y tomando estas tanjentes iguales a las porciones de jeneratrices (φF, φ'F'), (λα, λ'α'), (πΘ, π'Θ'),..... Pero como estas últimas rectas

tienen todas la misma lonjitud (núm. 469), evidentemente sucederá que sus estremidades terminarán en una circunferencia concéntrica con la precedente; luego &a.

FIG. 96. 467. Para hacer que esta propiedad de las hélices sirva para el desarrollo del helizoide sobre uno de sus planos tanjentes, elejirémos el plano $LL'\lambda'$ que es perpendicular al plano vertical, y que contiene a las dos rectas ($L\lambda$, $L'\lambda'$) y ($\psi\alpha$, $L'\alpha'$) que son tanjentes a las dos hélices proyectadas sobre $A\beta\lambda$ y $F\alpha\theta$. Y como estas rectas deberán ser tanjentes a los dos círculos en que se transformarán las dos hélices, no habrá mas que abatir este plano al rededor LL', con las dos tanjentes de que se trata, que se convertirán evidentemente en $L\lambda''$ y $\psi\alpha''$; levantar en seguida sobre estas últimas líneas las perpendiculares $\lambda''O''$ y $\alpha''O''$, que determinarán el centro O'' y los radios de estas dos transformadas circulares.

FIG. 96 Y 97. Sentado esto, describamos en la *fig.* 97 con un radio $O_2\lambda_2$ igual a la recta $O''\lambda''$ de la *fig.* 96, una circunferencia, sobre la cual será preciso señalar arcos que tengan la misma lonjitud que los arcos de hélice proyectados sobre $A\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$.... Y como la semi-hélice ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$) es de lonjitud igual (núm. 449) a su tanjente ($L\lambda$, $L'\lambda'$), trazarémos la tanjente λ_2L_2 igual a $\lambda'L'$; y despues de haber dividido a esta recta λ_2L_2, en ocho partes iguales, las referirémos a la circunferencia, desde λ_2 hasta A_2 y A_3; y hecho esto, el arco de círculo $A_2\lambda_2A_3$, será *la transformada* de toda la espira ($A\beta\gamma\lambda A$, $A'\beta'\gamma'\lambda'A''$). Tirarémos en seguida las tanjentes β_2B_2, γ_2C_2, δ_2D_2,.... que haremos iguales a 1, 2, 3,.... de las divisiones de λ_2L_2, y estas serán las verdaderas lonjitudes de las jeneratrices del helizoide, comprehendidas desde la arista de retroceso hasta el plano horizontal; de modo que la *napa inferior* de esta superficie estará desarrollada segun la forma

$$A_2\beta_2\gamma_2\lambda_2A_3U_2T_2L_2C_2B_2A_2,$$

cuyo contorno esterior es evidentemente la voluta del cículo $A_2\lambda_2A_3$, en tanto que la circunferencia $F_2\alpha_2\theta_2\omega_2$ será *la transformada* de la otra hélice ($F\alpha\theta\omega$, $F'\alpha'\theta'\omega'$). En cuanto al desarrollo de la *napa superior* del helizoide, le obtendrémos prolongando cada jeneratriz $F_2\varphi_2$, de modo que su lonjitud total F_2f_2 iguale al duplo de $L_2\lambda_2$.

468. Hubiéramos podido evitar el recurrir a la segunda hélice ($F\alpha\theta$, $F'\alpha'\theta'$), para hallar el radio $O_2\lambda_2 = O''\lambda''$ del círculo en que se transforma la hélice primitiva ($A\beta\gamma\lambda$, $A'\beta'\gamma'\lambda'$), teniendo presente que este radio debe precisamente ser el *radio de curbatura* (núm. 198) de esta última hélice; porque en el desarrollo de una superficie desarrollable, sabemos (*nota* del núm. 179) que la arista de retroceso conserva los mismos ángulos de continjencia que anteriormente, así como tambien los arcos de la misma lonjitud; de modo que será la misma su curbatura, y solamente pierde su *torsion*, segun mas detalladamente lo esplicarémos en el núm. 654. Veremos ademas en el núm. 676 que la fórmula siguiente nos da a conocer el radio de curbatura de una hélice

$$\rho = R\,(1 + \text{tanj.}^2\omega)$$

en la que ω espresa el ángulo de la tanjente a la hélice con el plano de la base ortogonal del cilindro, y R el radio de esta superficie (*). Esta espresion es susceptible de una construccion muí sencilla; purque si por el punto E' de la *fig.* 96, y paralelamente a la tanjente $L'\lambda'$ tiramos la

---

(*) *Si queremos hallar directamente esta fórmula, podremos emplear el medio siguiente que nos ha comunicado* M. Catalan, *repetidor en la Escuela Politécnica. Sean* MP *y* PQ (fig. 98) *las proyecciones de dos elementos iguales de la hélice, correspondientes al punto* (P, P') *en el cual el plano osculador contiene* (*núm.* 463) *al radio* (PO, P') *del cilindro, y proyecta estos dos elementos, sobre la recta* M'P'Q' *que forma el ángulo* ω *con la base del cilindro. Si hacemos jirar este plano osculador al rededor de la recta* (PO, P'), *hasta que llegue a ser horizontal, los dos elementos se habrán abatido segun* P*m* *y* P*q*; *levantando en seguida perpendiculares en sus medios, el radio de curbatura de la hélice estará representado por* Pω *o* $\frac{1}{2}$ PF. *Pero tenemos evidentemente que*

$$2\rho = PF = \frac{(Pm)^2}{PH}, \quad 2R = PG = \frac{(PM)^2}{PH},$$

de donde deducimos, observando que PM *es la proyeccion de la recta* P'M' = P*m*, *que*

recta E'F y sobre ella levantamos la perpendicular F'K', la comparacion de los triángulos rectángulos nos conducirá fácilmente a la relacion

$$A'K' = A'E' \tan j.^2\omega = R \tan j.^2\omega;$$

de donde se sigue que el radio de curbatura de la hélice es $\rho = E'K'$.

Por consiguiente, con esta longitud, que debe ser igual a $O''\lambda''$, es con la que deberemos describir el círculo de la *fig.* 97; y en seguida, las otras operaciones gráficas se efectuarán como anteriormente.

CAPITULO II.

De las epicicloides.

LAM. 45. FIG. 1. 469. Se dice que una curba móvil *xay rueda* sobre una curba fija XAY, cuando se aplican respectivamente unos sobre otros los elemen-

---

$$\frac{\rho}{R} = \left(\frac{Pm}{PM}\right)^2 = \frac{1}{\cos.^2\omega} = 1 + \tan j.^2\omega.$$

Podriamos tambien relacionar este método con la fórmula jeneral $\rho = \frac{ds}{\varepsilon}$ *hallada en el núm.* 198, *observando que aquí el ángulo de continjencia tiene por verdedera magnitud al suplemento de* mPq; *y asi resultará evidentemente que*

$$\frac{Pm}{PH} = \cos\left(\frac{180^\circ - \varepsilon}{2}\right) = \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon, \text{ y } PH = \frac{(PM)^2}{2R} = \frac{ds^2 \cos.^2\omega}{2R};$$

de donde concluiremos que

$$\varepsilon = \frac{ds \cos.^2\omega}{R}, \text{ y } \rho = \frac{R}{\cos.^2\omega} = R\,(1 + \tan j.^2\omega)$$

lo que justifica la construccion empleada en el testo.

tos iguales *ab*=AB, *bc*=BC, *cd*=CD,.... de modo que el punto *b* llegue a coincidir con B, en seguida *c* con C, *d* con D, y así de los demas. Esto equivale a decir que el lugar de contacto que en la actualidad se halla en A y *a*, debe recorrer, en el mismo tiempo, espacios iguales sobre las dos curbas a la vez; en tanto que si estos espacios fuesen desiguales, y el punto *b* viniese a coincidir con C, habria a un mismo tiempo *ruedo* y *desliz* de una curba sobre otra; en fin, no habria sino un simple desliz, sin ninguna rotacion, si solo el mismo punto *a* de la curba móvil fuese el que coincidiese subcesivamente con B, C, D.... Estas distinciones se aplican tante a las curbas gausas como a las que están situadas sobre un mismo plano o en planos diferentes, con tal que la curba móvil tenga siempre *una tanjente comun* con la curba fija.

470. Durante la rotacion de la curba *xay*, un punto cualquiera *m* fijo sobre esta línea móvil y arrastrado por ella, describirá en el espacio otra curba *mz* que vamos a enseñar a construir en varios ejemplos; pero en todos casos, la tanjente *mt* relativa a una posicion cualquiera, será siempre *perpendicular a la recta* A*m* que une al punto jenerador con el punto de contacto correspondiente. Con efecto, cuando las dos curbas *xy* y XY se tocan en A, tienen en este sitio un elemento comun AA'; pero miéntras que los dos elementos confundidos de este modo se separan, y hasta que los elementos vecinos *ab* y AB hayan llegado a coincidir, permanece *inmóvil* el vértice A, y el punto jenerador *m* describe un arco *mm'* infinitamente pequeño y patentemente situado sobre la esfera del radio A*m*. Luego la tanjente *mt*, que debe ser la prolongacion de este elemento *mm'*, será perpendicular a la recta A*m*, y esta será tambien *normal* a la curba *mm'z*. Por otra parte, vemos que este mismo raciocinio se aplicaria a cualquier punto *n* que, sin estar situado sobre el perímetro de la curba rodadora *xy*, estuviese unido fijamente con ella y describiese otra curba *nn'*, cuya normal sería tambien A*n*: luego, en todos casos, *la recta que une el punto de contacto de la curba rodadora con el punto jenerador, es una* NORMAL *a la curba que describe este último punto.*

Si quisiéramos conservar a la demostracion precedente todo el rigor de forma de que es susceptible, sería preciso, en primer lugar, substituir a las dos curbas *xy* y XY dos polígonos (*fig.* 2) de lados respectivamente iguales; y haciéndolos en seguida rodar uno sobre otro, de FIG. 2.

modo que sus planos formasen entre sí un ángulo constante o variable, el punto *m* describiria una línea discontínua *mm'm"*.... compuesta de arcos *esféricos*, que tendrian sus centros subcesivos en A, B, C.... de tal modo, que la tanjente *mt* en el punto *m* sería perpendicular a A*m*: Pero es evidente que esta última propiedad subsistirá siempre, sea cual fuere la magnitud de los lados y de los ángulos de los dos polígonos; solamente que a medida que aumenten los ángulos y disminuyan los lados, los arcos *mm'*, *m'm"*.... disminuirán de lonjitud, y dos radios consecutivos estarán mas próximos a ser iguales, lo que hace que la línea *mm'm"*.... se aproxime cada vez mas a una curba contínua. Luego, supuesto que en todas estas variaciones, el ángulo A*mt* permanece constantemente recto, sucederá tambien lo mismo cuando los dos polígonos se hayan convertido en dos curbas cualesquiera, por ejemplo en dos círculos; y así, en este último estado, la curba contínua descrita por el punto *m*, tendrá por tanjente en *m*, a una recta perpendicular a A*m*.

Epicicloides planas.

LAM. 45. FIG. 3. 471. PRIMER CASO. Considerémos un círculomóvil O' que ruede esteriormente sobre un círculo fijo O, permaneciendo siempre en el mismo plano que este último, y adoptemos por punto jenerador el punto actual de contacto D de estas dos circunferencias. Cuando el círculo O' haya rodado hasta tocar al otro en un punto cualquiera A_4, hallarémos la posicion correspondiente M del punto jenerador D, describiendo desde el punto O'_4, como centro y con el radio O'D, una circunferencia sobre la que tomarémos un arco A_4M de la misma lonjitud absoluta que el arco A_4D, lo que se efectuará midiendo este último por medio de una abertura mui pequeña de compas. Pero estas operaciones se ejecutan con mas rapidez, si se ha tenido cuidado primeramente de dividir la circunferencia móvil en partes iguales, y repetirlas sobre la circunferencia fija segun DA_1, A_1A_2, A_2A_3....; porque entónces bastará describir dos arcos de círculo, uno desde el centro O'_4 con un radio $O'_4M=O'D$, y el otro desde el centro A_4M igual a la curba D4 del círculo primitivo O'. Efectuando otras construcciones semejantes en los demas puntos de contacto A_3, A_6,.... nos permitirán trazar fácilmente la curba DMGF llamada EPICICLOIDE *esterior*, que comprehende una infinidad de ramas idénticas a la que acabamos de citar,

y que se unen unas con otras por medio de puntos de retroceso como los D y F.

472. La tanjente en el punto M de esta curba, será precisamente la recta MT cuerda suplementaria de MA_4, pues sabemos (núm. 470) que esta última es *normal* a la epicicloide. Esta propiedad nos da un medio mucho mas sencillo para el trazado del engargante de las ruedas, y bastante exacto para este objeto, porque si describimos diversos arcos de círculo que tengan por centros a A_1, A_2, A_3,.... y por radios a las cuerdas D1, D2, D3.... del círculo primitivo O'; y si en seguida trazamos una curba envolvente de todos estos arcos, esta envolvente será precisamente la epicicloide DMGF, en virtud de que sus cuerdas, manifiestamente indican (núm. 470) las lonjitudes de las *normales* tales como MA_4 que terminan en los puntos śubcesivos de contacto A_1, A_2, A_3.... del círculo móvil. Este es el método propuesto por *M. Poncelet.*

473. Podríamos adoptar un pnnto jenerador D' situado fuera del círculo móvil, pero unido con él de un modo invariable. En este caso, el punto D' describiria una curba de nudo D'M'G',.... que se llama *epicicloide dilatada*, y se construye tomando sobre cada radio O'_4M, determinado como en el núm. 471, una distancia MM'=DD'. La recta A_4M' será aun (núm. 470) normal a esta cùrba; y así la tanjente M'T' deberá tirarse perpendicularmente a A_4M'.

Si el punto jenerador D" estuviese dentro del círculo móvil, la curba descrita en este caso sería una *epicicloide acortada* D"M"G", que tendrá puntos de inflexion en lugar de un nudo. Un punto cualquiera M" de esta curba se obtendrá tambien tomando, sobre el radio O'_4M, construido como en el núm. 471, una distancia MM"=DD"; y en seguida la recta A_4M'' será (núm. 470) normal a esta epicicloide, de aquí deducirémos inmediatamente la tanjente M"T".

474. Segundo caso. Cuando el círculo móvil O' rueda en la concavidad del círculo fijo O, y el primero tiene un radio $R' < \frac{1}{2}R$, el punto jenerador D describe una *epicicloide interior* que presenta la forma DGF, y que en lo demas se construye como anteriormente. Si elijiésemos el radio $R'=\frac{1}{4}R$, como en la *fig.* 5, la curba DMFD'F' tendrá una forma y equacion enteramente semejante a la de la evoluta de la elipse (*fig.* 76), con solo la diferencia de que los cuatro puntos de retroceso Lam. 45. Fig. 4.

estarian aquí colocados a igual distancia del centro (véase la nota del núm. 492).

475. *Epicicloide rectilínea.* Este caso mui particular y útil para los engargantes de ruedas, ocurre cuando se elije el radio del círculo móvil $R''=\frac{1}{2}R$; porque entónces la epicicloide descrita por un punto del círculo O" se halla *confundida con el diámetro* D"OD que pasa por la posicion inicial D" del punto jenerador. Con efecto, si consideramos al círculo móvil en una época cualquiera de su rotacion, en que toque al círculo O en A y que corte al diámetro D"O en M, bastará probar que los arcos AM y AD" son iguales en magnitud absoluta, puesto que entónces será cierto que el punto jenerador colocado primeramente en D", habrá llegado a M sobre el diámetro D"O. Pero el ángulo AO"M es evidentemente duplo de AOD"; luego los arcos AM y AD" serán tambien duplos uno de otro, respecto al número de grados que contienen; pero el primero de estos arcos pertenece a una circunferencia que es la mitad de la otra; luego la lonjitud absoluta de AM iguala a la de AD.

LAM. 45. FIG. 7. 476. TERCER CASO. Supongamos ahora que el círculo móvil O' que rueda en la concavidad del círculo O, tenga un radio $R' > \frac{1}{2}R$; decimos que la epicicloide DGF, que describe entónces el punto jenerador D, coincidirá con la que describiria otro tercer círculo O" que tuviese un radio $R''=R=R'$, y que rodase *en sentido contrario* de O'. Para probarlo, considerarémos que el círculo móvil O' ha llegado a una situacion cualquiera O'_2, en la que el punto jenerador ocupe una posicion M, de suerte que sea el arco AM=AD; tirarémos la recta MO'_2 y su paralela OB; concluyamos en seguida, el paralelógramo OO'_2MO'', que nos dará $O''B=O''M=R-R'$, y por último trazemos el círculo O". Hecho esto, no resta mas que demostrar que los arcos BM y BD tienen la misma lonjitud absoluta; ahora bien, los tres arcos BA, AM y MB, que miden ángulos que evidentemente son iguales, deben ser proporcionales a sus radios, y esto nos da

$$\frac{BA}{R}=\frac{AM}{R'}=\frac{BM}{R''};$$

y supuesto que hemos tomado a $R''+R'=R$, resulta de aquí que

BM + MA=BA; pero sabemos ya que el arco AM=AD; luego nos queda que BM=BD.

477. Cuarto caso. En fin, supongamos que el círculo móvil O' tenga un radio R'> R, y entónces envolverá al círculo fijo. En este caso, la epicicloide descrita por el punto jenerador D será *esterior*, y cada rama DGF ocupará sobre el círculo fijo, un arco DEF igual al esceso de la circunferencia O' sobre la circunferencia O. Ademas, demostrárémos fácilmente, como lo hicimos en el núm. 476, que esta epicicloide DGF coincide con la que describiria un círculo O" tanjente esteriormente al círculo O, y cuyo radio fuese R"=R'—R.

478. Cuando suponemos *infinito* el radio R del círculo fijo, este círculo se convierte en una recta DAF, sobre la que rueda el círculo O'; y un punto cualquiera M de la circunferencia de este último, describe en este caso la *cicloide* DMGF, cuya normal es tambien MA y la tanjente MT. La construccion de esta curba se efectuará fácilmente por los medios indicados en el núm. 471; ademas, la cicloide será *dilatada* o *acortada*, como en el núm. 473, cuando el punto jenerador esté colocado fuera o dentro del círculo móvil. FIG. 8.

479. Por el contrario, si es el círculo móvil el que adquiere el radio infinito, este círculo se convertirá en una recta indefinida DX que, rodando sobre la circunferencia O, describirá con cada uno de sus punto D, una espiral DM'M"M"',.... que no es otra cosa que la *voluta* del círculo O (núm. 197). Como ademas, las normales M'A', M"A".... son precisamente los radios de curbatura (núm. 198) de esta espiral, si desde los puntos A', A", A"'.... describimos con radios iguales a D*a*', D*a*", D*a*"'.... arcos de círculo, estos arcos se confundirán en una estension bastante considerable con la misma espira, y nos darán un medio mui exacto y cómodo de trazar esta curba. FIG. 9.

Epicicloides esféricas.

480. Consideremos ahora dos círculos OA y CA, y supongamos que el segundo de estos ruede sobre el primero, permaneciendo siempre tanjente a él, pero de modo que sus planos formen un ángulo constante entre sí CAX=ω; durante esta rotacion, un punto cualquiera M, fijo sobre la circunferencia móvil y arrastrado con ella, describirá en el espacio una curba DM,....que se llama Epicicloide *esférica*, FIG. 99.

porque toda ella está enteramente situada sobre la superficie de una esfera constante. Con efecto, si por los centros de los dos círculos levantamos a sus planos las perpendiculares OS y CS, estos dos *ejes* irán precisamente a encontrarse en cada una de las posiciones del círculo móvil; porque respecto a cada punto de contacto, tal como A, los planos AOS y ACS serán evidentemente perpendiculares a la tanjente comun AV, y en virtud de esto coincidirán. Ademas, como el ángulo OAC es suplemento de CAX$=\omega$ que permanece constante miéntras dura la rotacion, síguese de aquí que el cuadrilátero OACS tendrá dos lados y tres ángulos cuya magnitud permanecerá invariable, y consiguientemente sucederá lo mismo con los lados OS y CS cuyo punto de encuentro S permanecerá *inmovil*; de aquí resulta que la distancia de este punto S al punto móvil M, será constantemente igual a SA, y que en virtud de esto, toda la epicicloide estará situada sobre la esfera que tenga a SA por radio.

481. Ademas, si nos imajinamos dos conos de revolucion, que tengan por cúspide comun al punto S y por bases a los círculos OA y CA, es evidente que estos conos tendrán un plano tanjente SAV; y por consiguiento la jeneracion de la epicicloide puede enunciarse del modo siguiente: *si dos conos de revolucion, que constantemente tienen la misma cúspide y jeneratrices de la misma lonjitud, ruedan uno sobre otro,* sin resbalar, y permaneciendo tanjentes al largo de una jeneratriz variable, *un punto cualquiera, fijo sobre la base del cono móvil, describirá la curba llamada epicicloide esférica.* Con efecto, en esto debemos ver que las circunferencias de las dos bases serán siempre *tanjentes,* y que sus planos conservarán *una inclinacion constante*; este es el medio mas cómodo para realizar mecanicamente estas dos condiciones, miéntras rueda el círculo móvil sobre el fijo.

FIG. 190. 482. Construyamos la proyeccion de la epicicloide sobre el plano de la base del cono fijo, mirando a este último como horizontal, y adoptemos por plano vertical al que pasa por el eje S'O de este cono y por el punto de contacto A de las dos bases, en la posicion actual que se refiere a una época cualquiera del movimiento. En conformidad con esto, los dos conos estarán proyectados verticalmente sobre los triángulos iguales S'AE y S'AB', y la recta AB' representará la proyeccion vertical del círculo móvil que, abatido al rededor

de la tanjente comun AV, se convertirá en el círculo A*mb*. Sentado esto, sea D el oríjen de la epicicloide, es decir, la posicion que ocuparia el punto jenerador, cuando estuviese en contacto con el círculo fijo : ahora que el círculo móvil ha recorrido, rodando sobre el otro, el arco DA, el punto jenerador se hallará colocado sobre el abatimiento, a una distancia curbilínea A*m* igual en lonjitud absoluta al arco AD (*). Luego, levantando el círculo A*mb*, moviéndolo al rededor de AV, y observando que el punto (*m*, *m*'), va entónces a describir un arco *m*'M' que por ser perpendicular a la charnela AV, estará proyectado sobre la recta *m*M paralela a la línea de tierra, obtendrémos un punto (M, M') de la epicicloide pedida.

483. Para hallar otro segundo punto, será preciso que nos figuremos que el círculo móvil ha rodado hasta llegar a tocar al círculo fijo en A_6, por ejemplo; entónces podremos volver a empezar a ejecutar sobre el plano vertical OA_6 abatido, operaciones semejantes a las que hemos ejecutado sobre el plano vertical OA; pero será mucho mas sencillo reducir todas las construcciones a que se efectuen sobre este último. Para esto, figurémonos que habiendo llegado los dos conos a tocarse al largo de la arista que termina en A_6, jiren simultáneamente y *sin variar sus posiciones relativas*, al rededor de la vertical OS', hasta que el radio OA_6 llegue a coincidir con la antigua línea de tierra OAX. Entón-

---

(*) *Para trazar el depurado es bueno principiar por dividir al círculo móvil en partes iguales, medir una de estas partes por medio de cuerdas pequeñas; y transportar en seguida estas sobre el círculo fijo, lo que nos dará un arco igual a una de las divisiones del círculo móvil. En seguida, repetirémos este arco del círculo mayor tantas veces cuantas divisiones hubiese en el círculo móvil, y hallarémos la estension* DAF, *que ocupa una rama de la epicicloide sobre el círculo fijo. Sin embargo, si la razon de los dos radios* OA y C'A *estuviese espresada por un número bastante sencillo, sería mas exacto tomar desde luego, sobre el círculo fijo, un arco* DAF *igual a una fraccion de esta circunferencia, espresada por esta razon; y en seguida dividiríamos al arco* DAF *en tantas partes iguales cuantas hubiésemos señalado en el círculo móvil.*

ces, el punto jenerador estará situado sobre el círculo móvil abatido, no ya en *m*, sino a una distancia *An* igual al intervalo DA_6 comprehendido entre el oríjen D y el punto de contacto en su verdadera posicion que es A_6. De modo que si construimos, como arriba, las proyecciones N y N' del punto abatido *n*, no habrá mas que hacer, que referir OA a OA_6, y hallar en seguida un punto N" colocado relativamente a esta última línea, en una situacion enteramente semejante a la de N con respecto a OA; lo que ejecutarémos por medio del círculo descrito con la distancia ON, sobre el cual tomarémos el arco I"N" igual a IN.

484. Lo mismo se practicará en cualquiera otra posicion del punto de contacto de los dos circulos; y cuando este contacto tenga lugar en el medio K del arco DKF igual a la circunferencia del círculo móvil, vemos claramente que el punto jenerador estará abatido en *b* que se proyecta a B' y B; luego si referimos este último punto a OK, por medio de un arco de círculo BG, obtendremos el *vértice* G en que la proyeccion horizontal de la epicicloide se desvia mas del círculo fijo.

Finalmente observemos que los puntos D, M, y N", trasladados simétricamente al otro lado de OG, por medio de arcos de círculo, nos darán puntos como F, M"', N"', que pertenecerán tambien a la epicicloide, que tiene por *eje* a la recta OG, y admitirá una infinidad de ramas idénticas con DGF.

485. Las construcciones precedentes nos dan tambien medios para trazar la proyeccion vertical de la epicicloide, puesto que M' pertenece a esta proyeccion; y en cuanto al punto (N, N'), que se ha trasladado a N", sin cambiar de altura, hallarémos mui fácilmente su proyeccion vertical en esta última situacion. Pero no hemos querido efectuar este trazado, temerosos de hacer algo confuso el depurado, y sobre todo porque miramos aquí al plano vertical de proyeccion, solo como un medio de ejecutar las operaciones gráficas, y no como si realmente existiese, en virtud de que su presencia hubiera hecho que fuesen invisibles una gran parte de las líneas del depurado. Ademas, la epicicloide está suficientemente determinada por la interseccion del cilindro vertical DMGF, con la esfera del radio S'A que es fácil representar sobre el plano horizontal.

FIG. 100. 486. *De la tanjente a la epicicloide.* Ya que esta curba se halla toda entera (núm. 480) sobre la superficie de una esfera fija que tie-

ne por centro la cúspide S' y por radio el apotema S'A, el plano tanjente a esta esfera en (M, M') contendrá a la tanjente pedida. En seguida, como hemos demostrado en el núm. 470 que la recta (AM, AM') que une el punto jenerador con el punto de contacto correspondiente A, es una *normal* a la epicicloide, podemos concluir de aquí que la tanjente que buscamos se halla tambien en un plano perpendicular a esta recta, que puede ser mirado como el plano tanjente de una esfera que tuviese su centro en A, y por radio a la recta (AM, AM'); pero esta segunda esfera es variable de posicion y de magnitud, al pasar de un punto a otro de la epicicloide, y no hace mas que *tocar* a esta curba, con la cual no tiene de comun sino un elemento lineal. En virtud de esto, el problema se reduce a indagar la interseccion del plano tanjente a la superficie fija, con el plano tanjente a *la esfera variable.*

487. Para conseguir lo que acabamos de decir, cortemos a estas dos esferas con el plano B'AV que contiene a la base del cono móvil. La seccion causada de este modo en la esfera S'A, será evidentemente el mismo círculo AB'; abatámosle segun A*mb*, y tirémosle la tanjente *m*P que, despues de levantada, encontrará al plano horizontal en P sobre la charnela AV; y entónces este punto P pertenecerá a la traza horizontal del plano tanjente de la esfera S'A. y esta traza será la recta PT tirada perpendicularmente a la proyeccion OM del radio que termina en el punto propuesto (M, M'). En cuanto a la esfera variable cuyo radio es (AM, AM'), se halla cortada por el plano B'AV segun un círculo máximo que, abatido sobre el plano horizontal jirando al rededor de AV, se convertirá en el círculo descrito con A*m* por radio. Tirémosle la tanjente *m*Q (que debe terminar en el punto *b*), y en seguida levantemos esta recta con su círculo, para hallar su traza horizontal Q sobre la charnela AV; este punto Q pertenecerá entónces a la traza del plano tanjente de la esfera variable, y esta traza se obtendrá tirando QX perpendicular a la proyeccion AM del radio correspondiente. Sentado esto, como las trazas QX y PT de los dos planos tanjentes van a cortarse en el punto T, la recta TM será la proyeccion horizontal de la tanjente de la epicicloide; y la proyeccion vertical T'M' se deducirá de esta, proyectando el punto T a la línea de tierra.

488. *Otro método.* Podemos obtener esta tanjente de un modo mucho mas sencillo, empleando el procedimiento del *plano normal* (núm: FIG. 100.

214), porque ahora conocemos inmediatamente dos normales a la epicicloide; una de ellas es el radio de la esfera constante, tirado desde la cúspide S' al punto (M, M'); y la otra la recta (MA, M'A), en virtud de lo que hemos probado en el núm. 470. Por consiguiente, si hacemos pasar un plano por estas dos normales, la tanjente que buscamos deberá serle perpendicular, y así quedarán determinadas sus proyecciones. Pero la primera de estas normales va evidentemente a penetrar al plano vertical en S', y la segunda en A; luego S'A es la traza vertical del plano normal. En cuanto a la otra traza, supongamos en el plano normal una recta ausiliar paralela a S'A; sus proyecciones M'R', y MR, nos darán el punto R en que penetra al plano horizontal, y por consiguiente AR será la traza horizontal del plano normal. Hecho esto, se obtendrá la tanjente a la epicicloide tirando MT perpendicular a AR, y M'T' perpendicular a AS.

489. Es importante observar que, en los puntos de *retroceso* D y F, tiene por tanjentes la proyeccion horizontal de la epicicloide a los radios OD y OF. Con efecto, la recta variable (AM, AM') a que la tanjente en el espacio es siempre perpendicular, prolongada indefinidamente, es una secante respecto al círculo móvil, segun se ve en su abatimiento A*m*. Pero sus dos puntos de seccion A y *m* se hallan reunidos cuando el punto de contacto A ha llegado a D, la recta indefinida abatida segun A*m* es entónces *tanjente* al círculo móvil en el punto *m*, y por consiguiente, al círculo fijo que, a esta ápoca del movimiento, toca al otro en D; luego la tanjente en el punto D al círculo fijo DA, se halla que precisamente es la traza horizontal del plano normal, y por consiguiente, la tanjente de la epicicloide estará proyectada horizontalmente sobre el radio ODX'.

En cuanto a la proyeccion vertical de esta misma tanjente, bastará proyectar su pie D a D' sobre la línea de tierra, y bajar desde este último punto una perpendicular a la traza vertical del plano normal relativo al punto D. Esta traza se obtendrá mui fácilmente, supuesto que evidentemente pasa por el punto S', y por el punto en que la línea de tierra encuentra a la segunda normal, que segun lo acabamos de probar, se confunde con la tanjente del arco DA.

Para hallar las proyecciones de la tanjente al otro estremo F de la epicicloide, operarémos de un modo enteramente igual; y debemos per-

cibir que cada una de estas tanjentes en D o en F, precisamente coincide con la tanjente del círculo máximo vertical de la esfera constante cuyo radio es S'A.

490. En el *vértice* de la epicicloide que se proyecta en G, la tanjente será horizontal y perpendicular al plano vertical OKG; porque este plano contendrá manifiestamente a las dos normales del núm. 488, cuando el punto jenerador haya llegado a la estremidad superior B', del diámetro tirado por el punto de contacto del círculo móvil.

409. Cuando hemos indagado (núm. 487) la traza QX del plano FIG. 100. tanjente a la *esfera variable* cuyo radio es (AM, AM'), nos hemos apoyado en que este plano debia contener a la tanjente abatida segun Q*mb*. Pero cuando esté levantada en el plano B'AV del círculo móvil, irá a penetrar al plano vertical en B'; luego B'X es la traza vertical del plano tanjente a la esfera variable; ademas, esta traza debe ser perpendicular a B'A, porque en esta última recta es donde se proyecta el radio (AM, AM') tirado al punto de contacto de este plano tanjente.

492. Observemos ademas, que en las diversas posiciones A, A_6,.... que toma el punto de contacto del círculo móvil, la proyeccion AB' de este círculo, sobre los planos verticales correspondientes OA, OA_6,.... tendrá siempre la misma magnitud y la misma inclinacion : de modo que para todos estos planos, el tríángulo rectángulo AB'X permanecerá de magnitud invariable, y por consiguiente, las trazas XB' de los diversos planos tanjentes a las esferas variables, irán todos a encontrar a la vertical OS' en el mismo punto Z'. De aquí resulta que si tuviésemos que considerar un cono cuya cúspide se hallase en Z', y que tuviese por base a la epicicloide esférica, todos los planos, como el Z'XQ, le serian tanjentes, porque cada uno de ellos contendria a la cúspide y a una tanjente de la base. Ademas, todos estos planos tanjentes vendrian a pasar subcesivamente por la recta fija Z'X, cuando el cono *epicicloidal*, jirando al rededor de OZ', condujese a M los diversos puntos N, G, N''',... De esta propiedad se hace uso en los engargantes cónicos que sirven para hacer mover las *ruedas que forman ángulo*: véase el núm. 883 (*).

(*) *Indaguemos las equaciones que determinan a la epicicloide esférica* (fig. 100), *refiriendo esta curba a los tres ejes rectangulares* OX',

FIG. 101. 493. **Voluta esférica.** Cuando el cono móvil tiene tal abertura que el ángulo del centro ASB (*fig.* 99) llega a ser igual a 180°, este cono se reduce a un círculo cuyo radio es igual al apotema SA del cono

---

OY' *y* OZ', *de los cuales el primero pasa por el punto de retroceso. Si hacemos a*

$$OS'=h,\ OA=R,\ C'A=R' \text{ y ángulo } B'Ab=\omega,$$

manifiestamente tendremos que

$$(1)\ \ldots\ldots x'^2+y'^2+z^2-2zh=R^2$$

será la equacion de la esfera constante, sobre la cual está situada toda la epicicloide, de modo que esta curba estará completamente definida, uniendo a la equacion precedente la de su proyeccion horizontal DMGF. *Pero si llamamos* α *al ángulo* DOA, *concluirémos de aquí que*

$$R\alpha=AD=Am;\ \text{y de aquí, ángulo } Acm=\frac{R\alpha}{R'};$$

y entónces tendremos por valor de las coordenadas del punto M *referidas a los ejes* OX *y* OY

$$x=OA+AH=R+\left(R'-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)\cos\alpha,$$

$$y=-MH=-R'\,sen\frac{R\alpha}{R'}.$$

Pero para pasar de estos ejes, que serian móviles a una con el punto de contacto A, *a los ejes fijos* OX' y OY', *es preciso emplear las fórmulas conocidas*

$$x'=x\cos\alpha-y\,sen\,\alpha,\ e\ y'=x\,sen\,\alpha+y\cos\alpha;$$

luego, sustituyendo aquí los valores precedentes de x *e* y, *nos resultará*

$$(2)\ \ldots\ldots x'=(R+R'\cos\omega)\cos\alpha-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\cos\alpha+R'\,sen\frac{R\alpha}{R'}\,sen\,\alpha,$$

$$(3)\ \ldots\ldots y'=(R+R'\cos\omega)\,sen\,\alpha-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\cos\omega\,sen\,\alpha-R'\,sen\frac{R\alpha}{R'}\cos\alpha,$$

solo quedaria ahora que eliminar al arco α *entre estas dos equaciones, para hallar la de la curba* DMGF *sobre el plano horizontal; pero como esta eliminacion no podria efectuarse sino cuando se hubiese fijado nú-*

fijo, su plano es tanjente a este último cono; en este caso particular, la epicicloide que entónces describe un punto M del círculo móvil, recibe el nombre de *voluta esférica*, en virtud de que entónces la cuestion vie-

---

mericamente la razon de los radios R *y* R', *y esta razon fuese un número comensurable; conservarémos las equaciones* (2) *y* (3), *que serán suficientes para calcular las coordonadas* x *e* y *de los diversos puntos, atribuyendo subcesivamente a* α *diferentes valores.*

Para pasar de aqui a la epicicloide plana, bastará hacer a $\cos\omega = \pm 1$, *segun ruede el círculo móvil dentro o fuera del circulo fijo; y si contrayéndonos a este último caso, suponemos ademas que* R' *es la cuarta parte de* R, *como en la* fig. 5 *de la lámina* 45, *las equaciones* (2) *y* (3) *se convertirán en*

$$(4) \ldots\ldots x' = \tfrac{3}{4} R \cos\alpha + \tfrac{1}{4} R \cos\alpha \cos 4\alpha + \tfrac{1}{4} R \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} 4\alpha$$
$$(5) \ldots\ldots y' = \tfrac{3}{4} R \operatorname{sen}\alpha + \tfrac{1}{4} R \operatorname{sen}\alpha \cos 4\alpha - \tfrac{1}{4} R \cos\alpha \operatorname{sen} 4\alpha;$$

si en seguida sustituimos en estas últimas, los valores conocidos

$$\cos 4\alpha = 1 - 8 \operatorname{sen}^2\alpha \cos^2\alpha \quad y \quad \operatorname{sen} 4\alpha = 4 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha\,(\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha),$$

hallarémos, suprimiendo los acentos que ahora son inútiles,

$$x = R \cos^3\alpha \quad e \quad y = R \operatorname{sen}^3\alpha.$$

Ahora es fácil la eliminacion de α; *porque sumando estas equaciones despues de haberlas elevado a la potencia* $\frac{2}{3}$, *resultará para la epicicloide representada en la* fig. 5 *de la lámina* 45,

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Por consiguiente, este es un caso particular de la evoluta de la elipse que tiene por equacion a

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1;$$

estas dos curbas pertenecen a la familia de las estoroides, *que en jeneral están representadas por*

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{m} + \left(\frac{y}{A}\right)^{m} = 1.$$

ne a decir sencillamente que se hace rodar sobre un cono fijo S'AO a uno de sus planos tanjentes S'AV, como en la *fig.* 9 de la lámina 45, hemos obtenido la espiral *voluta del círculo* haciendo rodar sobre esta circunferencia a una de sus tanjentes.

FIG. 101. 494. Como la curba de que tratamos está toda ella sobre la esfera del radio S'A, será suficiente construir su proyeccion horizontal. Al efecto, abatamos el círculo móvil cuyo centro está en la cúspide (S', O), al rededor de la tanjente AV que le es comun con el círculo fijo; y sobre este abatimiento S" tomemos un arco A*m* igual al arco AD, si adoptamos a D por oríjen de la voluta, es decir, por la posicion que ocupará el punto jenerador cuando se halle en contacto con el cono fijo. En este caso, el punto *m* será el abatimiento de este punto jenerador cuando el contacto ha llegado a A, y su verdadera posicion (M, M') se deducirá fácilmente de aquí, levantando el círculo S" al plano tanjente S'AV, moviéndolo al rededor de la charnela AV.

Cuando el círculo móvil haya rodado hasta tocar al círculo fijo en A, concebiremos que todo el sistema jira simultáneamente, sin rodar, al rededor de la vertical S'O, para traer al radio OA_5 a la línea de tierra OA; tomando entónces el arco $An=DA_5$, el punto jenerador cstará abatido en *n*, y proyectado en N y N': pero en seguida, para referir el círculo móvil a su verdadera posicion, describirémos con el radio ON una circunferencia sobre la que tomarémos el arco $NN_5=II_5$. Y así hallarémos la curba DMN_5.... por proyeccion horizontal de la voluta esférica.

495. *La tanjente* a un punto cualquiera (M, M') deberá tirarse perpendicular al plano de las dos normales de que hemos hablado en el núm. 488, que son las rectas que unen al punto jenerador (M, M') con el centro (O, S') y con el punto actual de contacto A. Pero este *plano normal*, coincide manifiestamente con el plano S'AV en que está situado el círculo móvil que es tanjente al cono fijo; luego bastará tirar MT perpendicular a AV, y M'T' tambien perpendicular a SA.

496. Debemos conocer que la rama DMPGQF, que quedará descrita al cabo de una revolucion entera del círculo móvil, ocupará en la base del cono un arco DAGF igual al exeso de la circunferencia S" sobre la circunferencia O: pero, ademas, es preciso observar que esta rama se compondrá de dos partes reunidas por un retroceso en el punto G medio de DGF, que es la proyeccion de la posicion mas elevada

del punto jenerador. Para esplicar los motivos de esta circunstancia, es suficiente nos figuremos, que se ha prolongado la napa superior del cono S'AE, hasta que esté terminada por un círculo igual al del radio OA, y observemos que el círculo móvil S" se halla en un plano variable que a un mismo tiempo toca a las dos napas del cono, segun una jeneratriz igual al diámetro de este círculo S"; de donde resulta, que miéntras un arco determinado A*m* de la circunferencia móvil, rueda sobre la base inferior del cono, el arco diametralmente opuesto rueda al mismo tiempo sobre la base superior; y por consiguiente, cuando el punto jenerador *m* ha llegado al médio de su curso, se halla en contacto con esta base superior, y produce allí un retroceso enteramente idéntico con el que habia tenido lugar en el punto de partida D de la base inferior del cono. En cuanto a las otras líneas que contiene este depurado, hablarémos en el núm. 669.

CAPITULO III.

Sobre las esferas y las pirámides.

497. *Hallar la interseccion de dos esferas dadas.* Adoptemos por FIG. 102. plano horizontal al que contiene los centros A, B, C, de las esferas propuestas, y describamos los círculos máximos que son las trazas horizontales de estas superficies. En cuyo caso, el círculo vertical proyectado sobre DE, será evidentemente la interseccion de las dos esferas A y B, en tanto que las esferas A y C se cortarán segun otro círculo vertical FG; por consiguiente, estas dos circunferencias tendrán por interseccion a los dos puntos proyectados horizontalmente en M, y aquí tambien se hallarán los únicos puntos comunes a las tres esferas de que tratamos. Para acabar de fijar la posicion de estos puntos en el espacio, los proyectarémos sobre un plano vertical cualquiera XY; abatiendo al círculo

DE al rededor de su diámetro horizontal, y tirando la ordenada M*m*, esta recta medirá evidentemente la altura de uno de los puntos que buscamos sobre el plano horiontal; luego, tomando en cima y debajo de XY, las distancias IM' e IM" iguales a M*m*, hallarémos las proyecciones (M, M') y (M, M") de los dos puntos pedidos.

498. Si hubiésemos indagado la interseccion de las dos esferas B y C hubiéramos obtenido un círculo vertical cuya proyeccion HK necesariamente hubiera debido pasar tambien por el punto M; y de aquí podemos concluir este teorema de jeometría plana : *cuando tres circunferencias trazadas sobre un mismo plano, se cortan de dos en dos, los puntos de seccion correspondientes están situados sobre cuerdas que las tres pasan por un mismo punto del plano.*

FIG. 102. 499. *Construir una pirámide triangular cuando se conoce la magnitud de sus seis aristas.* Trazarémos, en primer lugar, sobre el plano horizontal, una de las caras ABC de la pirámide, empleando para ejecutarlo las tres aristas dadas que componen esta cara; en seguida, determinarémos la cuarta cúspide (M, M') indagando, como en el problema precedente, la interseccion de tres esferas que tengan por centros a los puntos A, B y C, y por radios las lonjitudes de las otras tres aristas señaladas por la cuestion. Evidentemente habrán dos pirámides simétricas una de otra, porque la última cúspide puede estar colocada en (M, M') o en (M, M"); y ademas, hallarémos por los métodos del libro I todo cnanto puede interesarnos conocer respecto a los ángulos planos, a los ángulos diedros &a. de cada una de estas pirámides.

FIG. 103. 500. *Circunscribir una esfera a una pirámide triangular dada.* Sean (A, A'), (B, B'), (C, C') y (S, S') las proyecciones de las cuatro cúspides, sobre dos planos rectangulares, uno de los cuales contiene a la cara ABC; si estas proyecciones no se nos diesen inmediatamente, las determinaríamos como en el problema precedente. Y como el centro de la esfera que buscamos debe hallarse a igual distancia de las cuatro cúspides, se hallará a la vez en dos de los planos verticales FO y GO, tirados perpendicularmente por medio de las aristas AB y AC; luego este centro se hallará en algun punto de la vertical (O, I'O') que es la interseccion de estos planos. Así mismo, debe estar contenido en el plano tirado perpendicularmente por el medio de otra tercer arista perteneciente a otra *cara*, tal como (SA, S'A'); luego, si nos tomamos el trabajo de construir

las trazas de este plano, así como tambien el punto en que va a cortar a la vertical (O, I'O'), obtendremos el centro pedido; pero como estas últimas operaciones son un poco largas, á no ser que hayamos tenido cuidado de elejir el plano vertical paralelo á la arista (SA, S'A'), podremos reemplazarlas con la construccion siguiente.

Trazando con el radio OB, el círculo circunscrito al triángulo ABC; esta circunferencia, que pertenecerá a la esfera pedida, estará cortada por el plano vertical SD paralelo a la línea de tierra, en un punto (D, D'); luego la recta (SD, S'D') será *una cuerda* de la esfera, *paralela al plano vertical*, y en virtud de esto, el centro de esta esfera deberá estar situado en el plano KL' levantado perpendicularmente en medio de esta cuerda. Y como este plano va á cortar a la vertical (O, I'O') en el punto (O, O'), síguese que aquí es donde se halla el centro de la esfera de que tratamos.

En cuanto al radio de esta esfera, que manifiestamente es (OB, O'B'), hallarémos su verdadera lonjitud, abatiéndole paralelamente al plano vertical segun (O*b*, O'*b*'); luego, si desde los puntos O y O', y con un radio igual a O'*b*', describimos dos círculos, estos serán los contornos aparentes de la efera pedida, que de este modo queda completamente determinada en magnitud y posicion.

501. *Inscribir una esfera en una pirámide triangular dada.* Tome- FIG. 104.
mos tambien el plano de una de las caras ABC por plano horizontal, y sea (S, S') la cúspide situada fuera de este plano. Si tiramos por la arista AB un plano que divida en dos partes iguales al ángulo diedro formado por las caras SAB y CAB, este plano *bisector* evidentemente contendrá a todos los puntos del espacio que se hallan a igual distancia de estas dos caras; luego la esfera pedida que debe tocar a cada una de estas, tendrá su centro situado precisamente en este plano bisector. Así mismo, otros dos planos bisectores tirados segun las aristas AC y BC, de modo que dividan en dos partes iguales a los ángulos diedros que tienen a estas rectas por aristas, contendrán tambien al centro que buscamos; por consiguiente, este centro se halla en la interseccion de estos tres planos bisectores, es decir, en la cúspide de la *pirámide interior* que forman con la base primitiva ABC; así es que la cuestion está reducida a hallar la cúspide de esta nueva pirámide, o sino las tres aristas que terminan en ella.

Para esto, midamos primeramente el ángulo diedro SABC, cortándole con un plano vertical SD perpendicular a AB, y apliquemos sobre el plano vertical la seccion dada de este modo, que evidentemente será el ángulo S'D"H; construyamos del mismo modo los ángulos S'E"H y S'F"H que miden a los ángulos diedros AC y BC; en seguida, dividamos a cada uno de estos tres ángulos planos por mitad, por medio de las rectas D"I, E"L y F"'K; estas tres rectas, referidas a los planos verticales SD, SE, y SF, pertenecerán a las caras de la pirámide interior que tiene tambien por base al triángulo ABC. Por consiguiente, si cortamos a estas rectas con un plano horizontal cualquiera X'Y', obtendrémos tres puntos δ'', ε'', φ''. que referidos a δ, ε, φ, pertenecerán a la seccion triangular *abc* dada por el plano X'Y' a la pirámide interior; este triángulo *abc* es fácil de trazar, porque sus tres lados evidentemente deben ser paralelos a los de ABC. Si hecho esto tiramos las rectas A*a*, B*b* y C*c*, estas serán las aristas laterales de la pirámide interior, y deberán ir a cortarse en un solo punto O, que será la proyeccion horizontal del centro de la esfera pedida.

En cuanto a la proyeccion vertical O' de este mismo centro, la obtendrémos proyectando el punto O sobre la arista C'*c*' de la pirámide interior; y el radio de la esfera será la perpendicular O'R' bajada desde el centro a la cara inferior. Luego, trazando con esta recta O'R' dos círculos cuyos centros estén en O y O', tendremos las proyecciones de la esfera que buscamos.

502. Si deseamos conocer los puntos de contacto de esta esfera con las caras laterales, podremos construir con facilidad las trazas del plano indefinido que contiene a la cara SAC, por ejemplo; en seguida, bajarémos desde el punto (O, O') una perpendicular a este plano, por el método jeneral del núm. 85. Pero será mucho mas corto observar que un plano perpendiculor a AC, y tirado por el punto O, cortará a la esfera y a la superficie SAC, segun un círculo máximo y una recta que será tanjente a este; ademas, aplicada esta recta al plano vertical, moviéndola al redenor de (O, O'R'), evidentemente será paralela S'E". Luego, si sin trazar esta paralela, bajamos desde el punto O' un radio perpendicular a S'E", este radio irá a cortar al contorno vertical de la esfera, en un punto que será el abatimiento del punto de contacto que

buscamos; y en seguida será fácil el traer este punto a su verdadera posicion.

503. Las consideraciones que hemos empleado en el núm. 501 nos pueden servir para resolver este problema jeneral: *hallar una esfera que sea tanjente a cuatro planos dados.* Con efecto, despues de haber prolongado indefinidamente las cuatro caras de la pirámide SABC, formarán al rededor de las aristas AB, AC y BC, tres ángulos diedros *esteriores* suplementarios de los que hemos empleado arriba, y estos nuevos ángulos tendrán por medida a S'D"B', S'E"C' y a S'F"C'. Luego, si dividimos a estos últimos en dos partes iguales, por medio de rectas que corten al plano X'Y' en puntos análogos a δ'', ε'' y φ'', podremos combinar de tres en tres estos varios puntos, para formar con ellos varios triángulos, como el *abc*; y estos nos darán a conocer diversos centros, como el (O, O'). Por ejemplo, adoptemos la recta D"*d*" que divide por medio al ángulo *esterior* S'D"B', y que encuentra al plano X'Y' en el punto *d*" que referirémos a *d* sobre el plano horizontal; conservemos en seguida los dos puntos antiguos ε y φ, y hallarémos el triángulo *ca"b"*, cuyos vértices unidos con A, B y C, nos darán a (O", O"') por centro de una esfera que tocará a la cara SAB *fuera* de la pirámide primitiva, y que será siempre tanjente a las otras tres caras prolongadas a la derecha de SAB. Por este mismo medio hallarémos jeneralmente *ocho* esferas tanjentes a los cuatro planos indefinidos que contienen a las caras de la pirámide SABC; porque representando por α, α', α'' los tres ángulos diedros *interiores*, y por ω, ω' y ω'' los tres ángulos diedros *esteriores*, que tienen por aristas a los lados AB, AC y BC, podremos evidentemente adoptar por centro de la esfera pedida, al punto de interseccion de los tres *planos bisectores* que dividan a los ángulos diedros comprehendidos en cada una de las combinaciones siguientes.

FIG. 104.

$$\alpha, \alpha', \alpha'' \left| \begin{array}{l} \alpha, \alpha', \omega'' \\ \alpha, \alpha'', \omega' \\ \alpha', \alpha'', \omega \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha, \omega', \omega'' \\ \alpha', \omega, \omega'' \\ \alpha'', \omega, \omega' \end{array} \left| \omega, \omega', \omega''. \right.$$

Con mucha facilidad percibirémos la razon, porque es preciso excluir toda combinacion en que entren dos ángulos adyacentes a la misma arista, como α y ω; el número de estas soluciones podrá ser menor,

segun sean las inclinaciones de los cuatro planos dados. Esta cuestion es análoga al problema de jeometría plana, en que nos proponemos hallar un círculo que sea tanjente a tres rectas conocidas.

504. *Construir un punto cuando se conocen sus distancias a otros tres puntos dadas*, o *a tres planos conocidas*, o finalmente *a tres rectas dadas*.

1.° Representemos por A, B y C los puntos dados, y sus distancias respectivas, al punto desconocido x, por α, β y γ. Si ahora concebimos una esfera que tenga su centro en A, y por radio la distancia α, el punto x deberá hallarse evidentemente en alguno de los puntos de la superficie de esta esfera; así mismo se hallará tambien sobre la superficie de otras dos esferas que tengan sus centros en B y C, y cuyos radios sean las lonjitudes β y γ; por consiguiente la cuestion viene a reducirse a hallar *la interseccion de tres esferas dadas*, cuyo problema hemos resuelto en el núm. 497.

2.° Si ahora representamos por P, P' y P" los planos dados, y por δ, δ' y δ'' sus distancias al punto desconocido x, este deberá hallarse a un mismo tiempo en tres planos p, p' y p'' respectivamente paralelos a P, P' y P" y distantes de estos las cantidades iguales a δ, δ' y δ''. Luego, construyendo los planos p, p' y p'' segun los métodos del libro VI, se reducirá la cuestion a hallar la interseccion de tres planos conocidos, cuyo problema sabrá el lector resolver fácilmente. Solo observemos que, como el plano p, por ejemplo, puede tirarse a la distancia δ, ya sea encima o ya debajo del P, habrá tambien *ocho soluciones* para la posicion del punto pedido x.

3.° Finalmente sean A, B y C tres rectas dadas, de las que el punto incógnito x diste las cantidades α, β, y γ. Si nos figuramos un cilindro de revolucion que tenga por eje a la línea A, y por *seccion recta* a un círculo cuyo radio sea α, esta superficie cilíndrica contendrá precisamente al punto x. Este punto se hallará así mismo sobre otros dos cilindros de revolucion, que tengan por ejes y por radios a B y β, y a C y γ; por consiguiente, la cuestion queda reducida a hallar todos los puntos comunes a estos tres cilindros. Y suponiendo que las trazas hohorizontales de estas tres superficies se han construido segun vamos a esplicar aquí abajo, no habrá mas que buscar, por el método del núm. 288, la curba de interseccion del cilindro A con el B, y en seguida la

de los cilindros A y C; y estas dos curbas que podrán cortarse a lo mas en *ocho* puntos, en razon a que las tres superficies son evidentemente de segundo grado, nos darán a conocer por sus encuentros las diversas posiciones que puede tener el punto pedido x. Con todo, observemos que para obtener los puntos verdaderamente comunes en el espacio a las dos curbas, no deberemos tomar, entre las secciones de las dos proyecciones horizontales, sino los puntos que exactamente correspondan á secciones sobre el plano vertical; es decir, que estos puntos deberán estar situados de dos en dos sobre perpendiculares a la línea de tierra. Podremos ademas construir, como para comprobacion, la curba de interseccion de los cilindros B y C, que deberá tambien pasar por los puntos comunes a las dos primeras curbas.

505. En cuanto al modo de hallar la traza horizontal de cada cilindro, representemos sobre dos planos de proyeccion el eje de uno de ellos por (AF, A'F'). Haciendo jirar esta recta al rededor de la vertical A, para abatirla paralelamente á este mismo plano, se convertirá en (Af, A'f'); y entónces la seccion circular del cilindro se proyectará segun una recta G'H' igual a 2α y perpendicular a A'f'. Luego el contorno aparente del cilindro nos le darán las rectas G'K' y H'L', paralelas a A'f', y la traza horizontal de esta superficie, en la actual posicion, será una elipse que tendrá evidentemente por eje mayor a la distancia L'K'. Por consiguiente, si restituimos los puntos K' y L' a a y d, la recta ad y su perpendicular bAc=2α, serán los ejes de la elipse, segun la que el cilindro primitivo corta al plano horizontal; de modo que ahora será fácil construir esta curba: FIG. 105.

506. *Recorriendo un injeniero (*) un pais montañoso, va provisto de un mapa topográfico en el cual están señaladas exactamente las proyecciones de los diversos puntos del terreno y tambien las acotaciones que indican las alturas de estos puntos sobre una misma superficie de nivel. Encuentra un punto notable que no está representado en el mapa, y no tiene consigo otro instrumento acomodado a medir los ángulos que un*

(*) *Este artículo y el siguiente, están estractados de la Jeometría descriptiva de* Monge.

grafómetro provisto de un hilo de aplomo. Y se le pide que sin separarse, de la estacion, construya en la carta el punto en que se halla, y que determine la acotacion que corresponde a este punto, es decir, su altura sobre la superficie de nivel.

"Entre los puntos del terreno marcados de un modo exacto en el mapa, y que están mas próximos, señalará el injeniero tres, dos de los cuales, a lo ménos, no estén a la misma altura que él, en seguida observará los ángulos formados por la vertical y los rayos visuales dirijidos a estos tres puntos, y en virtud de esta sola observacion, podrá resolver la cuestion.

"Con efecto, llamemos A, B y C, a los tres puntos observados cuyas proyecciones horizontales están marcadas en el mapa, sus proyecciones verticales las podrá tambien construir por medio de las acotaciones respectivas. Supuesto que conoce el ángulo formado por la vertical y el rayo visual dirijido al punto A, conocerá tambien el ángulo formado por el mismo rayo con la vertical levantada en el punto A; porque despreciando la curbatura de la tierra, que es en el caso presente conveniente, estos dos ángulos serán alternos internos, y por consiguiente, iguales. Luego, como conoce una superficie cónica, de base circular, cuya cúspide está en el punto A, su eje es vertical, y el ángulo formado por este eje y la recta jeneratriz igual al ángulo observado, lo que completamente determina a la superficie, esta precisamente pasará por el rayo visual dirijido al punto A, y por consiguiente por el punto de la estacion; de este modo tendrá determinada la primer superficie curba, sobre que se halla el punto pedido. Haciendo el mismo raciocinio respecto a los otros dos puntos B y C, concluirá que el punto pedido se halla tambien sobre otras dos superficies cónicas de bases circulares, cuyos ejes son verticales, y sus cúspides se hallan en los puntos B y C, y que en cada una de ellas el ángulo formado por el eje con la jeneratriz, es igual al ángulo formado por la vertical con el rayo visual correspondiente. Segun esto, el punto pedido se hallará al mismo tiempo sobre tres superficies cónicas, determinadas de forma y de posicion, y por consiguiente estará en su interseccion comun. En este caso no hai mas que construir, segnn los datos de la cuestion, las proyecciones horizontales y verticales de las intersecciones de estas tres superficies, consideradas de dos en dos

(*); las intersecciones de estas proyecciones nos darán las proyecciones horizontal y vertical del punto pedido; y por consiguiente, la posicion de este pnnto en el mapa, y su altura encima o debajo de los puntos observados, lo cual determinará su acotacion.

" Esta solucion debe producir, en jeneral, ocho puntos que cumplan con la cuestion, pero le será fácil al observador el distinguir entre estos ocho puntos, el que coincide con el punto de la estacion. Pero desde luego podrá cerciorarse si el punto de la estacion se halla encima o debajo del plano que pasa por los tres puntos observados; supongamos que este punto esté encima del plano de la cúspide de los conos; en este caso, estará autorizado para despreciar las ramas de la interseccion de las superficies cónicas que existen debajo de este plano, y en virtud de esto, el número de puntos visibles quedará reducido a cuatro; esto mismo sucederia si por el contrario el punto de la estacion estuviese colocado debajo del plano. En seguida, entre estos cuatro puntos, si acaso existen todos, encontrará con facilidad el que tiene la misma posicion respecto a las otras tres cúspides, que la del punto de la estacion, con relacion a los puntos observados."

507. *Siendo las mismas las circunstancias que en la cuestion precedente, con la sola diferencia de que el instrumento no está provisto de hilo de aplomo, de modo que no pueden medirse los ángulos con la vertical, se pide aun al injeniero, que sin separarse de la estacion, fije sobre el mapa la posicion del punto en que se halla, y que determine la acotacion de este punto, es decir, su elevacion sobre la superficie de nivel a que están referidos todos los puntos del mapa.*

" Despues de haber elejido tres puntos del terreno que estén espresados de un modo exacto en el mapa, y que se hallen situados de modo que el punto de estacion no esté en el mismo plano con ellos, medirá el injeniero los tres ángulos que forman entre sí los rayos visuales dirijidos

---

(*) *La interseccion de dos de estos conos se construirá por el método del núm.* 297; *y mejor aun, cortándolos con diversos planos horizontales, porque las secciones serán círculos, cuyos centros se proyectarán en el mismo punto que la cúspide, y sus radios estarán de manifiesto en el plano vertical.*

a estos tres puntos; y por medio de esta sola observacion, estará en estado de resolver la cuestion.

"Con efecto, si llamamos A, B, y C a los tres puntos observados, y si los unimos por las tres rectas AB, BC y CA, el injeniero tendrá las proyecciones horizontales de estas rectas trazadas en el mapa; y ademas, por medio de las acotaciones de los tres puntos, conocerá las diferencias de las alturas de las estremidades de estas rectas, y por consiguiente, podrá determinar la magnitud de cada una de ellas.

"Sentado esto, si en un plano cualquiera tirado por AB, conocemos un triángulo rectángulo BAD construido sobre AB como base, y cuyo ángulo en B sea el complemento del ángulo bajo el cual se ha observado el lado AB, el á[illegible]ual al ángulo observado, y la circunferencia de círcu[illegible] tres puntos A, B y D, gozará de la propiedad, de[illegible]niera de los puntos del arco ADB tiramos dos re[illegible] el ángulo que estas comprehendan entre sí se[illegible]ado. Por consiguiente, si concebimos que el [illegible]ededor de AB como charnela, el arco ADB enjendra[illegible] revolucion cuyos puntos todos gozarán de la misma [illegible]cir, que si desde un punto cualquiera de esta superficie, [illegible] rectas a los puntos A y B, estas rectas formarán entre sí [illegible]ual al ángulo observado. Pero es evidente que los puntos de esta superficie de revolucion son los únicos que gozan de esta propiedad; luego la superficie pasará por el punto de la estacion. Si raciocinamos del mismo modo respecto a las otras dos rectas BC y CA, tendremos otras dos superficies de revolucion, sobre cada una de las que se hallará el punto de la estacion; por consiguiente, este punto estará a un mismo tiempo sobre tres superficies de revolucion, de forma y posicion determinada, y en virtud de esto será un punto de su comun interseccion. Así es, que construyendo las proyecciones horizontales y verticales de las intersecciones de estas tres superficies consideradas de dos en dos, los puntos en que las mismas tres proyecciones se corten, serán las proyecciones del punto que cumple con la cuestion.

506. Verdad es que, si para efectuar estas construcciones por el método del núm. 338, adoptamos el plano del triángulo ABC por plano horizontal del depurado, y dirijimos el plano vertical perpendicular a uno

de los lados, al AB por ejemplo, no hallarémos de este modo sino la proyeccion del punto pedido sobre el plano ABC y su altura encima o debajo de este plano; pero como este último tiene una posicion conocida respecto a la superficie de nivel a que están referidos todos los puntos del mapa, será mui fácil hallar en seguida la proyeccion de la estacion sobre el plano mismo del mapa, y su altura encima de este plano.

509. Observemos tambien que si quisiéramos resolver esta problema analíticamente, combinando para ello las equaciones de las tres superficies de revolucion descritas por los arcos ADB, BEC y CFA, hallaríamos muchas soluciones que serian ajenas de la cuestion; porque el análisis no separaria la napa descrita por el arco ADB, de la que describe el arco A*d*B; sino que una sola equacion abrazaria a la vez a estas dos napas. Sin embargo, ya que por la observacion conocemos, en el caso presente, los ángulos comprehendidos entre los rayos visuales sentimos mui bien que no nos es permitido adoptar indiferentemente al ángulo ADB, o a su suplemento A*d*B. Por consiguiente, en las operaciones gráficas, debemos despreciar enteramente las ramas de las curbas y los puntos que nos den las napas *suplementarias*, enjendradas por la revolucion de los tres arcos A*d*B, A*e*C y A*f*C.

LIBRO VII.

DE LAS SUPERFICIES GAUSAS.

CAPITULO PRIMERO.

Nociones jenerales sobre las superficies gausas.

510. A todas las superficies que pueden ser enjendradas por el movimiento de una línea recta, se les da en jeneral el nombre de SUPERFICIES REGLADAS, porque evidentemente podremos ejecutarlas sobre un cuerpo sólido, por medio de una *regla*, cuya ventaja hace que su uso sea mui frecuente en las artes; pero debemos dividirlas en dos clases mui distintas segun la lei que dirije el movimiento de la jeneratriz rectilínea, cumple o no con la coudicion de que dos posiciones consecutivas de la recta móvil estén situadas en un mismo plano. Cuando esta condicion queda satisfecha, la superficie reglada es *desarrollable*, y un mismo plano la toca en todo el largo de una jeneratriz, como lo hemos probado en los números 175 y 177. Y como todo lo que dice relacion a la determinacion del plano tanjente, a la construccion de las jeneratrices y al desarrollo de esta clase de superficies, lo hemos esplicado ya en los libros precedentes, y con especialidad en el ejemplo jeneral del núm. 465, no tratarémos ya de estas cuestiones; y solo nos ocupamos aquí en las SUPERFCIES GAUSAS, es decir, en las superficies *enjendradas por una recta que se mueve de modo que dos posiciones consecutivas*, por mas próximas que las supongamos, *no están situadas en un mismo plano.*

511. Antes de indicar los diversos modos de realizar la condicion precedente, haremos observar que siempre resulta, que *el elemento superficial* indefinido en lonjitud y comprehendido entre dos jeneratrices infinitamente próximas G y G', es tambien *gauso*; porque respecto a todas las curbas A, B, C,.... que se tracen sobre la superficie, los elementos lineales LL', MM', NN',.... que son rectas que tienen cada una dos puntos comunes con G y G', no podrán estar situados en un mismo plano, supuesto que estas rectas no lo están. Ademas, como las tanjentes LL'T, MM'U, NN'V,.... que son las prolongaciones de estos elementos lineales, estarán, segun lo espuesto, en planos diferentes, precisamente sucederá que *los planos tanjentes* GLT, GMU, GNV,.... *relativos a los diversos puntos* L, M, N.... *de una misma jeneratriz, serán distintos unos de otros*, aun cuando todos contengan a la jeneratriz GLMN.

512. De aquí resulta tambien que, en una superficie gausa, cada plano, tal como GLT, aunque es verdaderamente *tanjente* en L, es decir, que contiene las tanjentes a todas las curbas trazadas sobre la superficie y que pasan por este punto, llega a ser *secante* en todos los demas puntos que tiene comunes con ella; y su interseccion se compone, en primer lugar, de la misma jeneratriz GLM, y de otra segunda rama que pasa por el punto L, que puede ser *rectilinea* o *curbilinea*, segun sea la forma de la superficie gausa de que tratemos.

513. Veamos ahora de qué modo podemos realizar la condicion (núm. 510) que caracteriza a las superficies gausas. Si sujetamos a la recta móvil a que solo resbale sobre *una*, o tambien sobre *dos curbas directrices* A y B invariables de forma y de posicion, no quedará completamente determinado el movimiento de esta recta; porque en cada punto L elejido arbitrariamente en A, podrá la jeneratriz rectilínea tomar una infinidad de posiciones, situadas todas sobre el cono que tuviese por base a B y por cúspide al punto L. Por consiguiente, no son suficientes dos curbas para dirijir el movimiento de una recta; a no ser que ademas se imponga la condicion de que la superficie enjendrada sea *desarrollable*, como lo hemos visto núm. 180; pero cabalmente esta condicion es la misma de que queremos prescindir aquí.

Por consiguiente, sujetemos la recta móvil a resbalar constantemente sobre tres curbas directrices A, B y C, y vamos a ver que estas condiciones son suficientes para arreglar completamente el movimiento de

esta jeneratriz. Con efecto, si nos figuramos dos conos que tengan por cúspide comun al punto L tomado arbitrariamente sobre A, y por bases el uno a la directriz A y el otro a la C, podremos con suma facilidad construir las trazas de estas superficies cónicas sobre uno de los planos de proyeccion; y uniendo los puntos de seccion de estas dos trazas con la cúspide comun L, obtendrémos una o mas rectas, pero siempre *finitas en número*, que así como la GLMN, se apoyarán evidentemente en las tres curbas A, B y C, supuesto que dichas rectas son las intersecciones de dos conos que pasan por B y por C. Por consiguiante, estas rectas serán las posiciones determinadas que debe tomar la jeneratriz móvil, cuando resbalando sobre A, llegue al punto L; respecto a otros puntos L', L",.... construirémos del mismo modo las posiciones de esta jeneratriz.

514. Ademas de esto, la superficie enjendrada de este modo, será en jeneral *gausa*; porque cuando la recta móvil pase de una posicion GLMN a otra G'L'M'N' infinitamente próxima, podrá considerarse como si hubiese jirado sobre las tres tanjentes LT, MU y NV, que tienen con las directrices los elementos comunes LL', MM' y NN'; luego, si estas tres tanjentes no están situadas en un solo y mismo plano, tampoco se hallarán en él las dos jeneratrices G y G'. Pero para que estas tanjentes se hallen en un mismo plano, y sobre todo para que esta misma circunstancia se reproduzca en cada sistema de puntos (L, M, N), (L', M', N'), (L", M", N"),.... situados de tres en tres en línea recta, es claro que se necesita hacer una eleccion particular en la forma y pocision de las directrices A, B y C; por consiguiente, en jeneral, *la superficie descrita por una recta móvil que se apoya constantemente en tres curbas fijas, es gausa.*

Pero una superficie de esta naturaleza puede presentar *una línea singular*, en cuya lonjitud exista un elemento *plano*, indefinido en lonjitud; esto es lo que sucederia en el caso en que respecto a cierto punto L, los dos conos de que acabamos de hablar en el número precedente, tuviesen sus trazas tanjentes una a otra. En este caso, la jeneratriz tirada de L a este punto de contacto, podria, sin separarse del punto L, resbalar sobre la tanjente comun a las dos trazas, y así describiria un elemento particular que sería plano. Esto es lo mismo que suponer que las dos tanjentes MU y NV están en un mismo plano, y con mayor razon

sería lo mismo, si las tres tanjentes en L, M, y N se hallasen en un solo plano.

515. Podemos tambien *sujetar a la recta móvil* G *a que resbale constantemente sobre dos curbas fijas* A *y* B, *permaneciendo siempre paralela a un plano dado* P que se llama *plano director*. Para construir en este caso las posiciones de la jeneratriz, es suficiente cortar a las curbas A y B (núm. 233) con varios planos paralelos a P; y uniendo, por medio de una recta, los dos puntos de seccion de cada plano, tendrémos las líneas GLM, G'L'M',.... que evidentemente satisfarán las condiciones impuestas a la jeneratriz. La superficie que es el lugar de todas estas rectas, será tambien en jeneral gausa, porque las tanjentes LL'T y MM'U, en que se apoya la recta G cuando pasa a la posicion infinitamente próxima G', no se hallarán de ordinario en un mismo plano. FIG. 108.

Por lo demas, este jénero de superficies gausas se comprehende en el precedente, cuando nos imajinamos que la tercera directriz C está situada al infinito, en el plano P.

516. En todas las superficies regladas, podremos reemplazar las curbas directrices por *superficies directrices* a las que deberá la recta móvil ser tanjente. Por ejemplo, si asignamos una curba A y una superficie S para dirijir a la jeneratriz, aúna con un plano P a que esta recta móvil deba permanecer paralela, deberémos tirar por cada punto L tomado sobre A, un plano paralelo a P, el cual cortará a la superficie S segun una curba a la que tirarémos tanjentes que salgan de L; estas serán las posiciones de la jeneratriz pedida, y la superficie reglada, producida de este modo, será en jeneral gausa. Ademas, *tocará* a S en toda la estension de la curba formada por los puntos de contacto α, β, γ,.... de las tanjentes de que acabamos de hablar; porque, así para la superficie gausa como para la S, el plano tanjente contendrá a la jeneratriz rectilínea y a la tanjente de la curba $\alpha\beta\gamma$, que es comun a las dos superficies.

Si se nos diesen dos superficies S y S' con un plano director P, cortaríamos a estas superficies con diversos planos paralelos a P, y tiraríamos una tanjente comun a las dos secciones producidas por cada uno de los planos secantes.

517. Cuando las superficies regladas no admiten *plano director*, podremos reemplazar una o mas de las tres curbas directrices A, B y C,

con superficies a que deba ser tanjente la jeneratriz. Con efecto, supongamos que señalemos para dirijir el movimiento de esta recta, a las curbas A y B con una superficie S; será preciso construir para cada punto L tomado sobre A, dos conos que tengan sus cúspides comunes en L, y uno de los cuales tenga por base a la curba B, en tanto que el otro esté circunscrito a la superficie S (núm. 347): las intersecciones de estos dos conos, que precisamente serán rectas, nos darán la posicion de la jeneratriz cuando pase por el punto L. Cuando la superficie S sea desarrollable, será mas corto tirarle un plano tanjente que corte a las dos curbas A y B en puntos que reunirémos por medio de una recta, esta será una posicion de la jeneratriz.

Si se nos da una sola curba A con dos superficies directrices S y S', será preciso combinar a un tiempo dos conos circunscritos uno a S y el otro a S' y cuya cúspide comun se halle en un punto L de la línea A.

518. Cuando solo se asignan tres superficies S, S' y S" a las que la recta móvil deba constantemente permanecer tanjente, será mucho mas trabajosa la construccion de las diversas posiciones de esta jeneratriz; pero llegarémos a conseguirlo refiriendo la cuestion a uno de los casos precedentes. Con efecto, si conocemos una recta G que toque a la superbie S en un punto determinado α, a S' en α', y a S" en α''; y hacemos en seguida resbalar esta línea $G\alpha\alpha'\alpha''$ sobre las dos superficies S y S', sujetándola ademas a permanecer paralela a un plano director P, obtendrémos, por el método del núm. 516, una superficie ausiliar Σ que cortará a S" segun cierta curba $\alpha''\beta''\gamma''$ que pasará por el punto α'', y a la que la recta G será precisamente tanjente en este punto, porque G se halla evidentemente en el plano tanjente de S", y en el que toca a la superficie gausa Σ en el punto α''. Por consiguiente, si principiamos por construir la superficie ausiliar Σ que tiene por directrices a S, S', y al plano P; y si en seguida determinamos su interseccion $\alpha''\beta''\gamma''$ con la superficie S", no habrá mas que tirar a la curba $\alpha''\beta''\gamma''$ una tanjente que sea paralela al plano P, y esta tanjente será la posicion de una jeneratriz G de la superficie pedida que tiene por directrices a S, S', y S". Para obtener otros puntos de esta jeneratriz, haremos variar la direccion del plano P.

519. Podemos tambien dirijir el movimiento de la recta que enjendra una superficie reglada, asignando dos curbas directrices A y B, con

la condicion de que *la jeneratriz corte a una de ellas bajo un ángulo constante* dado; o bien, que *la porcion de esta jeneratriz comprehendida entre* A y B, *conserve una lonjitud fija.* Podemos tambien hacer resbalar la recta móvil *al largo de una sola curba* A *trazada sobre una superficie fija* S, *a la que deberá la jeneratriz ser normal &a. &a.* Pero todas estas variedades de superficies regladas, para las que será fácil nos imajinemos un modo de construccion apropiada a las condiciones que imponga cada problema, no ofrecen un interes tal que motive las discutamos en detalle, y ademas, no forman en el fondo jénero verdaderamente distinto, puesto que siempre las podemos concebir relacionadas con las del núm. 513, adoptando por directrices de la recta móvil, a tres secciones dadas a discrecion en la superficie.

520. Para completar estas nociones jenerales, agregarémos que se da el nombre particular de CONOIDE a las superficies gausas que admiten un plano director P con dos directrices, *una de las que es rectilínea*: la otra directriz puede ser una curba o una superficie. Dirémos que el conoide es *recto*, cuando la directriz rectilínea sea perpendicular al plano P (*véase* núm. 596).

Cuando las dos directrices son rectas, el conoide toma el nombre de *paraboloide hiperbólico*, o de *conoide de segundo grado*, porque es el único cuya equacion no se eleva mas que a este grado.

Finalmente, cuando una superficie reglada que no admite plano director, tiene por directrices *a tres rectas* cualesquiera, toma el nombre de *hiperboloide de una napa;* este hiperboloide y el paraboloide de que acabamos de hablar, se designan tambien simultáneamente bajo el nombre de *superficies gausas de segundo grado*, porque el análisis nos enseña que son las únicas superficies de esta naturaleza, cuya equacion no se eleva sino hasta este órden. Vamos a principiar por considerar estos dos jéneros particulares, que presentan propiedades mui notables, y que necesitamos conocer para estudiar las otras superficies gausas.

CAPITULO II.

Del hiperboloide de una napa.

FIG. 109. 521. Llamamos así, a la superficie particular enjendrada por *una recta móvil* A *que constantemente se apoya sobre tres rectas fijas* B, B' *y* B" *que no son paralelas a un solo plano,* y de las que *dos cualesquiera de ellas no se hallan tampoco en un mismo plano*; porque mas adelante demostraremos (núm. 535) que esta superficie es idéntica con la que hemos designado ya bajo este nombre en el núm. 83. La construccion de las jeneratrices se efectuará por el procedimiento jeneral del núm. 513, que será ahora mui sencillo, porque las superficies cónicas ausiliares se reducirán a planos; y así despues de haber tomado un punto arbitrario L sobre la directriz B, tirarémos por este punto dos planos, uno de los cuales pase por B' y otro por B"; indagando en seguida la interseccion de estos dos planos, obtendrémos una recta ALMN que evidentemente se apoyará sobre las tres directrices señaladas. Hallaríamos el mismo resultado, construyendo la interseccion de la directriz B" con el único plano tirado por L y la recta B', y uniendo este punto de seccion con el punto L. Este mismo procedimiento aplicado subcesivamente a otros puntos L', L",.... de la recta B, nos daria las diversas jeneratrices A, A'; A", A"',... del hiperboloide de que tratamos; y como cada una no puede ocupar evidentemente sino una sola posicion cuando pasa por un punto dado L o L', síguese de aquí que el movimiento de la recta móvil queda *completamente determinado* por la condicion de apoyarse sobre las tres directrices asignadas.

522. Esta superficie es precisamente *gausa*; porque no podrán hallarse en un mismo plano dos jeneratrices cualesquiera A y A', sino cuando las rectas B, B', B", que cada una tiene dos puntos comunes con A y A', estén tambien situadas en este plano único; lo que es contrario a las condiciones formalmente impuestas en la definicion del núm. 521. Ademas, como este raciocinio no exije que las dos

rectas A y A', estén aquí infinitamente próximas, como se suponia para una superficie gausa jeneral (núm. 510), resulta que en el hiperboloide, *dos jeneratrices cualesquiera no están nunca en un mismo plano.*

523. Si entre las tres directrices B, B' y B", que suponemos no ser paralelas a un solo plano, hubiese *dos* que estuviesen *en un mismo plano* B'CB", no podria la recta móvil A cumplir con las condiciones impuestas, sino de los dos modos siguientes : 1.° pasando constantemente por el punto de seccion C y resbalando sobre B, lo que haria que describiese el plano CDB ; 2.° jirando en el plano B'CB", al rededor del punto D en que le encuentra la recta B. Y en ámbos modos la superficie descrita sería el sistema de *dos planos* que se cortasen. Pero esta variacion del hiperboloide, que es análoga al caso de una hipérbola reducida a sus asíntotas, no presenta ninguna indagacion nueva, y en adelante continuarémos excluyendo la hipótesis enteramente particular de que dos de las directrices se hallen en un mismo plano. FIG. 110.

524. El hiperboloide de una napa goza de una propiedad mui notable, e importante para la determinacion de los planos tanjentes a las superficies gausas jeneralas; esta es la de admitir otro segundo modo de jeneracion por mendio de la línea recta, en el cual las primeras jeneratrices se conviertan en directrices, y recíprocamente. Es decir que *si hacemos resbalar una recta móvil sobre tres cualesquiera de las rectas* A, A', A", A"',.... que acabamos de construir, *esta nueva jeneratriz*, que coincidirá evidentemente, en tres de sus posiciones, con B, B' y B", *describirá una superficie* IDENTICA *con el primer hiperboloide*, tanto en su forma cuanto en la posicion. Pero ántes de demostrar esta bella propiedad, recordarémos dos teoremas conocidos en la *teoría de las transversales.* FIG. 109.

525. LEMA I. Cuando en un triángulo ABC, se tira una transversal cualquiera PQR que, cortando a los tres lados o sus prolongaciones, forme seis segmentos, *el producto de tres segmentos que no estén contíguos es igual al producto de los otros tres*; es decir que tendremos que FIG. 111.

$$AP \,.\, CR \,.\, BQ = AQ \,.\, BR \,.\, CP \;\ldots\ldots\; (x)$$

Con efecto, tiremos la recta BH paralela a PQR, y evidentemente tendremos las proporciones siguientes :

$$AQ : QB :: AP : PH = \frac{AP \,.\, QB}{AQ},$$

$$CR : BR :: CP : PH = \frac{CP \,.\, BR}{CR};$$

y en seguida igualando los dos valores de PH, hallarémos la fórmula (x).

FIG. 112 Y 114. 526. LEMA II. Si en un cuadrilátero *gauso* ABCD, trazamos dos rectas MN y PQ que, apoyándose cada una en dos lados opuestos, o en sus prolongaciones, se corten en un punto O, *el producto de cuatro segmentos no contíguos será siempre igual al producto de los otros cuatro segmentos*; es decir que tendremos que

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ \,.\, DM = AM \,.\, DQ \,.\, CN \,.\, BP \;\ldots\ldots\; (y)$$

Primeramente, observemos que si las dos transversales MN y PQ se cortan efectivamente, deben hallarse en el mismo plano, el cual contendrá a las rectas PN y MQ que, por consiguiente, irán a cortarse en cierto punto R; pero como estas rectas PN y MQ se hallan, una en el plano del triángulo ABC, y la otra en el de ADC, y estos planos se cortan segun la diagonal AC, es preciso que el punto de encuentro R de las líneas PN y MQ, esté precisamene colocado sobre esta diagonal. De donde se sigue que para obtener, en un cuadrilátero gauso, dos transversales opuestas que realmente se corten, podemos tomar a discrecion una de ellas MN, y elejir arbitrariamente el punto P de la segunda; pero en seguida, deberémos trazar la recta PNR que irá a cortar a la diagonal AC en un punto R, y luego tirar la RM que determinará la posicion del punto Q que será preciso unir con P.

Esto supuesto, los triángulos ABC y ADC, cortados por las transversales PNR y MQR, nos dan, en virtud del lema precedente,

$$AP \,.\, BN \,.\, CR = AR \,.\, CN \,.\, BP,$$
$$CQ \,.\, DM \,.\, AR = CR \,.\, DQ \,.\, AM;$$

y de aquí, multiplicando miembro por miembro estas igualdades, y suprimiendo los factores comunes, deducirémos la relacion anunciada ya,

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ \,.\, DM = AM \,.\, DQ \,.\, CN \,.\, BP \;\ldots\ldots\; (y)$$

la cual puede escribirse así:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{CQ}{QD} = \frac{AM}{MD} \cdot \frac{CN}{NB} \;\ldots\ldots\; (z)$$

527. Recíprocamente, si dos rectas PQ y MN cortan a los lados opuestos de un cuadrilátero gauso ABCD, de modo que se verifique la fórmula (y), estas dos transversales se hallan en un mismo plano. En efecto, si esto no es así, podremos tirar por el punto P una recta PQ' que corte a MN; y entónces tendríamos que

$$AP \,.\, BN \,.\, CQ' \,.\, DM = AM \,.\, DQ' \,.\, CN \,.\, BP \,.,$$

cuya equacion es incompatible con (y) que suponemos efectuada, porque si CQ' es mayor que CQ, necesariamente DQ' será menor que DQ.

528. Pasemos ahora a tratar, del doble modo de jeneracion que he- FIG. 109.
mos anunciado núm. 524 respecto al hiperboiloide de una napa; y probemos que *toda recta* B'''DD'D''' *que se apoye sobre tres jeneratrices cualesquiera* A, A' *y* A''' *del primer modo, cortará precisamente a todas las rectas de este sistema;* por ejemplo, que encontrará a la jeneratriz A'' en cierto punto D'''. De aquí se seguirá evidentemente que todos los puntos de esta línea B''' se hallarán sobre el primer hiperboloide construido ya con las tres directrices fijas B, B' y B'', y que segun esto una de estas últimas puede tambien describir esta misma superficie, resbalando sobre tres rectas del sistema A.

Pero como segun el primer modo de jeneracion, las tres rectas A, A' y A'' cortan a B, B' y B'', el cuadrilátero LNN'''L''' dará, en virtud de la fórmula (z)

$$\frac{LL'}{L'L'''} \cdot \frac{N'''N'}{N'N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N'''M'''}{M'''L'''} \,;\ldots\ldots (1)$$

pero como la recta A'' encuentra a las otras tres rectas B, B' y B'', y que B''' corta tambien a las rectas A, A' y A''', el mismo cuadrilátero nos dará aun, segun la fórmula (z), las dos relaciones siguientes,

$$\frac{LL''}{L''L'''} \cdot \frac{N'''N''}{N''N} = \frac{LM}{MN} \cdot \frac{N'''M'''}{M'''L'''} \,,\ldots\ldots (2)$$

$$\frac{LD}{DN} \cdot \frac{N''D'''}{D'''L'''} = \frac{LL'}{L'L'''} \cdot \frac{N'''N'}{N'N} \,;\ldots\ldots (3)$$

y como en virtud de la equacion (1), los segundos miembras de las equaciones (2) y (3) son iguales, conclnirémos de aquí esta nueva igualdad,

$$\frac{LD}{DN} \cdot \frac{N'''D'''}{D'''L'''} = \frac{LL''}{L''L'''} \cdot \frac{N'''N''}{N''N'}, \ldots\ldots (4)$$

la cual prueba (núm. 527) que las dos rectas A" y B''' se cortan efectivamente en un punto D".

529. Observemos ahora que el segundo miembro comun de las equaciones (1) y (2), es una cantidad constante k que permanece invariable, desde que queda fija la posicion de las cinco rectas B, B', B", A y A'''; de donde se sigue que, respecto a una nueva recta cualquiera A' que se apoye en las tres primeras, siempre tendremos que

$$\frac{LL'}{L'L'''} = k \cdot \frac{NN'}{N'N'''} \ldots\ldots (5)$$

Pero si las tres rectas B, B', y B", fuesen *paralelas a un mismo plano*, sabemos que dividirian a A y A' en partes proporcionales, de modo que tendríamos que $k=1$; por consiguiente, la equacion (5) sería entónces

$$\frac{LL'}{L'L'''} = \frac{NN'}{N'N'''},$$

que nos prueba que en este caso, las tres rectas A, A', y A''', precisamente serian tambien *paralelas a un solo plano*, pero diferente del primero. Mas adelante volveremos ha hallar esta consecuencia, en el paraboloide hiperbólico (núm. 553).

FIG. 109. 530. *Del plano tanjente.* Supuesto que por cada punto del hiperboloide pasan dos rectas (núm. 528), una del sistema A y la otra del sistema B, y que estas líneas son ellas mismas sus propias tanjentes, deberán hallarse ámbas en el plano tanjente relativo al punto en que se cortan, y por consiguiente, serán suficientes para determinar este plano y para hallar sus trazas. Y así, cuando se defina un hiperboloide por las tres directrices B, B', y B", y se señale el punto de contacto D sobre una jeneratriz dada A, será preciso construir (núm. 521), por lo ménos, otras dos posiciones A' y A" de esta jeneratriz; y en seguida adoptando a estas líneas A, A' y A" por directrices, se construirá una recta DD'D" que se apoye sobre estas últimas, y parta del punto D. En este caso esta recta DD'D" estará situada sobre el hiperboloide, y dirijiendo un plano por las dos líneas AD y DD'D", este será el plano tanjente re-

lativo al punto D. Esta solucion es demasiado sencilla, para que creamos necesario construirla en un depurado especial.

531. Cuando los datos de un hiperboloide estén asignados sobre dos planos de proyeccion, y solo se cite *la proyeccion horizontal* D, por ejemplo, de un punto de esta superficie, para el que se nos pide el plano tanjente, no será posible tirar inmediatamente la jeneratriz AD, ántes de haber hallado la proyeccion vertical del punto D. Para esto será preciso, en jeneral, tirar por este punto un plano vertical cualquiera; determinar la seccion que produzca en la superficie, y construir los puntos de encuentro de este plano secante con las varias jeneratrices que se apoyen sobre las rectas dadas B, B' y B"; y por último, proyectar sobre esta seccion el punto D asignado sobre el plano horizontal. En cuyo caso, como conocemos las dos proyecciones de la jeneratriz A que pasa por este punto, nos hallarémos en el caso del número precedente.

532. Del centro *del hiperboloide*. Esta superficie está dotada de un centro, es decir que existe *un punto de tal naturaleza, que todas las cuerdas* de la superficie *que pasan por este punto, quedan divididas en él en dos partes iguales*. Para demostrar esta proposicion, representemos por B, B' y B", tres directrices primitivas que cumplan con las condiciones enunciadas en la definicion del núm. 521; podremos entónces conducir por las rectas B' y B" dos planos distintos B'DC y B"CD, paralelos uno y otro a la directriz B, y estos dos planos se cortarán segun una recta ACD paralela evidentemente a B; de modo que esta línea ACD será una jeneratriz del hiperboloide propuesto, supuesto que se apoyará en B' y B" e irá a encontrar a B a una distancia infinita. Así mismo, tirando por B" y por B dos planos B"GH y BHG, paralelos a B, se cortarán segun una recta A'GH que tambien será una jeneratriz del hiperboloide; y hallarémos otra tercera A"KE por medio de dos planos BHF y B'DI paralelos a B", y tirados por B y B'. De aquí concluirémos desde luego que *cada jeneratriz de un sistema tiene su paralela en el sistema opuesto*; porque lo que aquí hemos dicho de B, se aplicará igualmente a cualquiera otra jeneratriz B''', B'''',... que puede tomarse por directriz en lugar de B (núm. 528). En seguida, los seis planos que hemos construido aquí arriba, manifiestamente forman un paralelipípedo que tiene por *aristas opuestas* a las seis rectas FIG. 114.

B, B', B" y A, A' A"; y decimos que el centro O de este paralelipípedo, es tambien el centro del hiperboloide.

Para demostrarlo, tiremos por un punto M tomado arbitrariamente sobre la directriz B, una recta M'MM" que corte a las otras dos directrices en M' y M", y así será una jeneratriz del sistema A; en seguida compararémosla con una jeneratriz del sistema B que, apoyándose sobre A, A' y A", sea paralela a MM'M". Para obtener esta nueva jeneratriz, tomarémos las distancias

$$DN=HM,\ GN'=EM',\ EN''=GM'',$$

y los tres puntos N, N' y N", determieados de este modo, se hallarán en línea recta. Con efecto, tirando las líneas OM y ON, los triángulos OMH y OND, que visiblemente son iguales, nos servirán para probar que los lados OM y ON son iguales y en línea recta; la misma consecuencia tendrá lugar respecto a las líneas OM' y ON', OM" y ON", en virtud de los triángulos iguales que fácilmente percibirémos. En seguida, los triángulos MOM' y NON', iguales por lo que precede, confirmarán el paralelismo de los lados MM' y NN'; por último, MM" será paralela a NN" en virtud de los triángulos iguales MOM" y NON". Por consiguiente, las dos porciones N'N y NN" no formarán sino una sola línea recta, que será una jeneratriz del sistema B, paralela a la jeneratriz M'MM", elejida a discrecion en el sistema A; ademas, vemos por esto que *dos jeneratrices paralelas se hallan siempre en un plano que pasa por el punto* O, y están *igualmente distantes de este punto.*

Sentado esto, si por un punto arbitrario P de la recta M'MM", tiramos *una cuerda* POQ que pase por el punto O, esta precisamente irá a penetrar al hiperboide en un punto Q situado sobre N'NN", y en virtud de las relaciones arriba establecidas, tendremos evidentemente que OP =OQ; luego, supuesto que esta consecuencia es cierta respecto a cualquier punto P tomado sobre el hiperboloide, quedará probado que el punto O es el centro de esta superficie *(*)*.

(*) M. J. Binet *es el que ha dado a conocer* (Diario de la Escuela Politécnica, *cuaderno* 16.mo) *entre otros paralelipípedos concéntricos con el hiperboloide, los que se forman de este modo, es decir, uniendo tres jene-*

533. Observemos que, cuando solamente se trata de *construir este centro,* le obtendrémos sin necesidad de trazar el paralelipípedo de que acabamos de hablar, hallando la interseccion de tres planos tirados por la recta dada B y su paralela A, por B' y su paralela A', y por B" y su paralela A": porque cada uno de estos planos diagonales pasa evidentemente por el centro del paralelipípedo que es el del hiperboloide. Podemos ademas decir que estos son *tres planos asintóticos* de la superficie, segun lo esplicarémos en el núm. 546.

534. Reasumiendo las proposiciones precedentes, vemos que en el hiperboloide de una napa, 1.° existen dos sistemas de jeneratrices rectilíneas.

A, A', A", A"' ..... y B, B', B", B"',.....

cada una de las cuales corta a todas las rectas del sistema opuesto (núm. 528); no obstante esto, cada jeneratriz A tiene su paralela en el sistema B (núm. 532), y recíprocamente; de modo que estas rectas com-

---

ratrices cualesquiera de un sistema, con sus paralelas en el sistema opuesto. Este sabio jeometra ha deducido de aquí muchas consecuencias interesantes; pero ahora solo observaremos: 1.° *que cada uno de estos paralelipípedos está* circunscriro *al hiperboloide, supuesto que cada cara contiene a dos jeneratrices y es tanjente en el punto en que se cortan estas rectas;* 2.° *que ofrecen una construccion gráfica mui elegante, para hallar el centro de la superficie gausa definida por tres directrices rectilíneas;* 3.° *que no son ménos útiles consideradas analíticamente, porque adoptando este centro por oríjen de los ejes coordenados, elejidos paralelos a las tres directrices asignadas, la equacion de la superficie se presentará bajo la forma mui simple de*

$$\frac{xy}{\alpha\beta}+\frac{yz}{\beta\gamma}+\frac{xz}{\alpha\gamma}+1=0;$$

con efecto, siendo manifiestamente los ejes actuales tres aristas del cono asintótico, debe suceder que cada plano coordenado corte a la superficie segun una hipérbola que tenga por asíntota a los dos ejes contenidos en este plano.

paradas de dos en dos, no tiene lugar el encuentro, sino a una distancia infinita.

2.° Dos jeneratrices del sistema A no se hallarán jamas en un solo plano (núm. 522); lo mismo sucederá con las jeneratrices del sistema B, porque estas últimas se apoyan tambien (núm. 528) sobre tres rectas del sistema A, las cuales se hallan en planos diferentes.

3.° Tres rectas cualesquiera del sistema A no son nunca *paralelas a un mismo* plano; porque si esto tuviese lugar, se seguiria, segun el núm. 529, que las directrices B, B' y B" sobre quienes se apoyan todas las jeneratrices del primer modo, serian tambien paralelas las tres a un mismo plano, lo que es contrario a la definicion del núm. 521. Y recíprocamente, tres cualesquiera de las jeneratrices del sistema B no son jamás paralelas a un mismo plano, porque esto nos conduciria (núm. 529) a una restriccion igual a la que hemos visto respecto a las rectas del sistema A, sobre las cuales se apoyan estas jeneratrices del segundo modo.

4.° El centro del hiperboloide está colocado en el centro del paralelipípedo construido con tres rectas cualesquiera del sistema A, unidas a las jeneratrices del sistema B que son respectivamente paralelas a las tres primeras (núm. 532); o mas sencillamente, es dado por la interseccion de tres planos asintóticos (núm. 533).

5.° Una recta cualquiera D no podrá penetrar al hiperboloide en mas de dos puntos; porque si tuviese tres puntos comunes con esta superficie, la recta D se apoyaria sobre tres jeneratrices de uno u otro sistema, de modo que toda ella coincidiria con la superficie. Ademas, para obtener estos puntos de interseccion, será preciso construir, como en el núm. 531, la seccion producida en el hiperboloide por un plano vertical u horizontal, tirado por la recta D.

535. *La superficie gausa enjendrada por una recta que resbala sobre otras tres rectas fijas que no son paralelas a un mismo plano, es* IDENTICA *con el hiperboloide de una napa* que hemos descrito en el núm. 83. Con efecto, esta superficie gausa es de segundo grado, porque sin efectuar los cálculos, es fácil ver que las condiciones por medio de las que se espresaria que la recta móvil tiene un punto comun con cada directriz, no podrian producirnos sino una equacion de segundo grado. En seguida, esta superficie gausa está dotada de un centro

(núm. 532), y como evidentemente no podrá ser ni un cono ni tampoco un cilindro, que son desarrollables, es preciso que sea un helipsoide o uno de los dos hiperboloides. Pero el elipsoide es una superficie limitada en todos sentidos (núm. 81) que no puede admitir por jeneratriz a una recta indefinida; por otra parte, el hiperboloide del núm. 85 presenta dos napas separadas por un intervalo imajinario, de modo que una recta indefinida y contínua, no podrá manifiestamente aplicarse toda entera sobre esta superficie; por consiguiente, hemos venido a parar en la proposicion enunciada al principio de este artículo.

536. Para manifestar mas claramente la identidad de que se trata, FIG. 119. y que a primera vista puede parecer bastante estraña, vamos a demostrar sintéticamente que el hiperboloide descrito en el núm. 83 admite efectivamente *dos sistemas de jeneratrices rectilíneas*. En virtud de la definicion de esta superficie, todas las secciones perpendiculares a su eje imajinario, son elipses *semejantes*: si la cortamos con tres planos horizontales *e'a'*, V'X', V"X", de los cuales el primero pasa por el centro, y los otros dos están a igual distancia de este punto, uno encima y otro debajo de él, obtendrémos *la elipse de la garganta* (*abef, a'e'*) y otras dos elipses iguales proyectadas horizontalmente sobre VUXY que tiene sus ejes paralelos y proporcionales a los de *abef*. Sentado esto, y tirando una tanjente cualquiera ADB a esta última, sabemos que las partes AD y DB serán iguales (*); por consiguiente, si unimos el punto (D, D') con (A, A') y (B, ϐ'), obtendrémos dos rectas (AD, A'D') y (DB, D'ϐ'), que serán precisamente prolongacion una de otra, porque son las hipotenusas de dos triángulos rectángulos manifiestamente iguales, proyectados sobre D'I'A' y D'I'ϐ'. De donde resulta que la recta (ADB, A'D'ϐ') tiene tres puntos comunes con el hiperboloide, y por consiguiente *se halla enteramente sobre esta superficie*, en atencion a que esta es de segundo grado.

Proyectemos ahora el punto A sobre la elipse superior al punto α', y el punto B a la inferior a B'; en seguida, unamos en el espacio estos dos puntos con (D, D'), y obtendrémos aun dos rectas (BD, B'D') y (DA,

(*) *Esta proposicion se demuestra fácilmente, por la definicion puramente jeométrica de los diámetros conjugados y de las curbas semejantes.*

D'α'), cuya coincidencia probaríamos del mismo modo; de manera que la recta total (BDA, B'D'α') tendrá tres puntos comunes con el hiperboloide; y por consiguiente estará toda ella situada sobre esta superficie de segundo grado.

FIG. 119. 537. De aquí podemos concluir que todo plano vertical ADB tanjente a la elipse de la garganta, corta al hiperboloide segun dos rectas distintas, que se cruzan en (D, D') en esta misma garganta y están inclinadas simétricamente a uno y otro lado de la vertical D. Por consiguiente, podemos mirar a esta superficie como producida por *el movimiento de la jeneratriz* (AD, A'D'), *o de la jeneratriz* (BD, B'D') *sujeta a resbalar constantemente sobre las tres elipses semejantes*

(XYVU, X'V'), (*abef*, *a'e'*) y (XYVU, X"V");

porque sabemos (núm. 513) que estas condiciones arreglan completamente el movimiento de una línea recta. Por consiguiente, las diversas posiciones de estas dos jeneratrices presentarán *dos sistemas* de rectas indefinidas, situadas todas sobre el hiperboloide, a saber :

[A] ..... (AD, A'D'), (A_2E, A'_2E'), (A_3F, A'_3F'),.....

[B] ..... (BD, B'D'), (B_2E, B'_2E'), (B_3F, B'_3F'),.....

tanto unas como otras se proyectan verticalmente sobre tanjentes a la hipérbola X"*a*'X', V"*e*'V' contenida en el plano vertical VX. Con efecto, en el punto (N, N') en que una de estas jeneratrices penetra a este plano VX, el plano tanjente de la superficie es perpendicular al plano vertical, en virtud de que contiene a la tanjente a la elipse horizontal que tiene su vértice en (N, N'); luego la jeneratriz (BND, B'N'D') se confunde, *en la proyeccion vertical*, con la tanjente de la hipérbola (X"*a*'X', *a*X), que tambien está en este plano tanjenre. Esta misma circunstancia tiene lugar con la recta (ADN, A'D'N") cuya proyeccion vertical toca a esta hipérbola en el punto (N, N"); y las asíntotas nos las darán las jeneratrices (*b*K, O'K') y (*f*B_2, O'B'_2), que como son paralelas al plano vertical VX, ne tocarán a la hipérbola sino al infinito.

538. *Dos jeneratrices cualesquiera del sistema* A *no están nunca en el mismo plano, y la superficie es* GAUSA. Con efecto, consideramos las rectas (AD, A'D') y (A_4G, A'_4G'); si estas se cortan, su punto de seccion

estará proyectado horizontalmente en M; pero como respecto a la primera de estas rectas, el punto M se halla mas allá del punto D que pertenece a la elipse de la garganta, deberá hallarse sobre la napa superior en M"; en tanto que respecto a la recta (A_4G, A'_4G'), como el punto M está mas acá de G, pertenecerá precisamente a la napa inferior, y y estará proyectado en M'. Luego las rectas propuestas no se cortan, y ademas, es bien evidente que no podrán ser paralelas.

Del mismo modo probaríamos que las jeneratrices del sistema B no están nunca en un solo plano.

539. Por el contrario, *cada jeneratriz* (A_4G, $A_4'G'$) *del primer sistema corta a todas las rectas del segundo*, por ejemplo, a (BD, B'D'). Porque el punto M en que se encuentran las proyecciones horizontales de estas dos rectas, está colocado sobre una y otra del lado de acá de los puntos G y D que pertenecen a la elipse de la garganta; luego los dos puntos proyectados en M están sobre la napa inferior del hiperboloide; y por consiguiente, se proyectan a un mismo tiempo en M', supuesto que esta napa no puede manifiestamente ser cortada por la vertical M sino en un solo punto. Sin embargo, observemos que cuando se elija una jeneratriz del sistema A y otra del sistema B que pasen por los estremos de un mismo diámetro de la elipse de la garganta, estas dos rectas serán *paralelas*; y se hallarán en un solo plano.

Del mismo modo demostraríamos que cada jeneratriz del sistema B corta a todas las del sistema A, escepto a una sola que le es paralela.

540. Pero como el movimiento de una recta queda completamente determinado (núm. 521) por la condicion de que esta línea móvil se apoye constantemente sobre tres rectas fijas, resulta de aquí que si hacemos resbalar la jeneratriz (AD, A'D'), sobre tres rectas cualesquiera del sistema B, dicha recta no podrá tomar sino las posiciones A_2, A_3, A_4,... que todas encuentran a estas tres directrices (núm. 539); así mismo, la jeneratriz (BD, B'D'), cuando resbala sobre tres rectas del sistema A, vendrá precisamente a coincidir con B_2, B_3, B_4..... Por consiguiente, el presente hiperboloide nos ofrece distintamente todas las propiedades que hemos reconocido ya en la superficie gausa del núm. 521; y si las tres elipses directrices fuesen círculos, recaeríamos en el *hiperboloide de revolucion* de que hemos hablado ya núm. 140 y 141....

541. *Del plano tanjente.* Cuando está definido el hiperboloide de FIG. 119.

una napa por medio de las tres elipses semejantes citadas en el núm. 537 (cuyas curbas podremos construir con facilidad, tan pronto como se nos den los tres ejes $Oa=O'a'$, Ob y $O'c'$), es mui fácil hallar el plano tanjente relativo á un punto dado por su proyeccion horizontal M. Con efecto, si tiramos por el punto M una tanjente AMB a la elipse de la garganta, esta será la proyeccion de dos jeneratrices, representadas sobre el plano vertical por A'D' y B'D', y sobre las que será preciso proyectar el punto dado a M" o a M', de modo que habrá en este plano dos posiciones para el punto propuesto. Consideremos, en primer lugar, al punto (M, M") situado sobre la recta (ADM, A'D'M"); por él pasa tambien otra segunda jeneratriz perteneciente al sistema B, que es (B_4GM, $B'_4G'M''$), que obtendrémos tirando por el punto M, la nueva tanjente MGB_4 a la elipse de la garganta. El conjunto de estas dos jeneratrices determinará completamente (núm. 530) al plano que toque al hiperboloide en el punto (M, M"), y los pies de estas rectas nos darán inmediatamente la traza horizontal AB_4P de este plano tanjente. En cuanto a su traza vertical PQ" la obtendrémos con el ausilio de la horizontal (MQ, M"Q") tirada paralelamente a AB_4.

Respecto al otro punto (M, M'), combinarémos a una las dos jeneratrices (BMD, B'M'D') y (A_4MG, $A_4'M'G'$) que se cortan en él; y la traza horizontal del plano tanjente relativo a este nuevo punto, será la recta $A_4'B$, que será evidentemente paralela a AB_4. La traza vertical se obtendrá por el mismo medio precedente.

542. Para obtener una simetría conveniente, en la representacion del hiperboloide por medio de sus jeneratrices rectilíneas, es esencial elejir las cuerdas AB, A_2B_2, A_3B_3..... sobre el plano horizontal, de modo que tarde o temprano vengan a terminar de dos en dos en los mismos puntos de la elipse XYVU. Pero si esta curba fuese un círculo, sabemos (núm. 150) que esta condicion quedará satisfecha dividiendo la circunferencia en cierto número de partes iguales, y tirando cuerdas que subtendan *un número constante* de estos arcos parciales; ademas, estas cuerdas serán tanjentes al círculo de la garganta, que trazarán ellas mismas por medio de sus intersecciones subcesivas. Luego, si suponiendo efectuada esta construccion respecto al círculo descrito sobre VX como diámetro, nos figuramos que jira al rededor de VX, cierta cantidad angular necesaria para que tenga por proyeccion a la elipse

XYVU, sucederá mui bien que las cuerdas primitivas se proyecten sobre otras cuerdas, que necesariamente vengan a terminar, de dos en dos, en los mismos puntos de esta elipse; y ademas, estas nuevas cuerdas serán evidentemente tanjentes a la elipse interior segun la cual se proyecta el círculo primitivo de la garganta. De donde concluimos que es preciso elejir los puntos A, A_2, A_3,.... de modo que se correspondan con las ordenadas que dividen al círculo VX en arcos iguales; y en seguida, trazar en la elipse XYVU las cuerdas AB, A_2B_2..... que subtendan *un número constante* de estos arcos de elipse, aun cuando estos no sean de la misma lonjitud. Una vez determinadas así las dos jeneratrices sobre el plano horizontal, concluirémos fácilmente de aquí las proyecciones verticales, proyectando las estremidades A y B a A' y β', y tambien a α' y B', sobre las dos paralelas V'X' y V"X". Ademas, las intersecciones consecutivas de todas estas jeneratrices, si son en gran número, bastarán por sí solas a representar el contorno de la elipse de la garganta sobre el plano horizontal y las dos ramas de la hipérbola paralela al plano vertical.

543. Del cono asintota *del hiperboloide.* Si por el centro (O, O') de esta última superficie, tiramos rectas respectivamente paralelas a las varias jeneratrices del sistema A, lo serán tambien al mismo tiempo a las jeneratrices del sistema B, supuesto que cada recta de un sistema tiene su paralela en el otro (núm. 532); y de este modo formarémos una superficie cónica que será *asintota* del hiperboloide propuesto. Para probarlo, determinemos desde luego cual será la traza horizontal de este cono; considerando una arista cualquiera O*m* y las dos jeneratrices DA y HR que le son paralelas, estas tres rectas se hallarán sobre un mismo plano que pasará por el diámetro horizontal (DOH, D'O'); luego la traza de este plano será una cuerda RA paralela a DOH, y el medio *m* de esta cuerda será evidentemente el pie de la arista O*m*. Haciendo el mismo raciocinio con otra arista, y con las dos jeneratrices del hiperboloide que le sean paralelas, veremos que la traza horizontal *vmyx* del cono en cuestion, nos la darán los medios de todas las cuerdas que subtendan, como RA, *un número constante* de divisiones en la elipse VYX; pero segun lo que hemos dicho en el número precedente, sabemos que todas estas cuerdas tienen por envolvente a una elipse que las toca en sus medios, y que es semejante a VYX; luego la traza *vmyx* FIG. 119.

es efectivamente una elipse que goza de esta propieda, y cuyo semi-eje mayor Ov es igual a bK.

El cono que ahora acabamos de construir es *asíntota* del hiperboloide; porque cortando estas dos superficies con planos horizontales, las secciones serán elipses respectivamente semejantes a VYX y vyx, y que así como estas últimas, tendrán por diferencias de sus semi-ejes a una cantidad variable Vv igual al intervalo V'K' que separa al hiperboloide V'e'V" de su asíntota O'K'. Y como este intervalo se aproxima indefinidamente a cero, a medida que bajamos mas del centro O', síguese tambien que las dos secciones dadas al hiperboloide y al cono por un mismo plano horizontal que se aleje cada vez mas del centro, serán elipses semejantes que *indefinidamente* se aproximarán a confundirse, aunque la primera envolverá siempre a la segunda; luego estas dos superficies son realmente asíntotas una de otra.

FIG. 109. 544. DE LAS SECCIONES PLANAS *del hiperboloide*. Para obtener la interseccion de esta superficie con un plano dado π, es suficiente hallar los puntos en que este plano va a cortar a varias jeneratrices A, A', A",.... que sabemos construir (núm. 521) en virtud del conocimiento de las tres directrices B, B', y B"; y reunir en seguida todos estos puntos por un trazo contínuo. La tanjente a está curba nos la dará la interseccion del plano π con el plano tanjente del hiperboloide en el punto en cuestion, cuyo plano hemos enseñado a construir (núm. 530).

545. En el caso particular de que el plano dado π pasase por una jeneratriz A del primer sistema, la segunda rama de interseccion seria precisamente *rectilínea*, supuesto que la superficie es de segundo grado; y esta recta que pertenecerá al sistema B, se obtendrá determinando solo los dos puntos en que el plano π corta a dos jeneretrices A' y A" del primer sistema. Por otra parte, este plano π será *tanjente* a la superficie en el punto de encuentro de las dos jenerataices contenidas en él.

546. Cuando estas dos jeneratrices son paralelas entre sí, deberá considerarse al plano π como *asíntota* del hiperboloide, o tanjente en el punto infinitamente distante en que se encuentran estas dos rectas; en cuyo caso el plano π pasará precisamente por el centro (núm. 533) de la superficie, y será tanjente al cono asíntota, segun hemos visto (núm. 543) respecto a las jeneratrices DA y HR de la *fig.* 119. Y así,

todo plano tanjente al cono asíntota, corta al hiperboloide segun dos rectas paralelas a la arista de contacto de este plano con el cono.

547. *Para conocer con anticipacion la naturaleza de la seccion* producida por un plano dado π, será preciso examinar si existe alguna jeneratriz *paralela al plano secante;* porque entónces la seccion admitirá una o dos ramas infinitas. Al efecto, construirémos la traza del cono asíntota sobre el plano horizontal, tirando por el centro O del hiperboloide, determinado como en el núm. 533 (o sino, por un punto cualquiera del espacio), paralelas a un número suficiente de jeneratrices A, A', A",.... y en seguida, tirarémos por la cúspide de este cono un plano π' paralelo a π, y hecho esto, se podrán presentar tres casos.

1.° Si la traza horizontal del plano π' no encuentra a la base del cono asíntota, no habrá sobre este cono ninguna arista paralela a π; y sucederá lo mismo con las jeneratrices del hiperboloide, que son (nnm. 543) respectivamente paralelas a estas aristas. Luego, en este caso, la curba de seccion no tendrá ningun punto situado al infinito, y será por consiguiente *una elipse.*

2.° Si la traza horizontal del plano π' corta en dos puntos a la base del cono asíntota, habrá sobre este cono dos aristas α y α' *paralelas al plano* π, y lo mismo sucederá en el hiperboloide, dos jeneratrices de cada modo (a y b, a' y b') cumplirán con esta condicion; por consiguiente, la seccion producida por el plano π, admitirá dos ramas infinitas, y será *una hipérbola.* Para hallar las asíntotas, tirarémos el plano P de modo que toque al cono asíntota (*) a lo largo de la arista α; y como este plano contendrá (núm. 546) a las dos jeneratrices a y b que, sobre el hiperboloide, son paralelas a α, es tanjente a esta superficie en el punto infinitamente distante en que a y b van a encontrar al plano secante π: luego la interseccion de los planos P y π nos dará la asíntota de esta rama. La otra asíntota la obtendrémos por la interseccion del plano π con el plano P' que tocará al cono asíntota segun la arista α'; porque

---

(*) *Es preciso que, en el caso presente, se haya construido este cono de modo que su cúspide se halle precisamente en el centro* O *del hiperboloide, cuyo punto sabemos ya determinar por el núm.* 533.

en este plano P' es donde estarán contenidas las dos jeneratrices *a'* y *b'* que son paralelas a α'.

3.° Si el plano π tirado por la cúspide del cono asíntota, *toca* a este cono segun una sola arista α, no habrá sobre el hiperboloide sino una sola jeneratriz (*a* y *b*) de cada sistema que sea paralela a α; luego, en este caso, la seccion producida por el plano π no tendrá sino una rama infinita, y será *una parábola*. Ademas, no admitirá asíntota; porque como el mismo plano π' sería el que tocando al cono asíntota, contendria (núm. 546) a las dos jeneratrices *a* y *b* paralelas a α: síguese que este plano es tanjente al hiperboloide en un punto de la curba infinitamente distante; pero como en el caso actual es paralelo al plano secante π, su interseccion, que sería la asíntota, se transporta toda ella al infinito, y por consiguiente no existe.

548. Por medio de las construcciones precedentes sabremos resolver el problema siguiente, siempre que su resolucion sea posible; *hallar sobre un hiperboloide dado, una jeneratriz que sea paralela a un plano conocido* π. Porque tirando por la cúspide del cono asíntota, el plano π' paralelo a π, si el plano π' corta a este cono segun una o dos aristas α y α'; los planos tanjentes al mismo cono a lo largo de estas aristas, darán por su interseccion con el hiperboloide, las jeneratrices *a* y *b* paralelas a α, y las *a'* y *b'* paralelas a α', que todas cuatro satisfarán a la cuestion propuesta.

CAPITULO III.

Del paraboloide hiperbólico.

FIG. 115. 549. Llamamos así a la superficie enjendrada por *una recta móvil* A, *que resbala sobre dos rectas fijas* B *y* B' *que no están situadas en un mismo plano, y que ademas, permanece constantemente paralela a un*

plano dado P que se llama *plano director;* porque mas adelante demostraremos (num. 558) que esta superficie es idéntica con la que hemos designado ya bajo este nombre en el núm. 89. Para construir las diversas posiciones de la jeneratriz, bastará tirar por cada punto M, tomado a discrecion sobre la directriz B, un plano paralelo al P; hallar en seguida el punto N en que este plano va a cortar a la otra directriz B', y unir estos dos puntos por una recta AMN. De este modo vemos que las condiciones precedentes *reglan completamente* el movimiento de la recta móvil, porque para cada punto M, no puede dicha recta tomar sino una sola posicion.

350. El paraboloide hiperbólico es una *superficie gausa*; porque dos jeneratrices cualesquiera A y A', aun cuando se hallen infinitamente próximas, no podrán estar contenidas en un solo plano sino cuando las directrices B y B', que cada una tiene dos puntos comunes con las primeras, estén ellas mismas situadas en este plano; pero esto es contrario a la definicion dada en el número precedente; luego la superficie de que tratamos es gausa.

551. La superficie que nos ocupa, admite, lo mismo que el hiperboloide gauso, otro segundo modo de jeneracion inverso al primero, y en el que dos de las jeneratrices A, A', A",.... serán las directrices. Para probarlo, demostremos que *todo plano* DUV *paralelo a las dos directrices* B *y* B', *corta al paraboloide segun una recta*; que en resúmen se reduce a hacer ver que los tres puntos D, D' y D'' en que este plano encuentra a tres jeneratrices cualesquiera A, A', y A", se hallan en línea recta. FIG. 115.

Proyectemos toda la figura sobre un plano QOX paralelo tambien a las dos directrices B y B', y empleemos por líneas proyectantes rectas oblícuas (*), pero paralelas todas a una línea PO tirada arbitrariamente en el plano director POX. Entónces B y B' serán dos línea cualesquie-

---

(*) *Hasta el presente, hemos demostrado esta proposicion conservando las proyecciones ortogonales, y empleando un plano* QOX perpendicular *al plano director* P; *lo que deja en pie todos los raciocinios y cálculos del testo. Pero la marcha actual presenta la ventaja de poner a la vista del lector, el segundo plano director* Q *que admite el paraboloide hiperbólico.*

ra b y b'; pero las rectas MDN, M'D'N' y M"D"N", que tienen sus planos proyectantes paralelos a P, se proyectarán segun las rectas *mdn*, *m'd'n'* y *m"d"n"*, *paralelas* necesariamente a la interseccion OX de los dos planos P y Q. Sentado esto, tendrémos evidentemente que

$$\frac{MD}{DN} = \frac{md}{dn}, \quad \frac{M'D'}{D'N'} = \frac{m'd'}{d'n'}, \quad \frac{M''D''}{D''N''} = \frac{m''d''}{d''n''};$$

pero, por otra parte, como el plano DUV es paralelo a las dos líneas B y B', podemos mirar a las rectas A, A' y A" como cortadas por tres planos paralelos; y segun un teorema conocido en la jeometría elemental, hallaremos las razones iguales

$$\frac{MD}{DN} = \frac{M'D'}{D'N'} = \frac{M''D''}{D''N''},$$

que en virtud de las igualdades precedentes, darán tambien

$$\frac{md}{dn} = \frac{m'd'}{d'n'} = \frac{m''d''}{d''n''}.$$

Pero como estas razones iguales subsisten entre las rectas *mn*, *m'n'* y *m"n"* que son *paralelas entre sí*, resultará precisamente de aquí que los tres puntos *d*, *d'*, *d"* están sobre una misma recta que converjirá con b y b' hácia un solo punto; de aquí se sigue que los puntos del espacio D, D' y D" se hallan *en el plano proyectante* que pasa por la recta *dd'd"*; y como tambien se hallan en el plano DUV, que es distinto de este plano proyectante, resulta de aquí que estos tres puntos D, D' y D" están efectivamente en línea recta.

FIG. 115. 552. En virtud de esto, *si hacemos resbalar sobre dos jeneratrices* A *y* A' *del primer modo, una recta móvil* B" *sujeta ademas a permanecer paralela al plano* Q, *esta recta enjendrará el mismo paraboloide* que arriba: porque cuando B" pase por el punto D, por ejemplo, no podrá ménos de coincidir con la recta DD'D" que está situada (núm. 551) sobre este paraboloide, y que llena ya las condiciones impuestas a B". Y en virtud de esto, tendremos otro segundo método de jeneracion en que el nuevo *plano director* Q es paralelo a las dos directrices B y B' del modo anterior, y en el que las directrices nuevas son dos jeneratrices cualesquiera del primer sistema A.

553. Ensayemos ahora el hacer mover una recta B" de modo que se apoye constantemente en tres rectas cualesquiera A, A' y A", del primer sistema, sin ponerle la restriccion de ser paralela a un plano director. Estas condiciones bastarán para reglar completamente (núm. 521) el movimiento de esta jeneratriz; y cuando pase por el punto D, por ejemplo, deberá coincidir aun con DD'D" que cumple con las condiciones enunciadas; luego B" va, segun esto, a describir el mismo paraboloide que anteriormente. Por consiguiente, aquí tenemos otro método de jeneracion, en el que se produce esta superficie por *el movimiento de una recta* B" *que resbala constantemente sobre tres rectas fijas* A, A' y A", que son *paralelas a un mismo plano;* porque, en el caso actual, en lugar de ser estas tres directrices enteramente arbitrarias, son, por la definicion del núm. 549, todas ellas peralelas al plano P; de suerte que, bajo este punto de vista, el paraboloide hiperbólico es un caso particular del hiperboloide de una napa (núm. 521). Por otra parte, aun cuando no háyamos impuesto a la recta móvil B" la restriccion de permanecer paralela al plano fijo, no dejará de llenar esta condicion, porque las posiciones que tomará, como la DD'D", son todas paralelas al plano Q; esto concuerda con la observacion del núm. 529.

Es tambien evidente que este modo de jeneracion admite, como recíproco, otro cuarto modo en el cual harémos mover a la recta A sobre tres de las jeneratrices del sistema B cualesquiera que ellas sean; porque como esta recta A no podrá tomar (núm. 521) sino las posiciones A', A",.... que llenan ya esta condicion, y permanecerá tambien paralela al plano P, aun cuando no le háyamos impuesto esta restriccion.

554. De aquí resulta evidentemente : 1.° que por cada punto D tomado a discrecion sobre el paraboloide, pasan dos rectas situadas enteramente sobre la superficie, y pertenecientes una al sistema A y la otra al B; 2.° que dos jeneratrices que pertenezcan al mismo modo, no se hallan nunca en un solo plano, pues lo que hemos probado núm. 550 respecto a las rectas A, A', A",.... tambien se aplica evidentemente a las rectas B, B', B"....; 3.° que cada jeneratriz de un sistema, corta a todas las rectas del otro modo, *sin que haya dos que sean paralelas;* porque si esta circunstancia tuviese lugar respecto a A"' y B", por ejemplo, se seguiria de aquí que estas rectas serian tambien paralelas a la interseccion OX de los dos planos directores, lo que es imposible, a no ser que FIG. 115.

las consideremos como colocadas a una distancia infinita; 4.° una recta cualquiera no puede atravesar al paraboloide sino en dos puntos; porque si tuviese tres puntos comunes con esta superficie, se apoyaria sobre tres jeneratrices, y por consiguiente (núm. 553) coincidiria toda ella con el paraboloide. Ademas, para obtener los puntos de interseccion, será preciso construir la seccion causada en la superficie por un plano vertical u horizontal, tirado por la recta dada.

555. Finalmente, como en el primer modo de jeneracion, hallamos las diversas posiciones A, A', A",.... de la jeneratriz, por medio de los planos paralelos a P, que cortan a las directrices B y B' en los puntos M y N, M' y N',.... sabemos, por la jeometría elemental, que estos planos dividirán a las rectas B y B' en partes proporcionales, es decir, que tendrémos que

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{M'M''}{N'N''} = \frac{M''M'''}{N''N'''} = \ldots\ldots;$$

de donde resulta que en lugar de un plano director, podremos señalar dos posiciones primitivas A y A' de la recta móvil; exijir, en seguida, que esta resbale sobre B y B', *de modo que siempre intercepte partes que sean proporcionales con* MM' *y* NN'. Esta marcha será de un uso mui cómodo para ejecutar en relieve el paraboloide hiperbólico; porque despues de haber construido un cuadrilátero *gauso*, como el MNN'''M''', cuyos lados y ángulos sean invariables, bastará dividir los lados opuestos MM''' y NN''' en un mismo número de partes iguales; en seguida, uniendo las divisiones correspondientes por medio de *hilos tendidos en línea recta*, obtendrémos una representacion fiel de esta superficie. Para introducir al mismo tiempo las jeneratrices del sistema B, no habrá mas que dividir tambien los otros dos lados MN y M'''N''' en un mismo número de partes iguales, y uniendo los puntos de division correspondientes, por medio de otros hilos que entónces deberán apoyarse sobre los primeros, y no formar sino una sola y misma superficie, en la que están espresados de un modo mui sensible los dos modos de jeneracion (*véase* núm. 566 y la *fig.* 120).

FIG. 115. 556. *Del plano tanjente.* Cuando se nos dé el punto de contacto G sobre una jeneratriz conocida AMGN, bastará solo construir otra segunda jeneratriz A' del mismo modo, empleando para ello el proce-

dimiento del núm. 549 si el paraboloide está definido por un plano director P, y si lo fuese por tres directrices B, B' y B", paralelas al mismo plano, emplearíamos la marcha del núm. 521. Despues de conocidas las dos jeneratrices A y A', las cortarémos con un plano tirado por el punto G paralelamente a las directrices B y B', y la recta GH que unirá los puntos de seccion, estará situada (núm. 551) sobre el paraboloide; luego el sistema de las dos rectas AG y GH, que ellas mismas son sus propias tanjentes, determinará el plano tanjente de la superficie para el punto dado G.

557. Si solo se señalase la proyeccion horizontal *g* del punto de contacto, sin dar la jeneratriz que le contiene, sería preciso, en primer lugar, hallar la segunda proyeccion de este punto. Para esto, haríamos pasar por *g* un plano vertical cualquiera, cuyas intersecciones con diversas jeneratrices determinaríamos, estos puntos nos dárian en seguida las proyecciones verticales de la seccion causada en la superficie; hecho esto, proyectaríamos el punto *g* a esta curba, y de este modo tendríamos las dos proyecciones *g* y *g'* del punto de contacto, mui fácil sería tirar la jeneratriz que, pasando por este punto, se apoyase en B y B'; de modo que nos hallaríamos otra vez en el caso precedente.

558. La superficie gausa que nos ocupa *es idéntica con el paraboloide hiperbólico* que hemos descrito con el núm. 89. Con efecto, esta superficie gausa es *de segundo grado*, porque sin efectuar los cálculos, es fácil ver que las condiciones por medio de que espresaríamos que la recta móvil A tiene siempre un punto comun con B y con B', y permanece paralela al plano P elejido, si queremos, por uno de los planos coordenados, conducirán a una equacion que no pasará de segundo grado; y esta consecuencia concuerda con la última observacion del núm. 554. En seguida, esta superficie gausa no admite *ninguna seccion plana que sea una curba* CERRADA, como lo vamos a demostrar (núm. 564). Ademas de esto, no puede ser un cilindro de base hiperbólica o parabólica en virtud de ser gausa; por consiguiente, es preciso que coincida con el paraboloide hiperbólico (núm. 89), pues que todas las demas superficies de segundo grado admiten, por su misma jeneracion, secciones elípticas. (*Véase* libro II, cápitulo I).

559. SECCIONES PLANAS *del paraboloide hiperbólico*. La curba de interseccion de esta superficie con un plano dado π, la obtendremos

construyendo los puntos en que este plano corta a las diversas jeneratrices A, A', A",.... y la tanjente a esta curba en un punto dado, resultará de la interseccion del plano π con el plano tanjente al paraboloide, por el pnnto en cuestion, cuyo plano se construirá como en el núm. 556. En cuanto a la naturaleza de la seccion, podemos preveerla por medio de las reglas siguientes.

560. Si el plano secante π pasa por una recta A del paraboloide, la otra rama de interseccion será tambien rectilínea, supuesto que esta superficie es de segundo grado; la determinarémos hallando solamente los puntos D' y D" en que π va a encontrar a otras dos jeneratrices A' y A" del mismo modo que A, y la seccion total se compondrá de dos restas A y DD'D", de suerte que el plano π será tanjente en D y secante en todo lo demas.

561. En el caso mas particular aun, de que el plano π que pasa por A, sea paralelo al plano director P que corresponde a esta jeneratriz, no cortará este plano a las otras jeneratrices del mismo modo, de suerte que la segunda rama de interseccion que hace poco era DD'D", se alejará toda ella al infinito. Luego entónces la seccion se reducirá a solo la recta A; pero el plano π deberá considerarse siempre como tanjente al paraboloide en el punto infinitamente distante situado sobre A, o sino como un plano *asíntota* de la superficie.

562. En jeneral, sea π un plano cualquiera que no sea paralelo a la interseccion OX de los dos planos directores; dicho plano cortará a estos segun las rectas δ y δ' que tampoco serán paralelas a OX, y entónces existirá en cada sistema una jeneratriz paralela a π. Con efecto, conduzcamos por la directriz B un plano BCE paralelo a la traza δ; este plono cortará precisamente a la directriz B' en cierto punto N", tirando por este punto la recta N"M" A" paralela a δ, irá a encontrar a la directriz B, y evidentemente será una jeneratriz paralela al plano π. Si operamos de un modo enteramente semejante respecto a la traza δ', tirando por la jeneratriz A un plano paralelo a δ', este cortará a otra recta A' del mismo sistema en un punto D', por el cual podremos tirar otra jeneratriz B" que será paralela a δ' y al plano π. De aquí debemos concluir que la seccion dada con el plano π presenta dos ramas abiertas, que converjirán hácia los puntos infinitamente distantes en que π

vaya a encontrar a las dos jeneratrices A" y B"; y así, esta seccion será *una hipérbola* cuyas asíntotas vamos a construir.

Tiremos por la jeneratriz A" un plano π' paralelo a P; este plano π' será tanjente (núm. 561) al paraboloide en un punto situado al infinito sobre A"; luego la interseccion de este plano tanjente con el plano π de la curba, nos dará la asíntota de la rama que converje hácia A", y esta asíntota será evidentemente paralela a esta jeneratriz. La otra asíntota nos la dará así mismo la interseccion del plano π con un plano π" tirado segun B" paralelamente al segundo plano director Q, y será paralela a B".

563. Finalmente, supongamos que el plano secante π sea paralelo a la interseccion OX de los dos planos directores, en cuyo caso sus dos trazas δ y δ' sobre estos últimos, serán tambien paralelas a OX. Si en este caso queremos ensayar el obtener una jeneratriz paralela a π, será preciso tambien tirar por B un plano BCE paralelo a δ; pero entónces, este plano no cortará ya a ninguna de las jeneratrices B', B",.... porque evidentemente será paralelo a Q; luego la jeneratriz paralela a π, en el sistema A, se traslada toda ella a una distancia infinita. Lo mismo sucederá con la jeneratriz que, en el sistema B, sea paralela a π, de suerte que la seccion ocasionada por el plano π será abierta, supuesto que hai en ella jeneratrices cada vez mas distantes que indefinidamente se aproximarán a ser paralelas a π; pero esta curba *no tendrá asíntotas*. Con efecto, esta última línea nos la daria, segun hemos visto en el número precedente, la interseccion del plano π con otro plano π' o π" paralelo a P o a Q, tirado segun la jeneratriz paralela a π; pero esta jeneratriz está toda ella transportada al infinito; luego tambien el plano π' se alejará indefinidamente, y no nos dará ya asíntota. Por consiguiente, la seccion relativa al caso actual es *una parábola*.

564. Recapitulando esta discusion, vemos que: 1.° *todo plano π paralelo a la interseccion* OX *de los dos planos directores* (*), *da una* SEC-

---

(*) *Veremos en el núm.* 572 *que esta recta* OX *es* el eje principal *del paraboloide, o a lo ménos, le es paralela, porque los dos planos directores no están determinados en cuanto a su posicion absoluta, sino solo en cuanto a su direccion.*

CION PARABOLICA, *y si, ademas,* π *es paralelo a uno de estos planos directores, esta parábola se reduce a una recta sola* (núm. 561).

2.° *Si el plano secante* π *no es paralelo a la interseccion* OX *de los dos planos directores, la seccion es* UNA HIPERBOLA; *pero esta dejenera* EN DOS RECTAS QUE SE CORTAN, *si el plano secante contiene ya una jeneratriz de la superficie* (núm. 560).

3.° *En ningun caso, puede ser la seccion producida por un plano cualquiera* π *en el paraboloide* UNA CURBA CERRADA.

565. Observemos tambien que las construcciones indicadas en el núm. 562 servirán para resolver este problema: *hallar sobre un paraboloide dado, una jeneratriz que sea paralela a un plano conocido* π. Habrá dos soluciones cuando este plano π no sea paralelo a la interseccion de los dos planos directores; y el problema será imposible cuando π sea paralelo a esta interseccion, a no ser que al mismo tiempo lo sea tambien a uno de los planos directores, en cuyo caso existirán una infinidad de soluciones, dadas por todas las jeneratrices paralelas a este plano director.

PROBLEMA. *Representar un paraboloide enjendrado por una recta móvil* A *que resbala sobre dos rectas fijas* B *y* B_2, *permaneciendo siempre paralela un plano director dado* P; *y construir el plano tanjente a esta superficie, en un punto conocido.*

566. Con el fin de dar a este depurado toda la simetría que deberíamos tratar de obtener en la construccion de un modelo en relieve, harémos observar que un plano Q paralelo a las dos rectas dadas B y B_2 sería el plano director del segundo modo de jeneracion (núm. 552) del paraboloide que buscamos; y como este plano Q está evidentemente determinado, a lo ménos en direccion, por los datos actuales del problema, nos será permitido adoptar las disposiciones siguientes:

FIG. 120. 1.° Elejirémos nuestro plano horizontal de proyeccion, perpendicular a los dos planos directores P y Q, que entónces estarán representados por sus trazas horizontales *op* y *oq*.

2.° Dirijirémos el plano vertical de proyeccion, de suerte que sea paralelo a la recta *oy* que divide en partes iguales al ángulo *poq*; en seguida, trazarémos las proyecciones (CD, C'D') de la recta dada B, y las proyecciones (EF, C'F') de la otra directriz B_2, teniendo cuidado de

que las dos proyecciones horizontales CD y EF, deberán ser necesariamente paralelas entre sí, segun la condicion 1.ª, pues lo serán a la traza *oq* del plano director Q.

3.º Podemos tambien levantar o bajar nuestro plano horizontal, de modo que la línea de tierra VY' pase por el punto C' en que se cruzan las dos proyecciones verticales de las directrices B y B_2; y en este caso, las trazas horizontales CE de estas rectas, se hallarán sobre una misma perpendicular CE a la línea de tierra.

4.º Limitarémos estas directrices a los dos puntos (D, D') y (F, F') en que van a encontrar al plano vertical DOF tirado perpendicularmente por el medio de CE; de modo que la figura CDEF será un rombo, cuyo centro O será la proyeccion del *eje* del paraboloide, como lo veremos mas adelante (núm. 572), con tal que las directrices B y B_2 estén *igualmente inclinadas* sobre el actual plano horizontal. A la verdad, esta última condicion podrá mui bien no quedar satisfecha por las directrices que asigne la cuestion; pero *concederémos que se verifica aquí*, y por consiguiente que los puntos (D, D') y (F, F') están a la misma altura, en atencion a que en todos casos sabremos hallar (núm. 572) entre las jenetrices del paraboloide, dos rectas que esten igualmente inclinadas sobre la vertical, y que en el acto pudiesen sustituirse a las directrices dadas (CD, C'D') y (EF, C'F'), cuando estas últimas no llenasen dicha condicion.

567. Sentado esto, la recta que reuna los puntos (D, D') y (E, C') FIG. 120. será evidentemente paralela al plano director P, supuesto que su proyeccion horizontal DE será paralela a la traza *op* de este plano vertical P segun las consideraciones 2.ª y 4.ª del número precedente. Luego (DE, D'C') es una posicion de la jeneratriz móvil A; y como lo mismo sucederá con la recta (CF, C'F'), vemos que si se dividen en un mismo número de partes iguales las dos directrices dadas (CD, C'D') y (EF, C'F'), y unimos en seguida los puntos de division 0 y 16, 1 y 15, 2 y 14, 3 y 13,.... hallarémos por este medio las diversas jeneratrices del sistema A, a saber:

(DE, D'C'),..... (GH, G'H'),..... (CF, C'F');

y ademas, todas estas rectas estarán proyectadas horizontalmente sobre paralelas a la traza *op* del plano director P.

568. En cuanto a las proyecciones verticales de estas mismas jeneratrices, formarán con sus intersecciones subcesivas, una curba D'O'F' *envolvente* de todas estas rectas, y que será una parábola. Porque cada jeneratriz G'H' nos dará evidentemente la proporcion F'G' : G'C' :: C'H' : H'D', de aquí resulta que, en la curba envolvente, dos tanjentes tiradas desde el mismo punto quedan cortadas por otra tercer tanjente en partes recíprocamente proporcionales; que es una propiedad conocida de la parábola de segundo grado. Por otra parte, como la curba D'O'F' forma el contorno aparente de la superficie sobre el plano vertical, será preciso *puntuar* las partes de jeneratrices que están al otro lado de este contorno aparente; y así, la recta (GMH, G'M'H'), por ejemplo, será visible sobre el plano vertical en la porcion G'M', e invisible en la M'H'; ademas, el punto de contacto M' que separa estas partes, estará precisamente proyectado en M sobre la diagonal DF. Con efecto, en la parábola D'O'F', tendremos, por el principio recordado arriba,

$$G'M' : M'H' :: C'H' : H'D' :: 11 : 5;$$

pero en el trapuio CDEF, tenemos tambien evidententemente que

$$GM : MH :: GF : DH :: 11 : 5;$$

de donde concluimos que G'M' : M'H' :: GM : MD, y por consiguiente el punto M' se proyecta en M. Esta circunstancia, que se reproduce en todas las jeneratrices, prueba que la parábola D'O'F' no es otra cosa que la seccion dada por el plano vertical DOF, en el paraboloide de que tratamos.

565. Si proyectamos ahora este mismo paraboloide sobre un plano vertical VZ" paralelo a la diagonal CE, las directrices primitivas se convertirian en las rectas (CD, C"D") y (EF, E"D"): y probaríamos, como arriba, que las proyecciones de las jeneratrices forman por sus intersecciones subcesivas, otra parábola C"O"E" que representará la seccion causada en la superficie por el plano vertical COE. El lector que esté familiarizado con la aplicacion del análisis a la Jeometría de las tres dimensiones, reconocerá en los planos verticales OY y OZ que nos dan estas parábolas, *los planos diametrales principales* del paraboloide hiperbólico, que deben cortarse (núm. 91) segun el *eje* único de esta su-

perficie; con efecto, vamos a demostrar (núm. 572) que este eje es la recta (O, O'X').

570 El paraboloide hiperbólico admite, segun hemos visto en el núm. 551, otro segundo sistema de jeneratrices rectilíneas que son paralelas al plano director Q, determinado por las dos directrices primitivas B y B_2, o (CD, C'D') y (EF, C'F'); este, en el caso presente, es el plano vertical *og*. Por consiguiente, estas nuevas jeneratrices estarán proyectadas horizontalmente sobre paralelas a la traza *oq;* y así, como ellas deben, ademas, apoyarse sobre dos rectas del sistema A, por ejemplo, sobre (DE, D'C') y (CF, C'F'), cuyas estremidades corresponden ya (núm. 566) a planos verticales DC y EF paralelos a *oq*, vemos que será suficiente dividir en un mismo número de partes iguales a estas dos nuevas directrices (DE, D'C') y (CF, C'F'), y unir en seguida los puntos de division 0 y 16, 1 y 15, 2 y 14, 3 y 13....; de este modo obtendrémos las diversas jeneratrices del sistema B, a saber : FIG. 120.

(CD, C'D'),..... (*g*M*h*, G'M'H'),..... (FE, F'C').

571. Estas rectas del sistema B se confundirán en la proyeccion vertical con las del sistema A ya construidas; porque en el rombo CDEF, es evidente que los puntos G y *g*, H y *h*, se hallan de dos en dos sobre perpendiculares a la línea de tierra; y así, las proyecciones verticales de estas jeneratrices B, serán aun tanjentes a la parábola principal D'O'F'; pero las partes visibles, como (M*h*, M'H'), caerán sobre las partes puntuadas de las jeneratrices A, y recíprocamente. Por esto, y por dejar subsistente a la vista la distancia de las dos napas *anterior* y *posterior* al plano vertical DOF, no hemos querido representar las jeneratrices del sistema B como realmente existentes, pero las hemos marcado sobre el plano horizontal con rectas mistas.

Una coincidencia análoga se efectuará sobre el plano vertical VZ", en el que las jeneratrices del sistema B serán tambien tanjentes a la parábola principal C"O"E".

572. Para hallar *la cúspide* y *el eje* del paraboloide hiperbólico, es preciso recurrir al análisis, o sino admitir como definiciones, que es permitido sentar las relaciones siguientes: EL EJE *del paraboloide es una recta paralela a los dos planos directores* P *y* Q, *de tal naturaleza que corta a la superficie en un punto por el cual pasan dos jeneratrices que*

ámbas son perpendiculares a este eje; ademas, este punto se llama CUSPIDE (núm. 91). En virtud de esto, vemos que cuando los datos son cualesquiera, será preciso, en jeneral, tirar un plano π perpendicular a P y Q, y en seguida, hallar por el núm. 565, las dos jeneratrices que son paralelas a π. Hecho esto, el punto de encuentro de estas dos rectas será la cúspide pedida; y una perpendicular a π, tirada por este punto, será el eje de la superficie.

Pero en el caso presente, en que hemos adoptado (núm. 566) los datos mas simétricos, es evidente que el eje del paraboloide es vertical, y que por el punto (O, O') pasan dos jeneratrices horizontales (K'O'I', KOI) y (K'O'I', *k*O*i*); luego el punto (O, O') es la cúspide pedida, y por consiguiente, el eje es la recta (O, C'O'X').

FIG. 120. Entre las condiciones admitidas en el núm. 566, solo hai una que no siempre estará a nuestro arbitrio satisfacer; esta es la que supone que las dos directrices dadas están *igualmente inclinadas* sobre el plano horizontal, elejido segun lo hemos hecho. Cuando no se verifique esta relacion, solo resultará que los puntos D' y F' no se hallarán a la misma altura, y que el centro O del rombo CDEF formado segun se ha dicho (núm. 566), no será la proyeccion de la cúspide de la superficie; pero entónces hallarémos esta cúspide por el método jeneral, o mas sencillamente tirando a la parábola D'O'F' *una tanjente horizontal*. Ademas, podremos tambien proporcionarnos dos directrices, como las que ya hemos admitido, tirando a la parábola dos tanjentes igualmente inclinadas sobre la vertical, y mirando a estas rectas como dos jeneratrices del paraboloide, hallarémos fácilmente sus proyecciones horizontales, que nos servirán para formar el rombo cuyo centro corresponderá exactamente a la cúspide de la superficie.

573. Para manifestar claramente la forma inversa de las dos napas del paraboloide, que una está encima y otra debajo de la única cúspide (O, O') en que se reunen sin discontinuidad, cortemos a esta superficie con diversos planos perpendiculares al eje (O, C'O'X'). Sea L'R' uno de estos planos; este encuentra a las proyecciones verticales de las jeneratrices que hemos construido, en puntos que proyectarémos sobre el plano horizontales, y que formarán una curba compuesta de dos ramas indefinidas, pero separadas, LM*l*, BN*r*. Esta curba necesariamente es una hipérbola (núm. 562) cuyo eje real es en la actualidad (MN, M'N');

pero si el plano secante estuviese debajo de la cúspide, como T'W', entónces la seccion que aun sería (núm. 562) una hipérbola TUW, *tuw*, tendria por eje real a la recta (U*u*, U'); y si este plano secante pasase precisamente por la cúspide (O, O'), la seccion se reduciria a las dos rectas (KOl, K'I') y (*k*O*i*, K'I'), cuyas proyecciones horizontales son las asíntotas comunes a las dos seccionns precedentes.

574. *El plano tanjente* por un punto cualquiera del paraboloide, dado por su proyeccion horizontal λ, se obtendrá tirando las jeneraírices $\lambda\alpha$ y $\lambda\beta$, respectivamente paralelas a DE y DC; y en seguida, si se proyectan sobre el plano vertical los dos puntos en que cada una de estas rectas va a cortar a los lados opuestos del rombo CDEF, hallarémos de este modo las proyecciones verticales de estas jeneratrices, y no habrá mas que hacer pasar un plano por estas dos rectas. No harémos aquí estas construcciones, temerosos de hacer algo confuso el depurado; pero no presentarán ninguna dificultad al lector.

CAPITULO IV.

De los planos tanjentes a las superficies gausas jenerales.

El hiperboloide de una napa y el paraboloide hiperbólico son, entre las superficies gausas, las mas sencillas que pueden concebirse, porque *todas sus directrices* son *rectilíneas*; y así es que son las únicas cuya equacion no se eleva sino al segundo grado, y por esta razon, se las llama *las dos superficies gausas de segundo grado*. Como la construccion de sus planos tanjentes es fácil, se ha tratado de reducir a ellas la solucion de las cuestiones semejantes relativas a las superficies gausas jenerales, y se ha conseguido por medio del lema siguiente.

575. LEMA. *Cuando dos superficies gausas* S *y* S' *tienen una jeneratriz comun* GLMN, *y se tocan en tres puntos* L, M *y* N *de esta recta,* FIG. 116.

entónces estas dos superficies SE IDENTIFICAN *completamente en todo el largo de esta jeneratriz,* es decir que, en cada punto de esta recta, el plano tanjente es comun a ámbas superficies.

Supuesto que en L las dos superficies tienen un plano tanjente comun, y que sucede lo mismo en los puntos M y N, tres planos cualesquiera tirados por estos puntos, cortarán a las superficies S y S' segun las curbas respectivamente tanjentes,

$$Aa,\ Bb,\ Cc \quad \text{y} \quad A'a',\ B'b',\ C'c',$$

de las cuales las tres primeras se podrán adoptar por *directrices* de la recta móvil G, cuando esta describe la superficie S, en tanto que las otras tres curbas serán las directrices relativas a S'. Sentado esto, haremos resbalar la jeneratriz G sobre las tres directrices A*a*, B*b* y C*c*, y la colocarémos en una posicion infinitamente próxima *glmn*; esta recta móvil no habrá dejado de hallarse al mismo tiempo sobre la segunda superficie S', porque las curbas directrices de esta, que son tanjentes a las otras, tienen comun con ellas los elementos lineales L*l*, M*m* y N*n*; luego las rectas G y *g*, así como tambien todas las posiciones intermedias de la jeneratriz, son comunes a las superficies S y S', lo que desde luego nos da lugar a concluir que teniendo comun estas superficies *el elemento superficial* comprehendido entre G y *g*, e indefinido en lonjitud, *se tocarán* en todo el largo de la recta G. Pero para establecer mas claramente aun esta consecuencia, cortemos a las superficies S y S' por otro cuarto plano arbitrario, tirado por el punto tambien arbitrario H: en este caso, las secciones serán dos curbas D*d* y D'*d'*, que precisamente pasarán por los dos puntos H y *h* en que este plano secante encuentra a las rectas G y *g*; luego las curbas D*d* y D'*d'*, que tienen dos puntos comunes infinitamente próximos, se tocarán segun el elemento H*h*, o bien tendrán la misma tanjente H*h*T. Por consiguiente, los planos tanjentes de S y de S' en el punto H, coincidirán exactamente uno con otro, supuesto que cada uno de ellos deberá pasar por las rectas GH y HT.

576. Si las superficies gausas S y S' son del jénero de las que admiten *un plano director,* bastará, para que se identifiquen todo el largo de una jeneratriz comun G, que solo tengan *dos planos tanjentes comunes* en dos puntos de esta recta, *y que ademas, el plano director sea el*

misme para una y otra superficie. Esta proposicion se demostrará exactamente como la precedente, e inmediatamente debemos conocer porque, en el caso actual, no se exijen sino dos planos tanjentes comunes; porque tan luego como las directrices A*a* y A'*a*', B*b* y B'*b*', son respectivamente tanjentes, y que ademas es el mismo el plano director, esto manifiestamente es bastante para que la recta G que resbala sobre A*a* y B*b* paralelamente a este plano director, *no cese de hallarse a la vez sobre las dos superfiicies*, cuando esta recta pasa de la posicion G a la posicion infinitamente próxima *g*.

Las dos teoremas precedentes sobre el contacto de las superficies gausas, son no solamente útiles en muchas cuestiones de estereometría en que se quiere *identificar* esta clase de superficies, sino que tambien sirve de base al método que se emplea para construir sus planos tanjentes o sus normales, cuya determinacion es tambien necesaria para construir las *juntas* de las dovelas de ciertos arcos.

577. Del plano tanjente *cuyo punto de contacto se nos da.* Sean A*a*, B*b* y C*c* las tres directrices de una superficie gausa cualquiera S, y H el punto de una jeneratriz GLMN, para el cual se nos pide el plano tanjente. Tirarémos las tanjentes LT, MU y NV, a las directrices dadas, y haciendo resbalar la recta G sobre estas tres tanjentes fijas, obtendrémos (núm. 521) *un hiperboloide* de una napa que tendrá evidentemente en L, M y N, los mismos planos tanjentes que S. Luego estas dos superficies se tocarán (núm. 575) en todos los puntos de la jeneratriz GLMN; y por consiguiente, la indagacion del plano tanjente de la superficie S en el punto H quedará reducida a la del plano tanjente a este hiperboloide en este mismo punto, problema cuya solucion se ha indicado en el núm. 530; pero vamos a dar un método mas sencillo aun en el núm. 579. FIG. 117.

578. Observemos ademas, que para construir un *hiperboloide de identificacion* al largo de la jeneratrlz G, no es necesario emplear precisamente las tres tanjentes LT, MU y NV: basta adoptar por directrices tres rectas cualesquiera, situadas respectivamente en los planos GLT, GMU y GNV, que toquen a la superficie S en los puntos L, M y N; porque el hiperboloide formado de este modo tendrá manifiestamente tres planos tanjentes comunes con la superficie S. Por consiguiente, *el hiperboloide de identificacion* es susceptible de una infinidad de

formas; y así, entre todos estos hiperboloides tanjentes, habrá uno que presentará un contacto mas íntimo con la superficie S, y que se llama hiperboloide *osculador*; pero como su construccion no nos es útil por ahora, hablarémos de él cuando tratemos de la curbatura de las superficies (*véase* núm. 744).

579. Un *paraboloide de identificacion* presenta el método mas simple para construir el plano tanjente de una superficie gausa jeneral S. Con efecto, en el plano tanjente de S en N, que está determinado por GN y NV, podrémos siempre trazar una recta NR que sea paralela al mismo plano que LT y MU; porque esto se reduce a cortar al plano tanjente GNV con un plano paralelo a LT y MU. Si entónces adoptamos las tres rectas LT, MU y NR, que son *paralelas a un solo plano* para dirijir el movimiento de la jeneratriz G, obtendrémos (núm. 553) un paraboloide que tendrá tambien tres planos tanjentes comunes con la superficie S, en los puntos L, M y N: luego el plano que toque a S en H, será el mismo (núm. 575) que el plano tanjente del paraboloide formado de este modo; y este último plano se construirá por el sencillo método del núm. 556. Mui pronto presentarémos un ejemplo de estas construcciones en el problema del núm. 608.

580. Cuando la misma superficie S admita *un plano director* P, bastará entónces adoptar las tanjentes LT y MU a las dos curbas directrices para hacer resbalar a la jeneratriz GLM paralelamente al plano P; segun esto, esta recta describirá inmediatamente un paraboloide que tendrá *dos planos tanjentes comunes* con S y *el mismo plano director*. Luego (núm. 576) este paraboloide tocará a la superficie S en todo el largo de GLM; de modo que construyendo el plano tanjente de este paraboloide respecto al punto H (núm. 556), este será tambien el plano que tocará a la superficie S en este punto (véase el ejemplo del núm. 598).

581. Si una de las directrices lineales estuviese reemplazada por una superficie directriz Σ, a la que debiese permanecer tanjente la jeneratriz de S (núm. 516), la curba $\alpha\alpha'\alpha''$,... formada por la série de puntos de contacto de las jeneratrices $G\alpha$, $G'\alpha'$, $G''\alpha''$,.... con Σ, sería en el fondo la tercera directriz lineal; pero sin construir esta curba ni su tanjente, no hai mas que observar, que el plano tanjente de la superficie Σ en el punto α, es el mismo que el plano tanjente de la superficie gausa

propuesta S, porque uno y otro deben contener a la recta $G\alpha$ y a la tanjente de la curba $\alpha\alpha'\alpha''$.... Por consiguiente, bastará trazar *en el plano tanjente* de Σ, relativo al punto α, una recta cualquiera αR, la que unida a las *tanjentes* Σ, de las otras dos directrices lineales, servirá tambien para formar una superficie ausiliar de segundo grado, que tendrá tres planos tanjentes comunes con S, de los cuales sacarémos el mismo partido que en el núm. 577. Este método tendrá aplicaciones útiles en los depurados relativos a las escaleras de piedra y de madera: véase tambien el ejemplo del núm. 604.

582. Por último, puede suceder que la definicion de la superficie gausa S, no nos dé a conocer inmediatamente tres directrices, como hemos citado ejemplos en el núm. 519; o bien, que siendo dadas estas directrices, no sepamos construir sus tanjentes. En este caso, representemos por G la jeneratriz sobre que se halla el punto H, para el cual queremos hallar el plano tanjente, y construyamos varias jeneratrices próximas.... G_3, G_2 y G', G",.... que precedan y sigan a la propuesta. En este caso, un plano π tirado arbitrariamente por la recta G, cortará a estas jeneratrices próximas en los puntos α_3, α_2, α', α'', que nos darán una curba $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$...., cuyo encuentro α con G nos hará conocer el punto en que el plano π *toca* a la superficie S; con efecto, como este plano π contiene a la recta $G\alpha$ y a la tanjente de la curba $\alpha\alpha'\alpha''$...., será seguramente tanjente a S en el punto α. Así mismo, dirijiendo por la recta G otro plano π', hallarémos el punto β en que será tanjente a S, y en seguida otro tercer plano π'', tirado por G, tocará a esta superficie en cierto punto γ. Sentado esto, trazarémos en los tres planos tanjentes π, π' y π'' las rectas arbitrarias αR, βT y γV, que adoptarémos por directrices de una superficie gausa de segundo grado, la cual tocará a la superficie propuesta S en todo el largo de la recta G (núm. 578); luego la determinacion del plano tanjente de S en el punto H, quedará reducida a hallar el plano tanjente de la superficie ausiliar de segundo grado, para este mismo punto; cuyo problema se resolverá como en el núm. 530 o 556, segun se hayan elejido las tres directrices rectilíneas paralelas o no paralelas, a un mismo plano.

583. De aquí resulta *que todo plano* π *tirado por una recta* G *de una superficie gausa, es,* en jeneral, *tanjente a esta superficie en cierto punto* α, que se determina construyendo, como arriba, la curba $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$....

segun la que este plano corta a la superficie propuesta. Sin embargo, el plano π se convertirá en *asíntota* de la superficie, si la curba $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$.... no encuentra a la recta G sino al infinito, como ha sucedido con el hiperboloide en el núm. 546; y tambien, si este plano no cortase a las jeneratrices próximas a G, como en el caso del paraboloide examinado en el núm. 561.

584. Lo que precede nos pone en estado de resolver un problema interesante, a lo ménos con respecto a la teoría; este es el de *construir la tanjente a una curba* D *trazada arbitrariamente,* y enteramente desconocida en cuanto a sus propiedades jeométricas, pero dada por sus dos proyecciones.

Para esto (*), hagamos pasar por esta curba una superficie gausa S que tenga por directrices a la cuba D y a dos rectas A y B tomadas a discrecion. Despues de haber construido la jeneratriz Gα que pase por el punto α dado sobre la curba D, sabremos hallar por el núm. 582 el plano tanjente de S para el punto α, *sin emplear la tanjente incógnita de la directriz* D. Así mismo formando otra segunda superficie gausa S', cuyas directrices sean la curba D y dos rectas A' y B', diferentes de las primeras, sabremos tambien construir el plano tanjente de S' para el punto dado α. Y como la curba D se halla al mismo tiempo sobre las dos superficies S y S', su tanjente en el punto α deberá estar situada en los dos planos tanjentes de que acabamos de hablar; y por consiguiente, nos la dará la interseccion de estos planos.

Para simplificar las operaciones gráficas, podrémos formar las dos superficies gausas S y S', con dos solas directrices D y A, D' y A', añadiendo ademas a estas un plano director comun P. Una sola superficie S' sería suficiente, si la curba D fuese plana, porque el plano de esta curba deberia contener a la tanjente pedida.

585. De los planos tanjentes *cuyo punto de contacto no es dado.*

(*) *Debemos este método injenioso a* M. Hachette. *Pero es preciso confesar que, en la práctica, la multitud de operaciones que exije, no producirá un resultado mas cierto que si nos contentásemos con tirar esta tanjente por medio de la regla, haciendo que tuviese un arco pequeño comun con la curba propuesta.*

Podremos aplicar a las superficies gausas los métodos jenerales indicados en el libro V para esta clase de problemas; pero en el caso actual, son susceptibles de algunas simplificaciones notables.

Si el plano tanjente a la superficie S, está solo sujeto a *pasar por un punto dado* V, el problema será susceptible de una infinidad de soluciones (núm. 348), dadas todas por *la línea de contacto de un cono circunscrito* a la superficie S, y cuya cúspide esté en V. Para hallar esta curba, bastará tirar por el punto V, y por cada una de la varias jeneratrices G, G', G"...., planos que todos sean tanjentes a la superficie S, en los puntos α, β, γ...., que ya sabremos construir (núm. 583); en este caso, la curba $\alpha\beta\gamma$.... que reuna todos estos puntos, será la línea de contacto que buscamos.

586. Esta marcha será mui cómoda, cuanda la superficie S sea de segundo grado; porque la línea ausiliar $\alpha_3\alpha_2\alpha'\alpha''$ del núm. 582 que sirve para hallar el punto de contacto α del plano tirado por la jeneratriz G, se reducirá a *una recta* de la cual será suficiente construir dos puntos; y la curba definitiva $\alpha\beta\gamma$.... será tambien plana y de segundo grado (núm. 353).

Podríamos referir al caso presente el problema del número anterior, construyendo el paraboloide de identificacion al largo de cada jeneratriz G de la superficie arbitraria S.

587. Cuando el plano tanjente a la superficie S, deba ser *paralelo a una recta dada* D, dirijirémos, por las diversas jeneratrices G, G,' G",.... planos paralelos a D; y determinando (núm. 583) sus puntos de contacto α, β, γ,... con la superficie S, la curba $\alpha\beta\gamma$,... será *la línea de contacto de un cilindro circunscrito a* S *y paralelo a* D; por consiguiente, esta curba $\alpha\beta\gamma$.... nos dará todas las soluciones del problema propuesto (núm. 378).

588. Si la superficie S es de segundo grado, hallarémos las mismas simplificaciones que ya indicamos en el núm. 586; y podremos referir al caso actual, el problema análogo respecto a una superficie cualquiera S.

589. Cuando el plano tanjente a una superficie gausa arbitraria S deba *pasar por una recta dada* D, no habrá mas que seguir la marcha jeneral indicada núm. 395, que consiste en hallar los puntos comunes a las curbas de contacto de dos conos que estén circunscritos a S, y que tengan sus cúspides colocadas sobre la recta D.

590. Pero si la superficie gausa es de segundo grado, resolverémos

el problema de un modo mucho mas sencillo, por medio de las consideraciones siguientes. El plano tanjente que buscamos deberá contener, ademas de la recta D, a las dos jeneratrices del hiperboloide (o del paraboloide) que se cortan en el punto de contacto incógnito; luego, por lo ménos, una de estas jeneratrices irá a encontrar a D en un punto M, en el cual esta última recta irá a penetrar al hiperboloide.

En virtud de esto, si principiamos por hallar (núm. 534, 5.º) los dos puntos M y M" en que la recta dada D corta jeneralmente a la superficie; y si en seguida, construimos las cuatro jeneratrices MA y MB, M'A' y M'B' que pasan por estos dos puntos, no habrá mas que dirijir por las rectas D y MA, D y MB dos planos que cumplirán con el problema, porque serán tanjentes en alguna parte a la superficie (núm. 545). Ademas, como el plano DMA contiene patentemente a la jeneratriz M'B' que tiene un punto M' en este plano, y que necesariamente encuentra a MA, y que el otro plano DMB contendrá, así mismo, a la jeneratriz M'A', vemos que los puntos de contacto α y β de estos planos tanjentes, nos los dará a conocer inmediatamente el encuentro de MA con M'B' y de MB con M'A'.

591. De aquí resulta que el problema en cuestion será imposible, siempre que no encuentre la recta D al hiperboloide. Sin embargo, es preciso no comprehender en esta esclusion, al caso en que llegando esta recta a coincidir con una arista del cono asíntota, fuese ella misma asíntota de la superficie; en este caso, el plano tanjente pedido sería el que tocase a este cono al largo de la recta D.

592. Finalmente, consideremos el caso en que el plano tanjente que buscamos deba ser *paralelo a un plano dado* π. Si la superficie gausa S es cualquiera, será preciso tambien recurrir a la marcha jeneral del núm. 421; pero podremos sustituirle los métodos siguientes, cuando la superficie sea de segundo grado.

593. Respecto a un *hiperboloide* gauso, indagarámos, como en el núm. 548, las jeneratrices A y B, A' y B' que en los dos sistemas sean paralelas al plano π; sabemos que las dos primeras serán paralelas entre sí, y que las otras dos nos presentarán una relacion semejante. En este caso, el plano conducido por las rectas A y B', lo mismo que el que pase por B y A' cumplirán evidentemente con el problema, pues cada uno de ellos contiene dos rectas paralelas a π y que se cortan. Ademas, co-

noceremos inmediatamente los puntos de contacto, pues se hallarán en el encuentro de las jeneratrices A y B', B y A'; y el problema podrá darnos dos soluciones, una sola, o ninguna, segun la discusion hecha en el núm. 547.

594. Respecto a un *paraboloide* gauso, hallarémos mas fácilmente, segun el número 565, las dos *únicas* jeneratrices A y B que en los dos sistemas son paralelas al plano π; y como estas dos rectas podrán, en el caso presente, ser paralelas entre sí (núm. 554, 3.°), el plano tirado segun estas dos líneas será paralelo a π, y nos dará la *única* solucion del presente problema. Ademas, el punto de contacto de este plano tanjente, nos le dará inmediatamente el encuentro de las jeneratrices A y B.

Hubiéramos podido contentarnos con construir una sola de las jeneratrices A, y tirar en seguida por ella un plano paralelo a π; pero entónces tendríamos que hallar el punto de contacto de este plano tanjente, inquiriendo la segunda rama de su interseccion con el paraboloide, que precisamente sería la jeneratriz B. El problema puede ser imposible o indeterminado, conforme a lo que hemos dicho en el núm. 565.

595. Teorema. *En toda superficie gausa* S, *las varias normales* MN, M'N', M"N",.... *tiradas por todos los puntos de una misma jeneratriz* G, *forman siempre un paraboloide hiporbólico.* FIG. 118.

Si representamos por Σ la superficie lugar de todas estas normales, y la hacemos dar un cuarto de revolucion al rededor de la recta G, cada normal MN, que es ya perpendicular a este eje de rotacion, describirá un plano y se abatirá segun una recta MT que formará ángulos rectos con GM y MN; por consiguiente, MT se hallará en el plano tanjente de la superficie S. Ademas, como esta mudanza simultánea de todas las normales, solo altera la posicion de la superficie Σ, y no su forma, bastará examinar cual es la superficie Σ' producida por las diversas rectas MT, M'T', M"T",.... que son *tanjentes* a S, y cumplen tambien con la condicion de ser todas *perpendiculares a la jeneratriz* G.

Para esto, harémos resbalar la recta G sobre tres de estas tanjentes sean cuales fueren, a saber: MT, M'T', M"T"; y como estas directrices son evidentemente paralelas a un mismo plano, formarémos de este modo un paraboloide (núm. 553) que como tiene los mismos planos tanjen-

tes en los puntos M, M', M'', que la superficie S, *tocará* a esta superficie (núm. 575) en todo el largo de GMM'. Pero, decimos que las otras tanjentes M'''T''',.... están así mismo situadas sobre este paraboloide; porque, si le cortamos con un plano perpendicular a GM tirado por el punto M''', sabemos (núm. 551) que la seccion será *una recta* M'''R, que por razon de la *identificacion* establecida entre S y el paraboloide, estará contenida en el plano tanjente de la superficie primitiva S, es decir, en el plano GM'''T'''; de donde se sigue que las dos rectas M'''R y M'''T''' coincidirán completamente, porque una y otra serán perpendiculares a GM''', y las tres estarán colocadas en un mismo plano GM'''T''': luego M'''T''' está ciertamente situada sobre el paraboloide que hemos construido con las tres primeras tanjentes. Como ademas, este mismo raciocinio podria aplicarse a todas las demas tanjentes de S, perpendiculares a la jeneratriz G, quedará probado que la superficie Σ', que es el lugar de estas tanjentes, es un paraboloide hiperbólico; y esta misma conclucion se estiende tambien a la superficie Σ formada por las normales MN, M'N',.... porque esta no se diferencia de Σ' sino en su posicion en el espacio (*).

Este teorema es notable por su jeneralidad, pues subsiste para todas las superficies gausas, y servirá para señalar la naturaleza de las *juntas* normales en las bóvedas en que la *dovela* sea gausa, y para preveer tambien la forma de las secciones producidas en estas juntas por diversos planos.

(*) *Esta demostracion tan sencilla y puramente sintética, se debe a* M. J. Binet.

CAPITULO V.

Diversos ejemplos de superficies gausas.

§ 1.º *Conoide recto.*

596. Hemos dicho (núm. 520) que un conoide era la *superficie en-* FIG. 121.
jendrada por una recta móvil que se apoyaba constantemente sobre UNA RECTA *y sobre una curba fijas, permaneciendo paralela a un plano dado.* En el caso presente, tomarémos a este plano director por plano horizontal de proyeccion, y por directrices a la elipse (AZ'H, AH) y a la vertical (O'Z', O); si esta última recta es perpendicular al plano director, será el conoide *recto.* Las diversas jeneratrices se construirán mui fácilmente; porque bastará conducir un plano horizontal arbitrario B'G', que cortará al eje en el punto (O, O"), y a la elipse en los puntos (B', B) y (G', G); uniendo en seguida estos puntos, hallarémos (OB, O"B') y (OG, O"G'), que serán dos jeneratrices del conoide; y las otras se obtendrán de un modo semejante.

597. Es cierto que esta superficie será *gausa*; porque por mas próximos que estén dos puntos B' y C' tomados sobre la directriz, las jeneratrices correspondientes (BO, B"O") y (CO, C'O"') no serán paralelas, porque sus proyecciones horizontales se cortan en O; y ademas estas jeneratrices no podrán cortarse en el espacio, en atencion a que están situadas en planos horizontales diferentes. Ademas, es preciso observar que estas rectas prolongadas indefinidamente formarán otra segunda napa proyectada en el espacio angular *aOh*; y que la vertical (O, O'Z'), segun la que se cortan las dos napas de la superficie, será en el caso actual una *línea de estriccion*, en virtud de que indicará la direccion de la distancia mas corta entre dos jeneratrices cualesquiera.

598. El plano tanjente de este conoide, respecto a un punto (M, M') dado sobre una jeneratriz, se obtendrá aplicando el método jeneral indicado en el núm. 580. Tracemos la tanjente B'T en el punto de la elipse en que termina la jeneratriz de que tratamos (OMB, O"M'B'),

y como la otra directriz (O, O'Z') es una recta que es ella misma su propia tanjente, la conservarémos, y haremos resbalar sobre esta vertical O y sobre la tanjente B'T, la jeneratriz (OMB, O"M'B') siempre horizontal: de este modo, obtendrémos un *paraboloide de identificacion*, en el que la recta TO es evidentemente otra segunda jeneratriz del mismo sistema trazada en el plano horizontal de proyeccion. En este caso, cortemos a las dos jeneratrices OT y (OMB, O"M'B') con el plano vertical MP *paralelo* manifiestamente *a las dos directrices*, el cual deberá dar por seccion (núm. 551) en el paraboloide. *una recta* del segundo sistema que será (MP, M'P'). Esto supuesto, el plano que pase por las dos rectas (MP, M'P') y (MB, M'B'), situadas ámbas sobre el paraboloide, será el plano tanjente de esta superficie ausiliar, y tambien del conoide propuesto, puesto que estas dos superficies se identifican (núm. 576) en todo el largo de la jeneratriz (OMB, O"M'B'). Pero es fácil ver que este plano tendrá por traza horizontal a la recta Pα paralela a MB, y por traza vertical a la recta αB' que tambien debe ser paralela a M'P'; y así, PαB' es el plano tanjente al conoide en el punto (M, M').

599. Si quisiéramos hallar el plano tanjente relativo a otro punto (N, N') situado sobre la misma jeneratriz, nos serviria aun el paraboloide que hemos construido; y sería suficiente cortarle con el plano vertical NQ paralelo a las dos directrices, y la seccion que sería la recta (NQ, N'Q'), combinada con la jeneratriz (NB, N'B'), nos daria el plano QβB' por plano tanjente al conoide en (N, N'). En vista de esto, conocemos que los varios planos tanjentes de esta superficie, tirados al largo de la jeneratriz (OB, O"B'), son mui diferentes unos de otros, aun cuando todos contienen a esta jeneratriz; y por consiguiente, sus trazas horizontales son todas paralelas a OB. Finalmente, si se señalase el punto de contacto en (O, O"), el plano tanjente se convertiria entónces en el plano vertical OBB'.

600. Está bien observemos que todas las rectas B'T, M'P', N'Q'.... deben ir a encontrar a la vertical O'Z' en un mismo punto que llamarémos ω', por ser estas las proyecciones de otras tantas jeneratrices del paraboloide, pertenecientes al segundo sistema y que todas deben apoyarse sobre la jeneratriz del primer modo (OO', ω'). Ademas, como las rectas M'P', N'Q',.... serian evidentemente las tanjentes de las secciones hechas en el conoide por los planos verticales MP, NQ,:... la relacion

precedente corresponde mui bien a la naturaleza de estas curbas, que en el caso actual son elipses que todas tienen *un eje comun* O'Z', y que se construyen fácilmente proyectando sobre el plano vertical, los puntos en que cada plano, tal como el MP, encuentra a las diversas rectas OA, OB, OC,.... del conoide.

§ 2. *Conoide circunscrito a una esfera:*

601. Figurémonos *una recta móvil que permaneciendo siempre horizontal, se apoye sobre una recta fija* (AH, A'H') *y sobre una esfera* (RI, O'I') *a la que permanezca siempre tanjente*; la superficie descrita de este modo será tambien un conoide, en el cual estará reemplazada la directriz curbilínea con una superficie a que deberán tocar las diversas jeneratrices. Para obtener estas últimas, tirarémos un plano horizontal cualquiera C'S', que encuentre a la recta fija en el punto (C, C'), y corte a la esfera segun un círculo cuyo radio sea K'S'; en este caso, tirando a la proyeccion horizontal de este círculo, las dos tanjentes CM y C*m*, estas serán dos jeneratrices del conoide, que se proyectarán verticalmente segun la única recta C'*m*'. Ademas, si proyectamos sobre esta última recta, los puntos de contacto M y *m* a M' y *m*'; y si en seguida repetimos operaciones semejantes con todos los planos horizontales que pueden cortar a la esfera dada, hallarémos una curba cerrada FIG. 123.

(RLMNPQR*qpnml*R, R'L'M'N'P'Q'R"*q'p'n'm'l'*R'),

por línea de contacto de la esfera con el conoide circunscrito; si esta curba la hubiésemos conocido desde un principio, hubiera podido reemplazar a la esfera directriz.

602. Con el fin de tener mas limpieza en el depurado, hemos supuesto que las jeneratrices del conoide estaban terminadas en sus puntos de contacto con la esfera, de este modo queda *visible* toda la parte de esta superficie, situada del otro lado de la curba de contacto respecto a la recta (AH, A'H'); pero del lado de acá de esta recta existe otra segunda napa del conoide, cuya parte *superior* y *visible sobre el plano horizontal* está formada por las prolongaciones Bλ, Cμ, Dν,.... de las jeneratrices *inferiores* B*l*, C*m*, D*n*,.... de la otra napa, y recíprocamente. Ademas, para completar el contorno aparente del conoide sobre el plano horizontal, sería preciso trazar las curbas *envolventes* de las rectas AR, B*l*, C*m*,.... y GR, FQ, EP,....; curbas que inmediatamente nos darian las

intersecciones subcesivas de estas jeneratrices, si no hubiéramos temido que multiplicândolas mas, ívamos a ocasionar alguna confusion en el depurado.

603. En el caso presente, la recta (AH, A'H') no es otra cosa que una línea de *estriccion*, que es lo mismo que sucedia en el ejemplo del núm. 597; pero por las razones citadas en este artículo, verémos que la presente superficie es tambien *gausa*, lo mismo que lo son *todos los conoides*.

604. Determinemos el plano tanjente relativo a un punto cualquiera (V, V') situado sobre la jeneratriz (CM, C'M'); y como al presente la segunda directriz es una superficie, y no una curba, empleemos el método del núm. 581. En virtud de esto, construirémos en primer lugar, una tanjenta a la esfera en el punto (M, M'), y para mayor sencillez, adoptémos la tanjente del meridiano que manifiestamente es (RMT. Z'M'T'); haciendo en seguida resbalar sobre esta tanjente y sobre la directriz rectilínea (AH, A'H'), a la recta (CM, C'M') manteniéndola siempre horizontal, formarémos un paraboloide que se *identificará* (núm. 576) con el conoide en todo el largo de esta jeneratriz; ademas, otra posicion de esta recta móvil será evidentemente la línea TH situada en el plano horizontal de proyeccion. Sentado esto, tirémos por el punto (V, V'), un plano paralelo a las dos directrices (AH, A'H') y (MT, M'T'); este plano que tiene por traza horizontal a la línea XY fácil de hallar, debe causar en el peraboloide una seccion rectilínea (núm. 551), que es por consiguiente, la recta (αV, α'V'); en cuyo caso esta racta unida a (CVM, C'V'M'), determinará un plano $\alpha\beta\gamma'$ que será tanjente al paraboloide, y tambien al conoide primitivo en el punto (V, V').

605. Este plano, aun cuando es tanjente al conoide, debe cortar a esta superficie (números 512 y 583); y la interseccion total se compondrá de la recta (CVM, C'V'M'); y de una curba que pasará por el punto (V, V'), la que obtendrémos con facilidad hallando los puntos de encuentro del plano $\alpha\beta\gamma'$ con las diversas jeneratrices del conoide que hemos construido.

§ 3. *Bóveda aviajada, llamada : Cuerno de vaca.*

FIG. 122. 606. Esta superficie, que se emplea algunas veces para embovedar un *pasaje al sesgo* comprehendido entre dos planos verticales paralelos

AC y BD, tiene por jeneratriz a una recta móvil que constantemente se apoya 1.° sobre el círculo vertical (AZ'B, AB); 2.° sobre otro círculo (C'Z'D', CD) igual y paralelo al primero; 3.° sobre una recta O'OO" perpendicular a los dos círculos precedentes, y tirada por el centro O del paralelógramo ABDC. Para construir las diversas posiciones de la jeneratriz móvil, tiraremos por la recta OO' un plano cualquiera OO'K', este cortará a los dos círculos en los puntos (K', K) y (L', L), y uniéndolos por medio de una recta (KL, K'L'), esta será una jeneratriz de la superficie en cuestion. Así mismo (M'N'O', MNO") será otra posicion de la recta móvil; y cuando esta línea llegue a pasar por los dos puntos de las circunferencias que están proyectados en Z', dicha recta será horizontal y ya no encontrará a la directriz OO' si no es al infinito. Del otro lado de esta posicion, la jeneratriz móvil se inclinará en sentido contrario, e irá a cortar a la directriz OO' detras del plano vertical (*).

607. La superficie enjendrada de este modo es *gausa*, porque como dos jeneratrices cualesquiera se hallan en planos tirados segun OO', no podrian cortarse sino sobre esta recta, y las actuales van a encontrarla en puntos diferentes, como se ve por las proyecciones horizontales BD, KL, MN,..... Por otra parte, estas diversas proyecciones formarán por medio de sus intersecciones subcesivas, una curba envolvente de todas estas rectas, que será el contorno aparente de la superficie sobre el plano horizontal. En cuanto a la naturaleza de esta curba, y a la equacion de la superficie misma, se podrá consultar *el Análisis aplicado a la jeometria de las tres dimensiones*, capítulo XV.

(*) *Habria, en verdad, otro medio de hacer que la recta móvil llenase la condicion de apoyarse constantemente sobre las tres directrices asignadas. Porque si esta recta, pasando siempre por el punto fijo* O, *resbalase sobre el semi-círculo* superior (AZ'B, AB), *necesariamente encontraria tambien a la mitad* inferior *del segundo círculo, y reciprocamente; de modo que la superficie orijinada así sería un cono de segundo grado. Pero como conocemos bien que la posicion de esta superficie no es acomodada para formar una bóveda que cubra el espacio* ACDB, *descuidamos, en el caso presente, este modo de jeneracion.*

608. Construyamos el plano tanjente de esta superficie gausa, en el punto (G, G') dado sobre la jeneratriz (MNO", M'N'O'); y para esto, formemos en primer lugar un paraboloide ausiliar que tenga por directrices a tres tanjentes de la superficie que sean *paralelas a un mismo plano* (núm. 579). Dos de estas directrices serán las tanjentes M"T" y (N'V', NV); la tercera debe ser una recta paralela al plano vertical y tirada por el punto O" en el plano que toca a la superficie en este punto. Pero como este plano tanjente debe contener a la recta O"O' y a la jeneratriz (MNO", M'N'O'), es precisamente el plano O"O'M', y por consiguiente la tercer directriz del paraboloide ausiliar es (O"μ, O'M').

Sentado esto, harémos resbalar sobre estas tres directrices a la recta móvil (MNO", M'N'O'), y determinarémos la posicion que toma cuando llega al punto (V', V), por ejemplo. Para esto, tirarémos por este punto y por la directriz (O"μ, O'M') un plano cuya traza horizontal es manifiestamente O"Vα, y la traza vertical una recta $\alpha\beta$' paralela a O'M'; en seguida, como este plano encuentra a la primera directriz M"T" en el punto (β', β), concluirémas de aquí que (βVγ, β'V'γ') es otra segunda posicion de la jeneratriz (MNO", M'N'O') del paraboloide ausiliar. Cortemos ahora a estas dos líneas con el plano vertical GH paralelo a las tres directrices, y la recta (GH, G'H') es una jeneratriz (núm. 551) perteneciente al seguudo modo de jeneracion del paraboloide; por consiguente, el plano que pase por las rectas (GH, G'H') y (MNO" M'N'O'), es decir, el O"PM' será el plano tanjente del paraboloide, y tambien de la superficie gausa propuesta, para el punto en cuestion (G, G'). Observarémos que la traza PM' debe ser precisamente paralela a la proyeccion vertical G'H' de una de las rectas que coutiene este plano.

609. De aquí deducirémos fácilmente la normal de la superficie gausa en el punto (G, G'); y construyendo del mismo modo las demas normales para los otros puntos de la porcion (M'N', MN) de la jeneratriz, obtendrémos un paraboloide hiperbólico (núm. 595) que será acomodado para formar *la junta normal* de esta pequeña bóveda.

§ 4. *De los helizoides gausos.*

FIG. 124. 610. Despues de haber construido una hélice de base circular (ABCD...., A'B'C'D'H'A"H"), figurémonos *una recta móvil* (AO, A'*a*') *que resbale sobre esta hélice y sobre su eje* (O, O'Z'), *formando, ademas,*

un ángulo constante con este eje: de este modo producirémos *un helizoide* que es preciso no confundir con *el helizoide desarrollable* considerado ya en el núm. 456, porque el que tratamos aquí es *gauso*, segun vamos a demostrar, despues de haber enseñado a construir las diversas posiciones de su jeneratriz.

611. Para obtener la que pasa por el punto arbitrario (F, F') de la hélice, tomemos sobre el eje vertical un intervalo *a'f'* igual a la diferencia de nivel de los puntos (F, F') y (A, A'), la recta (F'*f'*, FO) será la jeneratriz pedida, porque formará con el eje y el radio del cilindro que termine en el punto (F, F'), un triángulo rectángulo que evidentemente será igual a A'*a*'O'; de modo que los ángulos de los vértices de estos dos triángulos, serán ciertamente los mismos, segun lo exijia la lei del movimiento citada mas arriba. Pero para hacer que esta operacion sea mas uniforme y mas sencilla, observarémos que la traza de la hélice primitiva ha motivado (núm. 451) la division de la circunferencia ABCH.... y del *paso* de la hélice A'A", en un número de partes iguales, que en el caso presente son *catorce*; por consiguiente, si principiamos por señalar sobre el eje vertical, comenzando desde *a'*, intervalos como *a'b'*, *b'c'*, *c'd'*, *d'e'*, *e'f'*,.... iguales todos a las divisiones del paso de la hélice, no habrá mas que hacer que unir por medio de rectas, los puntos correspondientes B' y *b'*, C' y *c'*, D' y *d'*...., para obtener las proyecciones verticales C'*b'*, C'*c'*, D'*d'*,.... de las diversas jeneratrices proyectadas horizontalmente sobre los radios BO, CO, DO.....

612. Hecha esta construccion, es evidente que dos jeneratrices, por mas próximas que estén, no se hallarán nunca en un mismo plano; porque sus proyecciones horizontales se cortarán siempre en O, y los puntos situados sobre la vertical O, estarán colocados en alturas diferentes unos de otros; luego este helizoide es una *superficie gausa*.

613. Como los diversos triángulos rectángulos, formados por cada jeneratriz con el eje y el radio del cilindro que termina en el punto correspondiente de la hélice, son (núm. 611) iguales todos a A'*a*'O', síguese de aquí que la porcion de la recta móvil, comprehendida entre el eje y la hélice directriz, conserva siempre la misma lonjitud; por consiguiente, podemos tambien mirar al helizoide gauso de que tratamos, como enjendrado por *una recta de una lonjitud constante* (AO, A'*a*'), *que resbala sobre una hélice de base circular y sobre su eje.*

614. En este movimiento, en que la lonjitud de la jeneratriz y su inclinacion sobre el eje permanecen invariables, es evidente que un punto cualquiera (α, α') de esta recta móvil permanecerá a una distancia constante αO del eje vertical (O, O'Z'), es decir, que este punto se mueve sobre el cilindro recto que tiene por base al círculo $\alpha\beta\gamma$.... Ademas, como los dos estremos de la jeneratriz se elevan a un mismo tiempo una cantidad igual a $a'b'$, o $a'c'$, o $a'd'$...; sucederá lo mismo con el punto (α, α'), cuyas ordenadas verticalas *contadas desde el plano horizontal* $\alpha'\omega'$, serán siempre iguales a las ordenadas del punto (A, A') sobre el plano A'O'. Pero estas, por la naturaleza de la hélice que recorre el punto (A, A'), son proporcionales a los arcos AB, AC, AD,.... o bien a los arcos $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$,....; luego tambien estas últimas son proporcionales a las ordenadas de las posiciones que ocupa el punto (α, α') encima del plano horizontal $\alpha'\omega'$, cuando se proyecta subcesivamente a β, γ, δ...; por consiguiente (núm. 446), *la curba*

$$(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\lambda...., \alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'\lambda'\pi'\alpha''\beta''\gamma''\lambda'')$$

descrita por un punto cualquiera (α, α') de la jeneratriz, durante su movimiento, es una hélice del mismo paso que la hélice primitiva, pero trazada sobre un cilindro concéntrico al primero.

Para construir esta hélice, será suficiente que despues de haber descrito el círculo del radio $O\alpha$, proyectémos los puntos β, γ, δ,.... a β', γ', δ',.... sobre las jeneratrices trazadas ya; pero con el fin de evitar el encuentro de líneas mui oblícuas, será mejor cortar estas jeneratrices por medio de horizontales tiradas sobre $\alpha'\omega'$, a 1, 2, 3,.... veces el intervalo $a'b'$.

615. Segun esta propiedad, podríamos tambien definir al helizoide gauso, como enjendrado *por una recta que resbala constantemente sobre dos hélices concentricas, de radios designales, pero del mismo paso, y sobre el eje comun de estas dos curbas.* De este modo, asignaríamos tres directrices a la superficie, y las otras condiciones enunciadas en los números 610 y 613 quedarián satisfechas por sí mismas.

616. Es evidente que el helizoide gauso admite tambien *una napa superior*, la cual será enjendrada por la prolongacion $a'U'$ de la recta $(a'A', OA)$ que ha descrito ya la *napa superior*. Esta última es la única que hemos querido representar aquí, con el objeto de que se pueda ver

mas distintamente su forma; sin embargo, harémos observar que las dos napas no solo tendrán comun la recta (O, O'Z'), sino que *se cortarán tambien segun una o mas hélices de un mismo paso que la hélice* (ABCD...., A'B'C'D'....). Con efecto, si comparamos dos posiciones de la jeneratriz que estén situadas en el mismo meridiano, como las (AO, A'*a*'U') y (OH, *h*'H'), vemos que se cortrrán en un punto *u*' comun a las dos napas, y que constantemente permanecerá sobre una y otra, cuando sea arrastrado por el movimiento simultáneo de estas dos rectas al rededor del eje. Pero hemos demostrado (núm. 614) que en este movimiento, un punto cualquiera α' o *u*' de la jeneratriz describia una hélice concéntrica con (ABCD...., A'B'C'D'....) y del mismo paso que esta; luego ciertamente es una curba de esta naturaleza la que formará la interseccion de las dos napas del helizoide; y existirian otras secciones análogas, si se prolongasen las jeneratrices bastante léjos para que A'*a*'U' encontrase a *h*"H", *h*'"H'",.... en puntos como el *u*", *u*'",.... que describirian tambien hélices comunes a las dos napas.

617. *Representacion gráfica de la superficie.* Esta resula del conjunto de las jeneratrices subcesivas que hemos construido; y si restrinjimos el helizoide a su napa inferior, y terminamos las jeneratrices en los puntos en que se apoyan sobre la hélice directriz (ABCD...., A'B'C'D'....), el contorno aparente de la superficie sobre el plano horizontal se reducirá al círculo ABCHLA.

En cuanto al plano vertical de proyeccion, el contorno aparente se compondrá en primer lugar de las porciones A'B'C'D'G'H'L' y P'Q'A"B"C"F"H"L" de la hélice directriz; y en seguida de diversas curbas simétricas X'Y'B', *x*'*y*'L', X"Y"B",.... que serán las *envolventes* de las proyecciones verticales de las jeneratrices. Con efecto, las rectas A'*a*', B'*b*', C'*c*', D'*d*', forman con el eje O'Z' ángulos que van siempre en disminucion, y por medio de sus intersecciones subcesivas producirán un polígono cuya convexidad estará vuelta hácia el eje; y si concebimos que estas jeneratrices se han multiplicado indefinidamente, este polígono se convertirá en una curba X'Y'B' que será tanjente a cada una de estas rectas, y que tendrá por *asíntota* a la jeneratriz particular *a*'A' cuya inclinacion sobre el eje es *máxima* en la proyeccion vertical. Esta curba tocará tambien al eje O'Z' que es él mismo la proyeccion de una jeneratriz de la superficie, en cierto punto X' situado entre *d*' y *e*';

y en seguida, continuará teniendo por tanjente a las prolongaciones de las jeneratrices E'*e*', F'*f*', G'*g*', H'*h*', de las cuales la última sería una nueva *asíntota*. Pero, como en el caso presente, no existe la napa superior del helizoide, la curba envolvente de las jeneratrices se reducirá a la parte comprehendida desde el punto X' hasta el punto (situado hácia B') en que la jeneratriz del helizoide se halla, en la proyeccion vertical, tanjente a la sinusoide A'B'C'D'; solo en esta última parte, la curba envolvente se confundirá sensiblemente con la recta B'*b*'.

Así mismo, la rama *x*'*y*'L' del contorno aparente, se trazará haciéndola tanjente al eje entre los puntos *n*', *p*', y tanjente tambien a las jeneratrices *n*'N', *m*'M' y *l*'L', hasta que toque a la sinusoide H'L'M'; y si debiésemos prolongarla mas lejos, tendria por *asíntota* a la jeneratriz *h*'H'. Finalmente, operarémos del mismo modo respecto a las otras ramas X"Y"B", *x*"*y*"L" (*).

618. *Secciones notables.* Si cortamos al helizoide gauso con un plano tirado segun el eje (O, O'Z'), tendrémos evidentemente por seccion líneas rectas, que serán otras tantas posiciones diversas de la jeneratriz; y si para cortar la superficie empleamos un cilindro vertical $\alpha\beta\gamma\delta\lambda\pi$ concéntrico con la hélice directriz, resulta de lo que hemos probado en el núm. 614, que la seccion será otra hélice $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\lambda'\pi'$.... del mismo, paso que A'B'C'D'L'P'....

619. Cortemos ahora el helizoide con un plano horizontal cualquie-

---

(*) *Aconsejamos que se tracen las curbas* X'Y'B', *x*'*y*'L',.... *haciendo que sean primeramente tanjentes a la sinusoide y a las proyecciones de las jeneratrices, porque este procedimiento nos dará toda la exactitud gráfica que puede desearse, con multiplicar suficientemente las jeneratrices que son mui fáciles de construir. Sin embargo, si quisiéramos determinar* los puntos de contacto *de esta curba, no habrá mas que tirar por cada jeneratriz* un plano perpendicular al plano vertical, *y derminar en segnida el punto en que este plano es* tanjente al helizoide, *empleando, para conseguirlo, el método que espondrémos en el núm.* 627; *en cuyo caso, la serie de todos estos puntos de contacto pertenecerá rigurosamente al contorno aparente* X'Y'B' *de la superficie; pero esta marcha será mui laboriosa.*

ra G"a". Bastará proyectar sobre el plano horizontal, los puntos G", W", ε", S",.... en que el plano secante encuentra a las proyecciones verticales de las jeneratrices de la superficie, y obtendrémos la espiral OIKSεWG.... que se estenderá indefinidamente, si se prolongan bastante léjos las jeneratrices siguientes h"H", l"L",.... Ademas, si la napa superior (núm. 616) formada por la prolongacion de las rectas R'r', Q'q',.... existiese, como en el caso actual, quedaria cortada por el mismo plano G"a" segun otra rama O$ik\delta$.... perteneciente a la misma espiral, y estas dos ramas tendrian por tanjente comun al diámetro AOH; porque los radios OKC y OIB, son secantes, cuyos dos puntos de seccion con la espiral se reunen en uno solo O, cuando llegamos a la posicion OA.

620. La seccion que acabamos de obtener es *una espiral de Arquímedes*. Con efecto, en virtud del modo segun que acabamos de construir (núm. 611) las jeneratrices del helizoide, vemos que cada una de estas rectas tiene por diferencia de nivel entre sus dos estremidades, un intervalo constante igual a O'a' que en el caso actual comprende *seis* divisiones del paso de la hélice; y en seguida, como los puntos F", E", D",.... están debajo del plano G"a", 1, 2, 3,.... de estas divisiones, resultará evidentemente que tendrémos en el espacio

$$F''W''=\tfrac{1}{6}F''f'',\ E''\varepsilon''=\tfrac{2}{6}E''e'',\ D''S''=\tfrac{3}{6}D''d'',\ldots$$

y como las proyeciones horizontales de estas rectas deben estar divididas en la misma razon, tendremos tambien

$$FW=\tfrac{1}{6}FO,\ E\varepsilon=\tfrac{2}{6}EO,\ DS=\tfrac{3}{6}DO,\ldots$$

o bien

$$OI=\tfrac{1}{6}OB,\ OK=\tfrac{2}{6}OC,\ OS=\tfrac{3}{6}OD\ldots$$

En virtud de esto, vemos que en un punto cualquiera W de la espiral, tendrémos la relacion jeneral

$$\frac{OW}{OF}=\frac{AF}{AG},\ \text{o}\ \frac{\rho}{R}=\frac{u}{\frac{6}{7}\pi},$$

llamando ρ al radio vector de este punto, u al ángulo correspondiente medido en el círculo que tiene por radio a la unidad, y R al radio dado OA. Y así, supuesto que la equacion precedente prueba que ρ y u cre-

cen proporcionalmente, la curba es ciertamente *una espiral de Arquímedes*; pero para introducir en ella, segun se estila, el radio vector constante R' que corresponde a la primera revolucion total, no hadrá mas que tomar a

$$R'=\tfrac{14}{6}R, \text{ y nos resultará } \rho=R'\frac{u}{2\pi}.$$

La fraccion $\frac{14}{6}$ espresa en la actualidad la razon del paso de la hélice A'A" a la altura O'*a*' que hemos tomado arbitrariamente, para fijar la primera jeneratriz del helizoide gauso.

FIG. 124. 621. *Del plano tanjente por un punto dado* sobre una jeneratriz cualquiera (DO, D'*d*'). Supongamos primeramente que el punto asignado sea (D, D') situado sobre la hélice directriz; tirando en seguida la recta DT igual al arco DA y perpendicular a DO, sabemos (núm. 449) que el punto (T, T') será el pie de la tanjente a la hélice; por consiguiente, el plano tanjente relativo al punto (D, D') estará determinado por el conjunto de las dos rectas (DO, D'*d*') y (DT, D"T'), y este plano tendrá evidentemente por traza horizontal a VT.

Sea ahora (δ, δ') un punto cualquiera de la misma jeneratriz. Sabemos (núm. 614) que por este punto pasa una hélice cuyo nacimiento (α, α') se determina describiendo el arco $\delta\alpha$, y proyectando α a α' sobre la jeneratriz A'*a*'. Por otra parte, es fácil construir la tanjente sin trazar esta curba: porque, si despues de haber tirado la recta TO, tiramos la $\delta\theta$ paralela a DT, es evidente que tendremos $\delta\theta=\delta\alpha$; luego si proyectamos θ a θ' sobre el *plano de nacimiento* $\alpha'\omega'$, obtendrémos el pie (θ, θ') de la tanjente que buscamos que será ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$). Sentado esto, como el plano tanjente en el punto (δ, δ') del helizoide, debe contener a esta tanjente así como tambien a la jeneratriz (δO, $\delta'd'$) que va a penetrar al plano horizontal $\omega'\alpha'$ en el punto (ξ, ξ'), tendrá evidentemente por traza sobre este plano de nacimiento, a la recta $\xi\theta$, y sobre el plana horizontal primitivo, será su traza, V*t* paralela a $\xi\theta$.

Del mismo modo operarémos respecto a un nuevo punto (ψ, ψ') de la jeneratriz (DO, D'*d*'), empleando siempre el triángulo rectángulo TOD, en el cual trazarémos la recta $\psi\zeta$ paralelamente a DT, y nos dará el pie (ζ, ζ') de la tanjente a la hélice que pasa por el punto (ψ, ψ').

622. Es importante observemos aquí que *respecto a todos los*

puntos de una misma jeneratriz (DO, D'*d*'), *los triángulos rectángulos* TDV, θδξ,.... *tendrán todos bases iguales* DV=δξ=.... Con efecto, la altura del punto (D, D') encima de (A, A'), es evidentemente la misma que la del punto (δ, δ') sobre el (α, α'); por consiguiente, las porciones D'V' y δ'ξ' de la jeneratriz son iguales, y tambien deberá haber igualdad entre sus dos proyecciones horizontales DV y δξ. Pero el ángulo de la base, V o ξ, de estos triángulos es *variable*; en tanto que sería *constante* y *variable* la base, respecto a los diversos puntos de una misma hélice, en vista de que pasando del punto D a los puntos C, B,... los lados DV y DT varian en la misma razon.

De aquí resulta que los planos que tocan al helizoide en los diferentes puntos de una misma hélice, están igualmente inclinados sobre el plano horizontal.

623. Observemos tambien que para todos los puntos de una misma jeneratriz (DO, D'*d*'), *los pies de las tanjentes a las hélices, están todos situados sobre la recta* (TO, T'*a*'), lo cual nos proporciona obtener la proyeccion vertical θ' sin recurrir (núm. 621) al plano de nacimiento α'ω'. Con efecto, las alturas de los dos puntos (O, *a*') y (θ, θ') sobre el plano horizontal primitivo, manifiestamente nos darán las razones iguales

$$\frac{O'a'}{O'\omega'} = \frac{A'a'}{A'\alpha'} = \frac{AO}{A\alpha} = \frac{DO}{D\delta} = \frac{TO}{T\theta};$$

pero la igualdad entre la primera y la última de estas fracciones, indica que las ordenadas verticales de los puntos (O, *a*') y (θ, θ') son proporcionales a sus abscisas contadas desde el punto (T, T'); luego estos tres puntos se hallan en línea recta.

624. De aquí se sigue que las tanjentes (DT, D'T'), (δθ, δ'θ'), (ψζ, ψ'ζ'),.... a las hélices descritas por los diversos puntos de la jeneratriz (DO, D'*d*'), se apoyan todas sobre las rectas fijas (TO, T'*a*') y (DO, D'*d*'); y ademas, como estas tanjentes son evidentemente paralelas a un mismo plano vertical DT, resulta de aquí (núm. 549) que su conjunto forma *un poraboloide hiperbólico* que toca a la superficie del helizoide en todo el largo de la jeneratriz (DO, D'*d*').

625. Este es el mismo resultado a que hubiéramos llegado, si segun el método jeneral del núm. 577, hubiésemos querido formar *el hiperboloide de identificacion* al largo de la recta (DO, D'*d*'). Porque definien-

do el helizoide como en el núm. 615, por medio de las tres directrices (ABCD...., A'B'C'D'....), ($\alpha\beta\gamma\delta$.... $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$....) y (O, O'Z'), este hiperboloide hubiera tenido por directrices a las rectas (DT, D'T'), ($\delta\theta$, $\delta'\theta'$) y (O, O'Z'); y supuesto que las tres son evidentemente paralelas al mismo plano vertical, esta última superficie dejenera (núm. 553) en un paraboloide hiperbólico, que es el mismo de que hace poco acabamos de hablar.

626. Este paraboloide tiene por plano director del primer sistema de jeneratrices, al plano vertical DT; en cuanto al segundo sistema, el plano director deberá pasar por (TO, T'*a*') y por una paralela a (DO, D'*d*'). Pero si hacemos partir esta paralela desde el punto (O, *a*'), es fácil ver que irá a penetrar al plano horizontal en D; de modo que TD será tambien la traza horizontal del segundo plano director, y estará inclinado una cantidad angular igual a *a*'A'O', con lo cual queda completamente fija su direccion. Segun esto, vemos que los dos planos directores son a la vez perpendiculares al plano vertical OD que contiene a la jeneratriz del helizoide; de donde podemos concluir que *el eje del paraboloide* (núm. 572) *es horizontal y paralelo a* DT.

Para cualquiera jeneratriz diferente de (DO, D'*d*'), es evidente que el paraboloide de identificacion permanecerá *constante de forma*, y solo tomaria una posicion análoga respecto a la nueva jeneratriz.

FIG. 124. 627. *Hallar el punto de contacto del helizoide gauso, con un plano dado que pase por una jeneratriz conocida.* Este problema, que será útil en la *Perspectiva* y las *Sombras*, para hallar la curba de contacto del helizoide con un cono o un cilindro circunscrito a esta superficie, podrá resolverse segun lo hemos indicado números 585 y 587; o mas sencillamente aun, por los procedimientos de los números 586 y 588, siempre que principiásemos por sustituir al helizoide el paraboloide de identificacion al largo de cada jeneratriz. Pero las operaciones gráficas son aun mui laboriosas, y por lo tanto vamos a dar un método mucho mas corto, fundado en la observacion del núm. 622 (*).

Sea V*t* la traza horizontal del plano dado que pasa por la jeneratriz

---

(*) *Se ha indicado este método en el* tratado de las superficies regladas *por M. Gascheau, antiguo alumno de la Escuela Politécnica.*

(DO, D'*d*'); despues de haber construido el triángulo rectángulo TDO que determina la tanjente de la hélice en el punto (D, D') de la jeneratriz propuesta, tírese por el punto *t* una paralela *t*θ a DO, y en seguida, una perpendicular θδ; esta última nos dará a conocer el punto (δ, δ') en que el plano dado toca al helizoide. Con efecto, para construir el plano tanjente relativo a este punto (δ, δ'), será preciso (números 621 y 622) tirar en el triángulo ODT, la recta δθ perpendicular a la δO, tomar en seguida a δξ igual a DV, y la línea θξ sería la traza de este plano tanjente sobre el plano de nacimiento α'ω' de la hélice que pasase por (δ, δ'). Pero es evidente que segun las construcciones empleadas aquí arriba, la línea θξ será paralela a V*t*; y en virtud de esto, tendrémos que el plano dado y el plano tanjente en el punto (δ, δ'), tendrán sus trazas horizontales paralelas; y como ámbos pasan por la recta (ODV, *d*'D'V'), coincidirán indudablemente uno con otro.

628. Helizoide *con plano director*. La definicion jeneral del núm. 610 supone que *la recta móvil resbala sobre una hélice y sobre un eje, formando con este último un ángulo constante,* aunque arbitrario: cuando este ángulo es *recto,* todas las posiciones de la jeneratriz son evidentemente *paralelas al plano horizontal* que es tambien un *plano director* de la superficie; y esta, que siempre es *gausa,* entra entónces en el jénero de los conoides rectos (núm. 520). Es fácil ver como todas las propiedades reconocidas en el helizoide gauso jeneral, se reproducen con simplificaciones notables, en el helizoide particular que nos ocupa; por esta razon nos contentarémos con indicar la forma de este último, empleando para ello un solo plano de proyeccion, como en la *fig.* 126 que mas adelante debe servirnos para representar *una rosca.* En ella se ve la hélice descrita ABCDE.... y las diversas posiciones A0, B1, C2,.... de la recta móvil; demostrarémos en seguida, con mas facilidad aun que en el núm. 614, que todo punto α de la jeneratriz describe *una hélice* αβγδε.... *concéntrica con la primera* y que tiene *el mismo paso y el mismo plano de nacimiento* que ella.

629. En cuanto al plano tanjente de este helizoide, respecto a un punto asignado sobre una jeneratriz, se construirá tambien hallando, como en el núm. 621, el pie de la tanjente a la hélice que pase por el punto dado; y este pie se determinará así mismo por medio del triángulo rectángulo ODT de la *fig.* 124; pero en el caso presente, las trazas hori-

zontales de los diversos planos tanjentes al largo de la jeneratriz OD, partirán de los puntos T, θ, ζ,.... y *todas serán paralelas* a OD, porque esta recta *horizontal* será comun a todos estos planos.

FIG. 124. 630. Ademas, la recta (TO, T'*a*') sobre la cual estaban situados (núm. 623) los pies de las tanjentes a las diversas hélices, se reducirá en la actualidad a la línea TO, trazada en el plano horizontal; y el paraboloide de identificacion (números 624 y 626) tendrá por planos directores al plano vertical DT y al mismo plano horizontal.

631. Finalmente, el problema del núm. 627 se resolverá mui sencillamente, porque como se nos ha dado por traza horizontal del plano asignado, a una recta *t*θ paralela a OD, el punto θ en que esta traza encuentra a la línea TO, nos permitirá tirar la perpendicular θδ que nos dará a conocer el punto de contacto δ que buscábamos.

La superficie de que ahora hablamos, no solo se emplea para formar la rosca de *filete rectangular*; sino tambien para el depurado de la escalera llamado de CARACOL *circular* AL AIRE.

§ 5. *De la rosca de filete triangular.*

FIG. 125. 632. Figurémonos que un triángulo isósceles αAα', cuya base αα' coincida siempre con una arista de un cilindro vertical de base circular, y cuyo plano que constantemente pase por el eje de este cilindro, jire uniformemente al rededor de esta recta; concibamos en seguida que al mismo tiempo este triángulo se eleva cantidades proporcioneles a los espacios angulares descritos por su plano móvil, de tal suerte que al fin de una revolucion total, el triángulo jenerador se haya elevado a una altura igual a su base αα', es decir, que haya tomado la posicion α'A'α''. En este caso, el sólido enjendrado por este triángulo móvil, será el *filete* de la rosca cuyo núcleo es el cilindro primitivo.

633. Es evidente que segun estas condiciones y en virtud del núm. 446, el vértice A del triángulo describe una hélice ABCDEFA'B'.... que pertenece a un cilindro concéntrico con el primero, y cuyo paso es igual a αα'; ademas, como los lados Aα y Aα' encuentran siempre al eje, formando ángulos constantes con esta recta, resulta de aquí (núm. 610) que las dos caras del filete son porciones de dos helizoides gausos, de los cuales la *napa superior* del uno (núm. 616) forma la cara *inferior* del

tanto que la cara *superior* del fileto pertenece a la *napa inferior* del otro helizoide.

634. Para representar completamente esta rosca, será preciso, en primer lugar, construir (núm. 451), por medio del plano horizontal que hemos suprimido en el caso presente, la proyeccion vertical ABCDFA'B'..... de la hélice descrita por el punto A, observando que el *paso* AA' de esta hélice debe tomarse *igual a la base* $\alpha\alpha'$ del triángulo dado. En seguida deben referirse al eje las divisiones iguales de este paso que actualmente son *diez y seis*, principiando desde los puntos 0 y 16 en que encuentran a esta recta los lados $A\alpha$ y $A\alpha'$; lo cual produce jeneralmente dos séries distintas de puntos de division; pero aquí no forman sino uno solo, en virtud de que hemos elejido el triángulo $A\alpha\alpha'$ de modo que sus lados comprehendan, sobre el eje, un número exacto de divisiones del paso de la hélice. Sentado esto, uniendo el primer punto de division B de la hélice con los puntos 1 y 17, el punto C con 2 y 18, el punto D con 3 y 19...., obtendrémos manifiestamente las diversas posiciones del triángulo jenerador.

635. Esto no obstante, es preciso terminar estas rectas en los puntos β y β', γ y γ', δ y δ',... en que van a encontrar al núcleo cilíndrico de la rosca. Pero como estos no son otra cosa que las posiciones subcesivas que toman los puntos α y α' del triángulo móvil, resulta del núm. 614, que la curba $\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'$.... es una hélice del mismo paso que ABCDFA'....; por consiguiente, determinarémos esta nueva hélice cortando a las jeneratrices indefinidas, con horizontales tiradas desde los puntos 4 y 14, 5 y 15, 6 y 16,.... Ademas, como el punto α' es comun a los dos triángulos $\alpha A\alpha'$ y $\alpha'A'\alpha''$, sucederá precisamente que la hélice $\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'$.... será tambien producida por la interseccion de los lados $B\beta'$ y $B'\beta'$, $C\gamma'$ y $C'\gamma'$,.... lo cual nos dará una verificacion de las construcciones precedentes. Segun esto, esta hélice formará *la arista entrante* de la rosca, en tanto que la *arista saliente* será la hélice ABCDFA'....

636. En cuanto al contorno aparente de las dos caras del filete, debemos observar que no está formado por dos jeneratrices rectilíneas, sino por dos curbas XY y *xy*, que son (núm. 617) las *envolventes* de las proyecciones de las jeneratrices, y que tienen por asíntotas a las jeneratrices paritculares $A\alpha'$, y $A'\alpha'$. Sin embargo, en vista de que las

porciones de las dos hélices gausas que forman el filete, tienen poestension y están bastante distantes del eje, las líneas XY y *xy* podrán actualmente trazarse por aproximacion como *dos rectas* converjentes con α'A y α'A', que deberán tocar, una a los dos arcos AYB y α'Xβ', y la otra a los otros dos arcos A'*y*F y α'Xς. Ademas, una de estas dos ramas del contorno aparente, la primera XY oculta una parte de la segunda *xy*, que entónces debe terminarse en un punto *z* situado a la altura de α', en razon a la forma simétrica de estas dos curbas.

Estas observaciones que se aplican a cada ángulo entrante del filete situado a la izquierda, y que se reproducirán de un modo *inverso* en los ángulos entrantes situados a la derecha, son sin duda ninguna suficientes para que el lector entienda fácilmente las diversas puntuaciones por medio de las que hemos espresado, en el depurado que presentamos, las partes *visibles o invisibles* de la rosca de que tratamos. Solo añadirémos que el rectángulo UV*vu* representa el paralelipípedo que forma la cabeza de esta rosca.

§ 6. *De las roscas de filete cuadrado.*

FIG. 126. 637. El filete de esta rosca es enjendrado por un rectángulo A$\alpha\lambda$L, cuyo plano que pasa por el eje de un cilidro recto y circular, jira uniformemente al rededor de este eje, en tanto que el rectángulo se eleva al largo de las aristas del cilindro, cantidades proporcionales a los espacios angulares descritos por su plano móvil. De aquí resulta evidentemente que los puntos A y L describen, en este movimiento, dos hélices iguales, cuyo paso comun AA' o LL' puede elejirse arbitrariamente, con tal que por lo ménos sea igual al duplo de AL, a fin de dejar un paso libre al filete saliente de la tuerca que engarganta con la rosca. Ademas, los dos lados Aα y Lλ que siempre se apoyarán sobre estas hélices y sobre el eje, cortando a éste bajo un ángulo recto, enjendrarán caras gausas que pertenecerán (núm. 628) a *helizoides de plano director*; en tanto que el lado AL describirá una zona cilíndrica, que terminará esteriormente el filete de esta rosca.

638. Para representar gráficamente la rosca de filete cuadrada, es preciso primeramente construir las hélices del mismo paso ABCDEFA'F'..., LMNPQRL'R'...., sirviéndonos (núm. 451) del plano horizontal que aquí hemos suprimido; trazar en seguida de un modo semejante sobre

el cilindro del núcleo, las otras dos héiices $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\alpha'$...., $\lambda\mu\pi\rho$...., que son producidas (núm. 628) por los puntos α y λ, y cuyo paso comun $\alpha\alpha'$ debe ser igual a AA'. Estas dos últimas curbas son las intersecciones del núcleo de la rosca con las caras inferior y superior del filete, y sirven para limitar las porciones de jeneratrices $B\beta$, y $M\mu$, $D\delta$ y $P\pi$, $F\varphi$ y $R\rho$,.... que pertenecen a estas dos caras gausas. En fin, podrémos agregar algunas de las aristas del cilindro esterior, tales como BM, CN, DP,....

639. Entre las diversas líneas de que acabamos de hablar, el lector distinguirá fácilmente las que son visibles de las que están ocultas. Hemos trazado completamente unas y otras en la primera espira del filete, puntuándolas de un modo conveniente a su posicion; pero en las otras espiras, no hemos conservado sino las líneas visibles, con el fin de presentar un resultado enteramente conforme al que presentaria al espectador la vista del objeto en relieve.

§ 7. *Del conoide de la bóveda por aristas en cañon circular.*

640. Dejando a un lado las circunstancias que son especialmente relativas a la estereotomía, la presente cuestion se reduce a hallar la interseccion de un toro con un conoide, curba cuyas tanjentes dan lugar a nuevas indagaciones, que tendrán aplicaciones útiles en el *Corte de piedras*. El toro se enjendra por la revolucion del semi-círculo B'C'*b'* que, levantado en el plano vertical B'ω, jira al rededor de la vertical ω, y forma la superficie interior de la bóveda principal que se llama *lecho jiratorio*. Una puerta practicada en esta primera bóveda, y limitada en los planos verticales F*f* y G*g* que converjen hácia el eje *jiratorio*, está cubierta con un conoide cuya jeneratriz rectilínea permanece siempre horizontal, cuando resbala sobre la vertical ω y sobre otra segunda directriz formada del modo siguiente. Se rectifica el arco AOD segun su tanjente *a*O*d*, y sobre esta recta, como eje mayor, se describe una semi-elipse A"C"D" cuyo semi-eje vertical O"C" es igual al radio OB u O'B' del toro; en seguida, imajinándonos que esta elipse colocada desde luego en el plano vertical *a*O*d* esté *aplicada sobre el cilindro recto* AOD, de modo que sus abscisas coincidan con los arcos de esta circunferencia, y sus ordenadas con las aristas verticales del cilindro, dicha elipse se convertirá en una línea de doble curbatura proyectada sobre AOD, que es la que se adopta por segunda directriz o *base* del conoide. FIG. 127.

641. Sentado esto, para obtener la interseccion de este conoide con el toro, cortemos estas dos superficies con diversos planos horizontales. El que pase por el punto M' del meridiano B'C'*b'*, cortará al toro segun dos círculos descritos con los radios ωP' y ω*p'*; si en seguida indagamos los puntos M" y N" que sobre la elipse están a la misma altura que M', y tomamos los arcos OP y OQ iguales a las abscisas O"P" y O"Q", los puntos P y Q serán evidentemente las proyecciones de los puntos en que encuentra a la *base* del conoide el plano secante horizontal; y por consiguiente, las secciones producidas en esta superficie serán dos rectas proyectadas sobre ωP y ωQ. Y como estas rectas encuentran a las dos secciones circulares en cuatro puntos M, *m*, N y *n* que pertenecen a la interseccion de las dos superficies, esta se compondrá de dos ramas de doble curbatura, proyectadas horizontalmente sobre GMO*nf* y FNO*mg*.

642. Observemos 1.° que si prolongamos el conoide a la parte de acá del eje vertical ω, volverá a encontrar otra vez al toro segun otras dos ramas $G_2O_2f_2$ y $F_2O_2g_2$, que son simétricas con las primeras, y se construyen por las mismas operaciones; 2.° que las dos napas del conoide se consideran terminadas en los dos cilindros verticales B'GBF.... y *b'gbf*.... a quienes cortan segun curbas de doble curbatura, que no son otra cosa que elipses aplicadas sobre estos cilindros, y todas tienen por semi-eje vertical al radio del toro; esto es lo que evidentemente resulta de la proporcionalidad de los arcos horizontales BG y BF, o *bg* y *bf*, con los arcos OA y OD; 3.° que para hacer que el toro y el conoide sirvan para formar una *bóveda de aristas*, es preciso suprimir enteramente todas las *porciones interiores* de las jeneratrices rectilíneas y circulares, que en el caso actual están puntuadas como que son invisibles.

FIG. 127. 643. Es de notar que cada una de las curbas planas, tales como GO*f*, que reciben las proyecciones de las curbas de arista, es una *espiral de Arquímedes*. Con efecto, en virtud de la construccion que nos ha dado (núm. 641) el punto arbitrario M, el arco OP y la recta PM son respectivamente iguales a las abscisas O"P" y O'P' de los dos puntos M" y M' que corresponden a una misma ordenada vertical en la elipse y en el círculo meridiano del toro; y como estas dos curbas tienen un eje vertical comun, sabemos que estas abscisas están entre sí en la misma razon

que el eje mayor con el menor; por consiguiente, tendrémos la proporcion

$$OP : PM :: OA : AG.$$

Pero, si tomamos un arco $O\lambda$ que esté con OA, en la razon de ωO con OB, podremos reemplazar la proporcion precedente con esta

$$OP : PM :: O\lambda : O\omega, \text{ y de aquí } \lambda P : \omega M :: \lambda O : \omega O,$$

cuyo resultado nos dice que la razon del arco λP al radio vector ωM permanece constante en todos los puntos de la curba $GMOf\omega$; por consiguiente, esta curba es una espiral de Arquímedes, cuyo *orijen* está sobre el radio $\omega\lambda$ al cual toca prolongândose segun otra rama $\omega\varphi$ simétrica con la primera. Para conocer el paso de esta espiral, es decir, el radio vector que corresdonde a una revolucion entera, bastará construir una cuarta proporcional δ a las tres líneas siguientes: al arco λO, a la circunferencia total y al radio ωO; en este caso podremos, segun el método comun, contar sobre la circunferencia del radio δ, los arcos que miden el movimiento angular del radio vector móvil.

644. La curba $FOg\omega\gamma$ es tambien una espiral de Arquímedes cuyo oríjen está sobre el radio $\omega\zeta$, y no coincidirá con la precedente, sino cuando el arco $O\lambda$ sea igual a un cuarto de círculo; para obtener esta coincidencia, bastará tomar la mitad OA de la abertura de la puerta, de modo que tenga con el cuarto de círculo, la misma razon que OB con $O\omega$ Finalmente, las otras dos curbas $G_2O_2f_2$ y $F_2O_2g_2$ pertenecen tambien a dos nuevas espirales de Arquímedes que tocan a los mismos radios $\lambda\omega\lambda_2$ y $\zeta\omega\zeta_2$, pero que tienen una situacion opuesta a las primeras (*).

(*) *El análisis nos da tambien estos mismos resultados; porque si adoptemos por eje de las* x *a la recta* ωOB, *una perpendicular a esta por eje de las* y, *y finalmente la vertical* ω *por eje de las* z; *y si en seguida hacemos a*

$$\omega O = l, \ OB = R, \ y \ a \ OA = O''A'' = a,$$

hallarémos (Análisis aplicado, *cap. XIV*) *que las equaciones del toro y del conoide son* :

$$(l - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = R^2 \quad e \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = sen \ \frac{a}{Rl} \sqrt{R^2 - z^2};$$

FIG. 127. 645. *La tanjente* en un punto cualquiera M, la conocerémos por medio de la interseccion del plano tanjente al toro con el plano tanjente del conoide. Pero el primero de estos planos tiene por traza horizontal a la recta VK perpendicular a ωM, la cual se obtiene refiriendo a V el pie T' de la tanjente M'T' del meridiano circular; en cuanto al segundo plano tanjente, es preciso, primeramente, construir (núm. 580) un paraboloide que se *identifique* con el conoide en todo el largo de la jeneratriz ωPM. Para esto, tirarémos la tanjente M"T" a la elipse plana; en

---

y eliminando a z, *nos resultará para la proyeccion horizontal de la interseccion de estas dos superficies*

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \pm \operatorname{sen} \frac{a}{Rl}\left(l - \sqrt{x^2+y^2}\right),$$

simplificarémos esta equacion introduciendo en ella las coordenadas polares, por medio de las fórmulas $x = r \cos u$, *e* $y = r \operatorname{sen} u$; *porque se convertirá en*

$$\operatorname{sen} u = \pm \operatorname{sen} \frac{a(l-r)}{Rl};$$

y de aquí concluirémos que

$$u = \pm \frac{a(l-r)}{Rl}; \text{ y } \pi - u = \pm \frac{a(l-r)}{Rl},$$

o bien

$$r = l \pm \frac{Rl}{a} u, \text{ y } r = l \pm \frac{Rl}{a}(\pi - u).$$

Estas cuatro equaciones distintas, son las de las cuatro espirales construidas en el depupado; y para referir la primera, por ejemplo, al eje polar ωλ *que le es tanjente, no hai mas que recular el orijen de los ángulos* u, *que aquí se cuentan desde la línea* ωO *y a derecha de ella, haciendo a*

$$u = u' - \frac{R}{a}, \text{ de donde resulta que } r = \frac{Rl}{a} u'.$$

Esta última equacion es realmente la de una espiral de Arquímedes, cuyos ángulos u' *están contados partiendo del radio* ωλ.

seguida, aplicando esta curba (núm. 640) sobre el cilindro vertical DOA, la subtanjente será PT=P'''T'', de modo que T será el pie de la tanjente en el punto P de la *base* del conoide; en este caso, la jeneratriz ωP del paraboloide ausiliar que debe resbalar sobre esta tanjente, y sobre la vertical ω, permaneciendo siempre horizontal, tomará la posicion ωT despues de llegar al pie de esta tanjente. Sentado esto, si cortamos a las dos jeneratrices ωP y ωT con el plano vertical MS, sabemos (núm. 551) que la seccion será una recta proyectada sobre MS, que unida a la jeneratriz ωM, determinará el plano tanjente del paraboloide: luego este plano tendrá por traza horizontal a la línea SK paralela a ωM. Como ahora, las dos trazas SK y VK, de los dos planos tanjentes van a cortarse en K, resultará de aquí que KM es la tanjente que buscamos.

646. Este método no puede aplicarse inmediatamente al *punto multiplo* O, porque como con este sitio, los dos planos tanjentes son horizontales, coinciden enteramente, y queda indeterminada su interseccion. Pero si tratamos de valuar el ángulo VMK= θ que forma una tanjente cualquiera con el radio vector correspondiente, hallarémos que

$$\text{tanj}\ \theta = \frac{KV}{VM} = \frac{MS}{P'T'};$$

y en seguida, como la subtanjente P'T' del círculo equivale a la subtanjente P'''T'' o PT, de la elipse multiplicada por la razon del eje menor al mayor, nos resultará

$$\text{tanj}\ \theta = \frac{MS}{PT} \cdot \frac{OA}{OB}, \text{ o bien } \text{tanj}\ \theta = \frac{M\omega}{P\omega} \cdot \frac{OA}{OB} \ldots\ldots (1)$$

Pero en esta última espresion, la cantidad que varia con el punto de contacto M, es el factor Mω, que llega a ser igual a su denominador Pω, en el punto particular O; luego la inclinacion de la tanjente en este punto nos la dará la fórmula

$$\text{tanj}\ \theta' = \frac{OA}{OB} = \frac{Oa}{OB} \ldots\ldots (2)$$

la cual nos dice que esta tanjente Oα es precisamente *la diagonal del rectángulo* construido sobre O*a* y OB.

647. La construccion jeneral del núm. 645 es tambien insuficiente FIG. 127. para obtener las tanjentes en los cuatro puntos F, G, *g* y *f* que están en

el arranque de la bóveda; porque como en estos puntos, los planos tanjentes de las dos superficies son *verticales*, su interseccion es una vertical que será tanjente a la curba de arista en el espacio, pero que se reduce a un solo punto en proyeccion horizontal, y nada nos dice sobre la tanjente a la curba plana GO*f*, en el punto G. Sin embargo, si recurrimos a la fórmula (1) esta se convertirá respecto al punto G en

$$\text{tanj}\ \theta'' = \frac{\left(\frac{G\omega}{A\omega}\right)OA}{OB} = \frac{GB}{GA}; \ldots\ldots (3)$$

porque los arcos OA y GB son semejantes y proporcionales a sus radios Aω y Gω. De lo que evidentemente resulta que la tanjente en G será la diagonal del rectángulo construido sobre GA y sobre el arco GB rectificado; cuya operacion es estremadamente sencilla, y que para dejar mas claridad en el depurado, hemos efectuado en el punto F, formando un rectángulo con FD y Fϛ=FB.

648. Debemos tambien observar que este método tan ventajoso se aplica tambien a un punto arbitrario M; porque si en la fórmula jeneral (1), reemplazamos la razon de OA a OB=AG; con la de OP a PM, que le es igual segun el núm. 643, nos resultará

$$\text{tanj}\ \theta = \frac{\frac{M}{P} \cdot PO}{PM} = \frac{MI}{MP}; \ldots\ldots (4)$$

lo cual prueba que la tanjente LMK puede obtenerse inmediatamente, formando sobre MP y el arco MI rectificado, un rectángulo cuya diagonal será la tanjente que buscamos. En el caso presente no hemos trazado sino la mitad de este rectángulo, tomando a PL=MI, y tirando LM que deberá coincidir con la tanjente MK que está ya construida.

LIBRO VIII.

DE LA CURBATURA DE LAS LINEAS Y DE LAS SUPERFICIES.

CAPITULO PRIMERO.

Sobre las curbaturas y las evolutas de las líneas curbas.

649. Se dice que una curba y su tanjente tienen entre sí un contacto de *primer órden*, porque en jeneral no hai entre ellas sino un solo elemento comun; pero como en ciertas cuestiones hai necesidad de considerar líneas que se aproximen a confundirse con la curba propuesta, mas de lo que la tanjente lo hace con ella, es necesario distinguir estas aproximaciones mas o ménos íntimas, y así decimos que *dos curbas cualesquiera*, ya sean planas o no, *presentan un contacto de* PRIMERO, SEGUNDO, TERCER.... ORDEN, *segun tienen* UNO, DOS, TRES.... ELEMENTOS *consecutivos comunes.*

550. Como el contacto de segundo órden se presenta con mucha frecuencia en las aplicaciones jeométricas, le espresarémos comunmente por el nombre abreviado de *osculacion*; y así es que dos curbas *osculadoras* serán las que tengan *dos elementos comunes.* Para dar un ejemplo, que nos será mui útil en lo subcesivo, considerémos una curba cualquiera AMB, y despues de haberla dividido en elementos iguales (*), levan-

(*) *Si estos elementos fuesen desiguales, pero siempre infinitamente pequeños, subsistirian las mismas consecuencias, como lo probaríamos*

témos en las mitades de MM' y M'M", dos normales KO y K'O *situadas en el plano* MM'M", el cual no contendrá a los otros elementos de AMB, sino cuando esta curba sea plana. En este caso, el punto O en que se cortan estas dos normales, será el centro de un círculo $\alpha M \beta$, que pasando evidentemente por los tres puntos M, M' y M", tendrá tambien comunes con AMB los dos elementos MM' y M'M", y será por consiguiente, el *círculo osculador* de esta curba, respecto al punto M. El radio de este círculo será una de las tres distancias iguales OM, OM' u OM"; pero en su lugar, podemos adoptar una de las dos normales iguales OK y OK', porque la diferencia no es sino infinitamente pequeña de segundo órden (*véase* núm. 197).

651. Por lo que antecede, vemos que el círculo *osculador* para cada punto M señalado sobre la curba AMB es *uno solo*, en tanto que existen una infinidad de círculos que solo son tanjentes en este punto; pero el círculo osculador variará de posicion y de magnitud cuando pasemos del punto M' al M"...., porque entónces deberémos operar del mismo modo anterior con los dos elementos consecutivos M'M" y M"M"', M"M"' y M"'M"",... esto hará cambiar al radio KO en K'O', K"O",.... Mui pronto examinarémos (núm. 656) si estos radios se cortan consecutivamente.

652. El plano de círculo osculador, que no es otra cosa que el de dos elementos consecutivos MM' y M'M", o el de dos tanjentes infinitamente próximas MT y M'T', se llama tambien *plano osculador* de la curba AMB en el punto M; y a no ser que esta última sea plana, este plano osculador variará cuando pasemos de un punto a otro de la AMB. Ademas, dos planos osculadores consecutivos TM'T' y T'M"T", se cortarán siempre segun el elemento intermedio M'M".

FIG. 129. 653. En cuanto a la *curbatura* de la línea AMB en el punto M, hemos dicho ya (núm. 198) que estaba medida por el ángulo TM'T' comprehendido entre dos tanjentes infinitamente próximas, porque este ángulo,

fácilmente por medio del cálculo. No obstante, para abreviar las demostraciones, es mas sencillo suponer que los elementos se han elejido iguales, lo cual nos es siempre permitido. Véase el Análisis aplicado *cap. XVI, núm.* 351.

llamado *ángulo de continjencia* o *de curbatura*, espresa manifiestamente la cantidad que ha sido preciso desviar al elemento M'M" de su direccion primitiva M'T, para doblar la línea recta MM'T como lo está la línea poligonal MM'M"M"'.... (*). Pero el ángulo TM'T' es igual al KOK'; y como este último tiene por medida al arco ε descrito con un radio igual a la unidad, en tanto que abraza un arco KM'K' de círculo osculador cuyo radio es OK$=\rho$, tendrémos por espresion de la curbatura en el punto M, a

$$\varepsilon = \frac{\text{KM'K'}}{\text{OK}} = \frac{ds}{\rho}.$$

Pero como se ha dividido a la curba en elementos iguales, la cantidad *ds* será constante en todos sus puntos, y podremos decir que *la curbatura varia* de un punto a otro, *en razon inversa del radio* OK$=\rho$, que por esta razon, se llama tambien *radio de curbatura* de la curba en el punto M.

Con todo, observemos que para tener la medida exacta de la curbatura de una línea, y para hacer esta medida aplicable a dos curbas diferentes, en las cuales pueden los elementos, aunque infinitamente pequeños, ser desiguales de la una a la otra, y aun tener ademas una razon determinada y necesaria, es preciso considerar, no la magnitud absoluta del ángulo de continjencia ε, sino su razon con el elemento *ds*; porque solo sobre dos arcos de la *misma lonjitud*, es donde el ángulo esterior de las tanjentes estremas puede manifestar, con precision, la curbatura mas o ménos pronunciada de uno de estos arcos respecto al otro. Por ejemplo, en dos círculos concéntricos, que el radio del uno sea duplo del otro, y que las circunferencias estén divididas en un mismo número de elementos iguales, los ángulos de continjencia correspondientes a los mismos radios, serán iguales, y sin embargo, la curbatura de los dos círculos será diferente; pero si atendemos a que los elementos de la cir-

---

(*) *Está mui bien observemos que el ángulo de continjencia* TM'T' *es tambien igual al ángulo de dos planos* normales *consecutivos, supuesto que estos planos son perpendiculares en medio de los dos elementos* MM' *y* M'M".

cunferencia mayor tienen una lonjitud dupla de los de la segunda, conocerémos que la razon $\frac{\varepsilon}{ds}$ indica efectivamente una curbatura la mitad menor en el círculo mas grande que en el mas pequeño. De aquí concluimos que la verdadera espresion de la curbatura de una línea cualquiera, nos la dará siempre a conocer la razon

$$\frac{\varepsilon}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

representando por ρ el radio del círculo osculador de la curba, en el punto que se considera.

654. Todo lo que precede conviene igualmente, tanto a las curbas *planas* como a las *gausas*; haremos uso, lo mismo que M. VALLEE, de esta última espresion, en lugar de *curba de doble curbatura*, tanto para abreviar como para evitar el uso de la palabra *curbatura* en un sentido inexacto. Con efecto, una línea que no es plana, no admite sino una sola curbatura que se estima como en el número precedente; pero ademas, presenta una *flexion*, o mas bien una *torsion* que se ha orijinado haciendo jirar uno de los planos osculadores consecutivos TM'T' y T'M''T'' al rededor del elemento comun M'M''; de suerte que en una curba gausa, *la torsion* en cada punto *se mide por el ángulo de los dos planos osculadores vecinos*. Pero si este ángulo se hace nulo, abatiéndo el plano T'M''T'' sobre TM'T' por medio de una rotacion, al rededor de la recta M'M'', desaparecerá la torsion, y la curba será *plana* en la proximidad del punto que se ha considerado, *sin que su curbatura haya aumentado o disminuido*, supuesto que los ángulos de continjencia TM'T' y T'M''T'' habrán permanecido constantes; miéntras que sin cambiar nada en la posicion de estos dos planos osculadores, o en la torsion de la curba, podremos alterar su curbatura, desviando o aproximando los dos elementos MM' y M'M'': por consiguiente, *la curbatura* y *la torsion* de una línea son modificaciones independientes una de otra. Pero las curbas planas y las curbas gausas presentan, en cuanto al lugar de sus centros de curbatura, una diferencia esencial que vamos a hacer resaltar.

FIG. 129. 655. Existen siempre una infinidad de normales, para un mismo punto señalado sobre una curba cualquiera; pero la normal KO segun la que está dirijido el radio de curbatura del punto M, debe estar trazada

(núm. 650.) en el plano osculador MM'M", y la distinguirémos con el nombre de *normal principal.* Pero cuando la curba AMB es plana, todas las normales principales relativas a los varios puntos M, M', M",..., se hallan en su plano; y por consiguiente, *se cortan consecutivamente,* de modo que forman una curba OO'O"...., a la que estas diversas normales son evidentemente *tanjentes*; de donde se sigue (núm. 199) que aplicando un hilo O'"O"O'OK sobre esta *evoluta* y desarrollándolo subcesivamente, su estremo K describirá la línea AMM'M"B.

656. Por el contrario, *cuando la curba propuesta es gausa, las normales principales,* y los radios de curbatura, *no se encuentran ya consecutivamente.* Con efecto (*fig.* 130), considerémos tirados por el medio K, K', K",.... de los diversos elementos, los planos normales PQS, P'Q'S', P"Q"S",.... que se cortarán de dos en dos segun las rectas QS, Q'S',.... y de este modo formarán una superficie desarrollable (núm. 186) *envolvente* de todos estos planos. Si entónces cortamos a los planos P y P' con el plano osculador MM'M" que es perpendicular a los dos anteriores, obtendrémos por intersecciones las dos normales KO y K'O, que evidentemente determinarán el centro O del círculo osculador correspondiente al punto M, de las que la primera será el radio de curbatura relativo a este punto (*). Así mismo, cortando los planos normales P' y P" con el segundo plano osculador M'M"M'", tendrémos por seccion las normales K'O' y K"O', la primera de las que será tambien el radio de curbatura relativo al punto M'. Pero este radio K'O' no coincide con la otra normal K'O, puesto que estas rectas provienen del mismo plano P' cortado por dos planos osculadores distintos; y así, K'O' va a encontrar a QS en un punto I diferente del O; y por consiguiente, no teniendo los dos radios de curbatura consecutivos KO y K'O' ningun punto comun sobre la interseccion QS de los planos P y P' que los contienen, no podrán ellos mismos encontrarse. FIG. 130.

657. De aquí resulta que no siendo dados los centros de curbatura

---

(*) *Mas adelante, nos será útil observemos aquí que todo esto viene a reducirse a bajar desde el punto* K, *una perpendicular* KO *a la jeneratriz* QS *de la superficie que es involucro de los planos normales.*

O, O', O'',... por las intersecciones subcesivas de los radios de curbatura KO, K'O', K''O'',.... la curba que se hiciese pasar por todos estos centros *no tendria por tanjentes* a estos mismos radios; y por consiguiente, no podrian mirarse a estos como formados por el desarrollo de un hilo que envolviese a la línea OO'O''.... Luego, finalmente, *el lugar de los centros de curbatura de una curba gausa* AMM'M''.... *no es una* EVOLUTA *de esta última línea.*

FIG. 130. 658. Sin embargo, la curba gausa AMM'M''.... admite una infinidad de evolutas, como lo hizo ver MONGE. En efecto, si en el primer plano normal P, trazamos arbitrariamente una recta KD, que será siempre normal a la curba propuesta, e irá a encontrar a QS en un punto D; y tiramos en seguida por los puntos K' y D la recta K'DD' que estará en el segundo plano normal P', y en seguida la recta K''D'D'' situada en el plano P'', y así de las demas : obtendremos, por medio de las intersecciones subcesivas de estas normales, una curba DD'D''D'',... a la cual estas normales serán *tanjentes*, y que podrá servir para describir la línea AMM'.... por medio del desarrollo de un hilo aplicado al contorno de esta *evoluta* DD'D''.... Para probarlo, basta hacer ver que las porciones DK y DK' de las laujentes a esta evoluta, son iguales entre sí, o bien que el punto D está a igual distancia de los tres puntos M, M' y M''; esto resulta de que siendo la recta QS la interseccion de dos planos P y P' tirados perpendicularmente en medio de los elementos iguales MM' y M'M'', cada punto de QS se halla a la misma distancia de M, M' y M''; y por esto la recta QS se llama la *línea de los polos* del arco MM'M'', y las distancias DK, D'K', D''K'',.... son los *radios de la evoluta* que es preciso no confundir con los radios de curbatura KO, K'O', K''O''.... Como por otra parte, la primera normal KD se ha tirado arbitrariamente en el plano P, podremos, por consiguiente, haciendo variar la direccion de esta normal, obtener una infinidad de evolutas, situadas todas sobre la *superficie desarrollable* que es el involucro de los planos normales P, P', P'',.... de la curba AMM'M''....

659. Esta superficie, *lugar de todas las evolutas* de la curba AMM'..., o bien *lugar de todos los polos* de esta línea, tiene por jeneratrices rectilíneas a las intersecciones subcesivas QS, Q'S', Q''S'',... de los planos normales; y estas rectas, que precisamente se cortan de dos en dos, forman de este modo (núm. 578) *la arista de retroceso* UV de esta superficie

sarrollable. Ademas, como cada jeneratriz QS es perpendicular al plano osculador correspondiente MM'M", y pasa por el centro de curbatura O, en que se cortan las dos normales iguales KO y K'O, resulta manifiestamente de aquí que *los ángulos* KDO y K'DO, *formados por dos tanjentes de la evoluta con la jeneratriz intermedia* QS, *son iguales*; y por consiguiente (núm. 187), podemos afirmar que *cada evoluta* DD'D"..... *se convertirá en una línea recta*, cuando se desarrolle la superficie involucro de los planos normales. Esto quiere decir (núm. 187) que esta evoluta es *la línea mas corta* que puede trazarse sobre la superficie desarrollable, entre dos de sus puntos; por consiguiente, un hilo que amarrado en K estuviese tendido y aplicado libremente sobre esta superficie desarrollable, tomaria por sí mismo la forma de una de las evolutas KDD'D"...., porque a causa de su elasticidad, dicho hilo no podrá permanecer en equilibrio sobre la superficie, sino cuando haya seguido el camino mas corto.

" En vista de esto, dice *Monge*, se concibe fácilmente la posibilidad de enjendrar una curba cualquiera de doble curbatura, por un movimiento contínuo. Porque despues de haber construido la superficie desarrollable a quien son tanjentes todos los planos normales de la curba, si desde un punto dado en el espacio y por el que deba pasar la curba, se dirijen dos hilos tanjentes a esta superficie; y si despues de haberlos aplicado sobre la superficie y de haberlos tendido, se fijan en los otros estremos; el punto de reunion de los dos hilos, que tendrá la facultad de moverse con el plano tanjente de la superficie, sin resbalar ni sobre el uno ni el otro de los hilos, enjendrará en su movimiento la curba propuesta".

660. Cuando la curba AMM'.... sea *esférica*, es decir, situada enteramente sobre una esfera de un radio cualquiera, todos los planos normales P, P', P",.... irán a pasar precisamente por el centro de esta esfera, y su involucro, que es el lugar de todas las evolutas de AMM'.... se reducirá, en el caso presente, a un cono cuya cúspide estará colocada en el centro de la esfera de que tratamos. Este punto único podrá considerarse como que es una evoluta particular de la curba AMM'..., y con efecto, un hilo amarrado a este centro, podrá jirar al rededor de este punto, sin alargarse sensiblemente, en tanto que el otro estremo permanecerá sobre la curba AMM'.... cuyos puntos todos están a una distancia constante del centro. FIG. 130.

661. Finalmente, si la curba AMM'.... fuese *plana*, todos los planos normales P, P', P",.... serian perpendiculares al plano de esta curba, así como tambien lo serian sus intersecciones consecutivas QS, Q'S',.... de modo que el involucro de estos planos normales, se reduciria a *un cilindro*, sobre el cual estarian situadas *todas las evolutas que admitiese aun la curba plana* AMM'.... Ademas, cada una de estas evolutas DD'D".... será en este caso *una hélice;* porque sus varias tanjentes, o los radios de evoluta KD, K'D',... formarán todos ángulos iguales (num. 659) con las rectas paralelas QS, Q'S',.... que son las jeneratrices de este cilindro. Por otra parte, *el lugar de los centros de curbaturas* OO'O".... *se convertirá al presente en una verdadera evoluta*, porque esta curba será la seccion recta del cilindro involucro, que desde luego podemos mirar como una hélice cuyo paso es nulo; pero esta línea OO'O".... será, entre todas las evolutas de la curba AMM'...., la única plana. Y así, por ejemplo (*fig.* 96), la voluta del círculo ABCDL.... tiene por evoluta plana al círculo $A\beta\gamma\delta\lambda$..., en tanto que por evolutas gausas admite a todas las hélices que como ($A\beta\gamma\delta\lambda$...., $A'\beta'\gamma'\delta'\lambda'$....), tienen su oríjen en el punto (A, A').

FIG. 129. 662. Observemos ahora que el círculo osculador $\alpha M\beta$ de la curba plana AMB, jeneralmente cruza a esta curba, es decir, que se halla *fuera de ella* a la izquierda del punto M, y a la derecha está *dentro* de la curba. Con efecto, la parte rectilínea OK del hilo que abraza a la evoluta OO'O".... va aumentando contínuamente a medida que se desarrolla luego los radios de curbatura que preceden a OK, son menores que esta recta, y los que la siguen son mayores; luego tambien el arco MA de la curba propuesta estará contenido dentro del arco de círculo $M\alpha$, en tanto que M"B se hallará fuera de $M''\beta$, a lo ménos en las inmediaciones del punto M que ahora consideramos. Sin embargo, cuando la evoluta presenta un punto de retroceso, como sucede en los vértices de una elipse (*fig.* 76), en este caso, el radio de curbatura es un *mínimo* o *un máximo*, y el círculo osculador se halla, tanto a la derecha como a la izquierda del punto de contacto, colocado dentro de la curba, o fuera de ella. En este caso particular, el círculo osculador adquiere un contacto de tercer órden con la curba.

FIG. 130. 663. Una circunstancia análoga nos presenta el plano osculador MM'M" de una curba gausa AMB; es decir, que *este plano jeneralmente*

cruza a la curba, dejando debajo de él al arco MA, y encima al M"B, porque la torsion de los elementos producida (núm. 654) por la diferencia de inclinacion de los planos osculadores consecutivos, persevera en jeneral en el mismo sentido. Sin embargo, como por la prosecucion de *continuidad* de la curba propuesta, no varia la inclinacion del plano osculador, sino por grados infinitamente pequeños, si hubiese un punto singular en que esta torsion cambiase de sentido, no podrá tener lugar esto, sino cuando el *ángulo de torsion* haya pasado por cero; y en este lugar de la curba, tres elementos consecutivos estarán situados en un mismo plano osculador, que en el caso actual se hallará todo él encima de la curba AMB, o todo debajo de ella.

664. *Construir el plano osculador relativo a un punto asignado sobre una curba gausa.*

Sea N el punto señalado sobre la curba gausa VNU, que deberá estar definida por sus dos proyecciones. Si para obtener aproximativamente dos tanjentes infinitamente próximas, tiramos la del punto N y otra *extremadamente vecina,* dos rectas tan cercanas determinarán con poca precision la traza del plano que las contiene. Por consiguiente, será mejor construir diferentes tanjentes a la curba VU, tanto por el punto N como por otros varios situados a distancias medianas, detras y delante de N; y en seguida, hallar las trazas de estas tanjentes sobre el plano horizontal, por ejemplo, y reunir todos estos puntos por una curba contínua ALD que será la traza de la superficie desarrollable, lugar de todas las tanjentes a la curba VU. Como hecho esto, sabemos (núm. 181) que el plano tanjante de esta superficie, es el plano osculador de su arista de retroceso, no habrá mas que tirar la tanjente Lθ a la traza ALD, y el plano NLθ será el plano osculador pedido. FIG. 51.

665. *Construir el radio de curbatura relativo a un punto dado sobre una curba gausa.*

Sea M el punto dado sobre la curba gausa que distinguirémos por A: construyamos como arriba, el plano osculador π correspondiente al punto M, y proyectémos sobre este plano a la curba A, que se convertirá en otra línea B que evidentemente tendrá dos elementos comunes con la primera. Como desde este estado la curbatura de A en M, es la misma que la de B; quedará la cuestion reducida a hallar el radio de curbatura de una curba B, que es *plana.*

FIG. 141. 666. Para resolver este último problema, sea MN la normal de B en el punto dado M, y MC, MC',.... varias cuerdas que salen de este mismo punto. Si por el medio de la cuerda MC, le tiramos una perpendicular IP, y por el punto P en que va a cortar a la normal MN, levantamos a esta última recta, otra perpendicular $P\alpha$=MC; y si en seguida repetimos construcciones análogas con las otras cuerdas, la curba $\alpha\alpha'\alpha''\beta\beta'$ irá a cortar a la normal MN en un punto O que determinará al radio de curbatura MO de la línea propuesta. Con efecto, a medida que la cuerda MC'' vaya disminuyendo cada vez mas, tambien la ordenada $P''\alpha''$ disminuirá igualmente, y la perpendicular I''P'' se aproximará cada vez mas a ser normal a la curba MB; luego el punto O en que la línea ausiliar $\alpha\alpha'\beta$ va a cortar a MN, será la interseccion de esta normal con otra normal infinitamente próxima; y por consiguiente, el radio de curbatura de la línea B respecto al punto M, tendrá ciertamente por lonjitud a MO (*).

667. *Dada una curba cualquiera* A, *construir una de sus evolutas, y el lugar de los centros de curbatura.*

Tirarémos varios planos normales a esta curba, por puntos que estén bastante próximos unos de otros; y despues de haber construido sus trazas sobre los dos planos de proyeccion, describirémos una curba α tanjente a todas las trazas horizontales, y en seguida, otra curba β tanjente a todas las trazas verticales. Estas dos curbas α y β, serán evidentemente las trazas de la superficie Σ, que es el lugar de todas las evolutas de A (núm. 659); y obtendrémos diversas jeneratrices G, G', G'',.... de esta superficie desarrollable, uniendo de dos en dos los puntos en que las curbas α y β son tocadas por el mismo plano normal. Sentado esto, tirarémos dede el punto de partida M, tomando a discrecion sobre la curba A, una tanjente MD a la superficie Σ; en seguida, efectuarémos el desarrollo de Σ sobre un plano cualquiera, como la evoluta que buscamos debe ser una línea recta sobre este plano (núm. 659), síguese que será la

(*) *Este método es sacado de la* Jeometría de las curbas, *por M. Bergery; y presenta la ventaja de que la curba ausiliar corta a la recta normal dada, formando ángulo recto, en virtud de lo que se fija mejor la posicion del punto que buscamos.*

prolongacion indefinida de MD. Señalando entónces los puntos en que esta recta MD encuentra a cada una de las jeneratrices γ, γ', γ''.... de Σ desarrollada, y refiriendo en seguida estos puntos a las jeneratrices primitivas G, G', G''...., hallarémos la evoluta que es tanjente al radio MD. Haciendo variar esta recta que hemos podido trazar de muchos modos, hallaremos tambien otras evolutas de la curba A.

668. Si desde el punto M bajamos una perpendicular a la jeneratriz G que se halla en el plano normal relativo a M, el pie de esta perpendicular será el centro de curbatura de A respecto al punto M (núm. 654, *nota*); y el lugar de todos los centros de curbatura se obtendrá repitiendo esta construccion en los diversos puntos M', M'',.... de la línea dada A.

Estas varias operaciones serán de ordinario mui laboriosas, pero llegarán muchos casos interesantes en que serán bastante sencillas, como sucede en los dos ejemplos que vamos a estudiar, y ademas, servirán para aclarar la jeneralidad de las consideraciones precedentes.

669. *Dada una voluta esférica* proyectada sobre DMPGQE, *hallar* FIG. 101. *el lugar de sus centros de curbatura, y una de sus evolutas.*

Hemos dicho en el núm. 493 que esta epicicloide particular, es enjendrada por un punto *m*, de un círculo móvil S'', cuyo plano *rueda* sobre un cono fijo S'AE, en tanto que su centro coincide perpétuamente con la cúspide S' de este cono: tambien hemos visto en el núm. 495 que el *plano normal* de esta curba, para un punto cualquiera (M, M'), es el plano S'AV en el cual se halla entónces el círculo móvil, que es *tanjente al cono* fijo S'AE. De aquí se sigue que este cono es precisamente la superficie involucro de todos los planos normales, de que hemos hablado en el núm. 659, sobre la cual deben estar colocadas todas las evolutas y todos los centros de curbatura de la voluta esférica DMPGQF; y así, en virtud de la nota del núm. 656, si bajamos desde el punto (M, M') la perpendicular (MR, M') a la jeneratriz de contacto S'A del plano normal, el pie (R, M') de esta perpendicular será el centro de curbatura corespondiente a (M, M'), y la verdadera magnitud del radio de curbatura será RM. Del mismo modo, cuando el punto jenerador esté proyectado en N_5, época en que el contacto del círculo móvil ha llegado a A_5, la perpendicular N_5R_5 bajada a la jeneratriz OA_5 será el radio de curbatura, y R_5 la proyeccion del centro de curbatura; su proyeccion

vertical será fácil de obtener. Por último, para el punto P que corresponde a un cuarto de la revolucion del círculo móvil, el radio de curbatura será PO igual a S"A; de modo que el lugar de los centros de curbatura tendrá por proyeccion horizontal a una curba de doble nudo $DRR_5OR_9G....O....F$ que no hemos concluido, con el objeto de evitar confusion, pero que pasaria dos veces por el punto O, y cuya parte OR_9GO corresponde a un arco situado sobre la napa superior del cono S'AE.

670. Para suplir a la proyeccion vertical, que no hemos querido trazar aquí, vamos a construir en el plano del círculo móvil, las posiciones que subcesivamente ocupan todos los centros de curbatura. Pero segun el método espuesto arriba, respecto a un punto arbitrario (M, M') de la voluta esférica, podemos ver que si tiramos los radios $S''a_4$, $S''a_5$, $S''a_6$.... que representen las jeneratrices segun las cuales el plano del círculo móvil toca subcesivamente al cono, y les tiramos tambien las perpendiculares mr_4, mr_5, mr_6.... que partan del punto jenerador m, estas perpendiculares serán las lonjitudes exactas de los diversos radios de curbatura; y sus pies, que manifiestamente forman una circunferencia de círculo, irán a coincidir alternativamente con los verdadedos centros de curbatura de la voluta esférica, cuando se haga rodar el círculo S"A sobre el cono S'AE. Esto mismo sucederia si doblásemos el plano de este círculo para aplicarlo sobre el cono, por medio de una operacion inversa a la que sirve para desarrollar esta superficie; de modo que la circunferencia $mrr_4r_5S''r_6$.... puede mirarse como la *transformada* del lugar de los centros de curbatura cuando se desarrolle el cono S'AE que es el que realmente contiene a todos estos centros (*).

(*) *Este notable resultado está sacado de una memoria interesante de* M. Th. Olivier, *sobre los centros de curbatura de las epicicloides, inserta en el cuaderno XXII del* Diario de la Escuela Politécnica. *Sin embargo, creemos deber advertir que en esta memoria se ha introducido un error relativo a la forma de* la proyeccion *del lugar de los centros de curbatura de la voluta esferica; porque esta proyeccion no podrá ser, como por inadvertencia se ha dicho,* la evoluta *de la proyeccion horizontal de la voluta esférica.*

671. En cuanto a la construccion de *una evoluta* de la voluta esférica, es preciso que nos recordemos (núm. 659) que una curba de esta naturaleza debe convertirse en *rectilínea* cuando se desarrolle la superficie involucro de todos los planos normales, cuya superficie es, en el caso actual, el cono S'AE. Luego, si sobre el círculo abatido en S", trazamos una recta arbitraria que salga desde m, como la $m\alpha\beta\gamma\delta$, no habrá mas que hacer, que transportar sobre el cono S'AE los puntos α, β, γ,.... en que esta recta encuentra a los diversos radios S"a_6, S"a_7, S"a_8,.... que representan otras tantas jeneratrices de este cono; pero es mui fácil hallar las verdaderas posiciones de estas jeneratrices sobre los dos planos de proyeccion, y referir a ellas, partiendo desde la cúspide S', las lonjitudes S"α, S"β, S"γ,.... lo cual nos dará a conocer las dos proyecciones de la evoluta de que tratamos. No hemos efectuado estas operaciones en el depurado, a causa de evitar la confusion que hubiera resultado para el lector; pero las acabarémos en el problema siguiente, en que los resultados presentan mas interes.

672. *Dada una hélice de base circular* (ABCDEF..., A'B'C'D'E'F'...), *hallar el lugar de sus centros de curbatura, y una de sus evolutas.*

Despues de haber construido la tanjente (ET, E'T') de esta hélice, tiremos el plano normal correspondiente E'N'N, que evidentemente pasa por el radio (OE, E') del cilindro que contiene a esta hélice, y forma con el eje vertical O un ángulo complementario del que forma la tanjente. Pero como esta última línea tiene una inclinacion constante (núm. 450), sea cual fuere la posicion del punto de contacto (E, E') sobre la hélice, síguese de aquí que todos los planos normales de esta curba tendrán tambien una inclinacion constante, y que cada uno de ellos pasará por el radio del cilindro que termina en el punto considerado sobre la hélice. Por consiguiente, si concebimos que estos planos normales se han tirado por puntos infinitamente próximos, tomados a distancias iguales sobre la hélice propuesta, estos planos se cortarán consecutivamente segun rectas que todas tendran posiciones perfectamente simétricas con respecto al eje vertical O; es decir, que estas rectas estarán *igualmente inclinadas sobre este eje,* y colocadas *a la misma distancia* de esta vertical. De lo cual concluimos que estas rectas, que son las intersecciones de los planos normales consecutivos, son tanjentes a otra nueva hélice trazada sobre un cilindro recto de base circular *abcde*.... cuyo ra-

dio es aun incógnito, y formarán *un helizoide desrrollable* (núm. 456) que será el *lugar de los polos, o el lugar de todas las evolutas* (núm. 659) de la hélice primitiva (ABCDE...., A'B'C'D'E'....).

673. Para determinar este helizoide, observemos que su traza horizontal será precisamente la voluta del círculo incógnito *abcde....* (núm. 453), y que esta curba deberá ser tanjente a las trazas de todos los planos normales. Pero como el plano normal relativo al punto (A, A') tiene manifiestamente una traza AOI que pasa por el centro O, tendrémos que el radio OI precisamente contendrá el oríjen de esta voluta; miéntras que la traza N'N perpendicular a OI, corresponderá al primer cuarto de revolucion de esta voluta; por consiguiente, su distancia al centro, es decir OI o *en*, deberá ser precisamente *igual al cuarto de la circunferencia* incógnita *abcde*. Pero existe ya una relacion semejante entre la subtanjente ET y el cuadrante de círculo AE; de modo que el radio OA de este último debe tener con ET la misma razon que tendrá el radio incógnito O*a* con OI. En virtud de esta observacion, tirarémos la recta A'*δ*' paralela a E'T', y en seguida *δ*'*a*' paralela a E'N', y esta última paralela determinará la mangnitud O'*a*' que debemos dar al radio del círculo pedido *abcde*; en seguida, construirémos la hélice (*abcde....*, *a'b'c'd'e'....*) del mismo *paso* que la hélice primitiva, y esta será la arista de retroceso del helizoide de que tratamos. Ademas, esta superficie tendrá por traza horizontal a la volata *anvr* del círculo *abcde...*, y por jeneratrices a las tanjentes de la nueva hélice, como las (*en*, E'N') y (*hv*, *h'v'*) que representan las intersecciones consecutivas de los planos normales infinitamente próximos, tirados a la hélice (ABCD..., A'B'C'D'....).

674. Para hallar el radio de curbatura de esta última línea en el punto (E, E'), por ejemplo, es preciso bajar desde este punto (*nota* del núm. 656) una perpendicular (EO*e*, E') sobre la jeneratriz (*en*, E'N') que está en el plano normal correspondiente al punto asignado. Pero como esta perpendicular termina evidentemente en el punto (*e*, E'), y hallaríamos resultados semejantes respecto a cualquiera otro plano normal, concluirémos de aquí estos dos teoremas mui notables: 1.° *toda hélice de base circular* (ABCDE...., A'B'C'D'E'....) *tiene por lugar de sus centros de curbatura, a otra hélice* (abcde..., a'b'c'd'e'...,) determinada como arriba; 2.° *el radio de curbatura de la primera hélice es* cons-

TANTE, *e igual a la suma* OE+O*e de los radios de los cilindros en que están situadas estas dos curbas.*

675. Recíprocamente, veremos con facilidad, empleando para conseguirlo consideraciones semejantes, a las anteriores que la segunda hélice (*abcde....*, *a'b'c'd'e'....*) tiene por lugar de sus centros de curbatura, a la primera (ABCD.... A'B'C'D'....); y que el radio de curbatura de aquella, es tambien constantemente igual a la suma O*e*+OE. Esto depende de que el plano normal E'N'N de la primera hélice, es el plano osculador (núm. 463) de la segunda; y que tambien el plano normal de esta, que sería E'T'T perpendicular a la tanjente (*en*, E'N'), es el plano osculador de la primera; de modo que hai una completa reciprocidad entre estas dos hélices y los *ángulos de continjencia* y *de torsion* (números 653 y 654) de la una son respectivamente iguales a los *ángulos de torsion*, y *de continjencia* de la otra (*).

676. Si queremos espresar por medio del análisis la magnitud de los radios de curbatura ρ y ρ', de estasdos hélices, no habrá mas que hacer a

$$OA=R,\ Oa=r,\ \text{ángulo } T'=\omega,\ N'=90-\omega=\omega',\ O'E'=\tfrac{1}{4}h,$$

y el triángulo rectángulo A'δ'*a*' que hemos trazado eu el depurado, nos dará evidentemente la relacion $r=R\tan^2\omega$, y de aquí deducirémos que

$$\rho=R+r=R(1+\tan^2\omega)=R\left(1+\frac{h^2}{4\pi^2R^2}\right)$$

para la primera hélice; y para la segunda

(*) *Esta reciprocidad entre los ángulos de continjencia y de torsion, tiene tambien lugar en una curba cualquiera* AMM'M''B (fig. 130) *comparada con la arista de retroceso* UV *de la superficie involucro de los planos normales de la primera línea. Porque, de lo que hemos visto en el núm.* 659 *resulta que los planos* P, P', P'',.... *normales a* AMM', *son los planos osculadores de* UV, *en tanto que siendo los planos osculadores de* AMM' *perpendiculares a* QS, Q'S',.... *son solamente paralelos a los planos normales de* UV; *pero esto es suficiente para que los ángulos de continjencia y de torsion de* AMM' *sean respectivamente iguales a los ángulos de torsion y de continjencia de la línea* UV.

$$\rho' = r + R = r\,(1 + \tan^2 \omega') = r\left(1 + \frac{h^2}{4\pi^2 r^2}\right).$$

FIG. 128. 677. Construyamos ahora *una evoluta* de la hélice (ABCD...., A'B'C'D'....), tirando en primer lugar por un punto arbitrario (E, E') de esta curba, una recta que esté situada (núm. 658) en el plano normal E'N'N relativo a este punto; o bien, una tanjente a la superficie involucro de los planos normales cuya superficie es, en el caso presente, el helizoide desarrollable que tiene por arista de retroceso a la hélice (*abcd*..., *a'b'c'd'*....). Con el objeto de obtener resultados mas simétricos, elijamos para esta primera tanjente, al radio de curbatura (E*e*, E') y acordémonos que despues de efectuado el desarrollo de este helizoide, la evoluta que buscamos será una línea recta (núm. 659) que deberá ser la prolongacion indefinida de (E*e*, E'). Luego si queremos desarrollar este helizoide sobre su plano tanjente E'N'N, será preciso (núm. 467) abatir las tanjentes (*ne*, N'E') y (Nα, N'α') segun $n\varepsilon$, y Nα", y levantar en seguida en sus estremos dos perpendiculares $\varepsilon\omega$ y $\alpha''\omega$ que por medio de su encuentro determinarán el centro ω y el radio $\omega\varepsilon$ (*) del círculo $\varepsilon\lambda$ segun el cual se transformará la hélice (*abcd*...., *a'b'c'd'*.....); ademas, en este desarrollo, la recta indefinida $\omega\varepsilon\pi$ representará la transformada de la evoluta hallada.

En cuanto a la posicion que sobre este desarrollo tomará una jeneratriz cualquiera (*hv*, *h'v'*) del helizoide, la obtendrémos tomando el arco de círculo $\varepsilon\eta$ de la misma lonjitud que el arco de hélice (*eh*, E'*h'*) cuya lonjitud se nos ha dado (núm. 468) por hipotenusa del triángulo E'η'η" y cuya base E'η' es igual al arco horizontal *eh*; y entónces la jeneratriz que buscamos será la tanjente $\eta\pi$. Pero como esta última va a encontrar a la

(*) *Este radio* $\omega\varepsilon$ *debe ser igual a* Ee, *supuesto que este es el radio de curbatura* (*núm.* 674) *de la hélice* (abcd, a'b'c'd'....), *y que esta línea no debe cambiar de curbatura cuando se desarrolle la superficie cuya arista de retroceso es* (*núm.* 179, nota). *Y así, hubiera valido mas abatir una sola tanjente segun* $n\varepsilon$, *y levantar la perpendicular* $\varepsilon\omega$ *igual a* Ee, *que hubiera sido suficiente para trazar el círculo* $\varepsilon\lambda$; *esta es la marcha que hemos aconsejado ya en el núm.* 468.

transformada $\omega\varepsilon$ de la evoluta en el punto π, trataremos de referir la distancia $\gamma\pi$ a la jeneratriz primitiva (hv, $h'v'$); para esto, tomarémos la hipotenusa $E'\pi''=\gamma\pi$, y la base $E'\pi'$ de este nuevo triángulo rectángulo, luego de transportada desde h a p, nos dará manifiestamente la proyeccion horizontal p: y en seguida la proyeccion vertical p' de un punto de la voluta que buscamos, que será la (epx, $E'p'x'$).

678. Así es que un hilo arrollado sobre esta rama segun la direccion ($xpeE$, $x'p'E'$) describirá con su estremidad (E, E'), la parte superior (EFGH...., E'F'G'H'....) de la hélice dada, por lo ménos hasta cierto límite que es el que vamos a determinar; y el *radio de evoluta* que termine en el punto (p, p'), será la tanjente (Hp, $H'p'$). En cuanto a la parte inferior (EDCB...., E'D'C'B'....), tendrá por evoluta otra rama (ePX, E'P'X'), que se construirá como la primera, o mas bien que se deducirá inmediatamente de ella, determinando puntos tales como (P, P') colocados simétricamente con (p, p').

679. Habrá en el desarrollo del helizoide, una tanjente $\lambda\rho$ paralela a la transformada $\omega\varepsilon\pi$ de la evoluta; luego, si referimos el punto λ a la hélice, tomando el arco de círculo ehl igual a la base $E'\lambda'$ del triángulo rectángulo $E'\lambda''\lambda'$ cuya hipotenusa es el arco $\varepsilon\lambda$ rectificado, la jeneratriz (lr, $l'r'$) del helizoide corresponderá a $\lambda\rho$, y no irá ya a encontrar a la evoluta (epx, $E'p'x'$) sino al infinito. Esta, sin embargo, no es la asíntota de esta rama; porque una recta de esta naturaleza debe no solo encontrar a la curba en un punto infinitamente distante, sino que tambien debe serle tanjente. Pero como respecto al punto (p, p') situado sobre la jeneratriz (hv, $h'v'$), la tanjente es (Hp, $H'p'$); para el punto infinitamente distante situado sobre (lr, $l'r'$), la verdadera tanjente, o *la asíntota*, saldrá del punto (L, L') colocado en direccion diametralmente opuesta a (l, l'), y será la recta (Lz, $L'z'$) paralela a (lr, $l'r'$).

680. En lo espuesto, vemos que la rama de evoluta (epx, $E'p'x'$), aun cuando es infinita, no puede servir sino para describir la porcion de hélice (EKL, E'K'L'); y cuando el punto jenerador (E, E') del hilo móvil, haya llegado a (L, L'), es preciso que este hilo prolongado en sentido contrario (LZ, L'Z') y estando fijo en el estremo opuesto, principie a doblarse sobre otra nueva rama (YQb, $Y'Q'b'$) que tiene la misma asíntota, y servirá para describir otro segundo arco de hélice (LAB, L'A"B") igual al precedente. Para construir esta nueva rama

de evoluta, cuya proyeccion horizontal debe ser evidentemente simétrica con *epx*, tomarémos el arco *lb=le*, y en seguida describirémos la circunferencia *p*P*q*Q, sobre la cual colocarémos el punto Q a la izquierda del radio O*b*, así como el punto *p* está situado a la derecha del radio O*e*; finalmente proyectarémos Q a Q', levantando este último sobre la horizontal B"*b*" la misma cantidad que el punto *p*' se halla debajo de E'*λ*'.

681. A la rama de evoluta (YQ*b*, Y'Q'*b*") sucederá otra tercer rama (*bqy*, *b*"*q*'*y*') en la cual cada punto (*q*, *q*') se construirá como precedentemente, y de un modo que hace bastante sensible el deparado que presentamos; esta tercer rama servirá para describir un nuevo arco de hélice (BES, B"E"S") igual siempre al precedente, y así en seguida. La asíntota de esta última rama sería tambien paralela a la jeneratriz del helizoide, que partiese del punto diametralmente opuesto a (S, S"); pero será mas sencillo tirar la tanjente SWU al círculo, que cortará a LZ en el punto W situado sobre el radio O*b*; y como este punto estaria proyectado en W' sobre la primera asíntota, será preciso colocar el punto W" a la misma altura encima de B"*b*"; y en seguida tirar la recta W"U' de modo que forme con la vertical, el mismo ángulo que W'Z'.

682. En cuanto a la asíntota (V*ζ*, V"*ζ*') de la rama (*e*PX, E'P'X'), su proyeccion horizontal tiene una posicion simétrica con V*z*; y como su proyeccion vertical es evidentemente paralela a V'*z*', bastará tirarla por el punto V" colocado encima de E', lo mismo que el punto V' lo está debajo.

683. Para comprehender mejor la relacion de estas diversas ramas de la evoluta total de una hélice, y entender bien la descripcion de esta curba por medio de un *movimiento contínuo*, sin que nos veamos precisados a transportar el punto de amarra del hilo móvil, de una rama a otra, no habrá mas que representarnos una recta indefinida e *inflexible*, colocada desde luego en la posicion horizontal (E*e*; E'), que ruede *sin resbalar*, sobre la rama (*epx*, E'*p*'*x*') permaneciéndole tanjente. En este movimiento, el punto jenerador (E, E') principiará por describir el arco de hélice (EKL, E'K'L'); y cuando haya llegado a (L, L'), la recta móvil se habrá convertido en la asíntota (L*z*, L'*z*'); pero como en el mismo instante esta recta tocará al infinito a la segunda rama (*b*Y, *b*"Y'), si principia a rodar en sentido contrario sobro esta última rama, para aproximarse a la posicion horizontal (B*b*W, B"*b*"), en

este segundo período de su movimiento no interrumpido, el punto jenerador describirá al arco de hélice (LAB, L'A"B"). Si en seguida desde la posicion horizontal (B*b*, B"*b*") vuelve la recta móvil a rodar sobre la tercer rama (*bqy*, *b*"*q*'*y*'), el punto jenerador describirá otro nuevo arco de hélice (BES, B"E"S"), hasta que la recta haya tomado la posicion de la asíntota (SWU, S"W"U'); desde donde pasará, sin interrupcion, a otra cuarta rama, que tiene la misma asíntota, y así en seguida.

Si tuviésemos alguna dificultad en seguir estos diversos movimientos en el espacio, podríamos estudiarlos primeramente sobre una *sinusoide* (núm. 451, *nota*) que es una curba plana cuya evoluta situada en su plano, presenta tambien ramas infinitas que de dos en dos tienen una asíntota comun.

CAPITULO II.

De la curbatura de las superficies.

684. Decimos que dos superficies son *osculadoras* una de otra, cuando cualquier plano tirado por la normal comun, las corta segun dos curbas que son *osculadoras entre sí* (núm. 650), o que tienen *el mismo radio de curbatura*. Pero debemos conocer que entre todas las esferas que pueden *tocar* a una superficie S en un punto dado, ninguna podrá serle osculadora; supuesto que la curbatura de una esfera es uniforme en todo el contorno de su normal, en tanto que no sucede así con una superficie cualquiera. Para apreciar en este caso la curbatura de esta última en un punto cualquiera dado, indagarémos los radios de curbatura de las diversas *secciones normales*, y por medio de su comparacion, adquirirémos nociones exactas sobre la forma mas o ménos aplanada de la superficie al rededor del punto que consideramos, así como tambien su posicion respecto a su plano tanjente. Pero entre los radios de curbatura de estas secciones normales, existe una lei mui notable que vamos desde luego a estudiar en las superficies de segundo grado.

FIG. 131. 685. En un elipsoide cuyos tres semi-ejes son OA$=a$, OB$=b$ y OC$=c$, considerémos especialmente una cúspide C, en que la normal es el eje COZ perpendicular a las tanjentes CX y CY de las dos elipses principales CA y CB. Si por este punto tiramos otro tercer plano normal VCZ, cuya traza sobre el plano tanjente XCY es CV, este cortará a la superficie segun una elipse CD que tendrá evidentemente por semi-ejes a OC$=c$ y a OD$=d$. Pero sabemos (núm. 200) que los radios de curbatura en el vértice C de las tres elipses CA, CB y CD, tienen por magnitudes respectivas a

$$CG=\frac{a^2}{c}=R,\ CH=\frac{b^2}{c}=R',\ \text{y}\ CI=\frac{d^2}{c}=\rho;$$

y como el semi-diámetro d de la elipse ADB, tendrá siempre una lonjitud comprehendida entre a y b, vemos que suponiendo que $a<b$, hallarémos que el radio ρ es siempre mayor que R y menor que R'; es decir, que de todas las *secciones normales* dadas por la cúspide C, la curba CA es la seccion de *curbatura máxima*, supuesto que su radio R es el menor (núm. 653), y la curba CB es la seccion de *curbatura mínima*, porque su radio R' es mayor que todos los demas.

Si ademas de esto, representamos por φ el ángulo que forma el plano normal VCZ con el plano principal XCZ, φ será tambien el ángulo comprehendido entre el eje OA y el diámetro OD de la elipse ADB; y sabemos qne la lonlitud de este diámetro, la conocerémos por medio de la equacion

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}\cos^2\varphi+\frac{1}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

multiplicando todos los términos por c, y prestando atencion a los valores precedentes de los radios ρ, R y R', nos resultará

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi+\frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi,\ \ldots\ldots (1)$$

cuya relacion nos permite calcular inmediatamente el radio de curbatura ρ de cualquier seccion normal que pase por la cúspide C, cuando se conozca el ángulo φ de esta seccion con una de las dos *secciones principales*, y los radios de curbatura R y R' de estas últimas curbas.

686. Considerémos ahora a un hiperboloide de una napa, en el que FIG. 132. CAFE sea la elipse de la garganta que tiene por ejes a los dos ejes reales de la superficie, a saber: OA$=a$, y O$c=c$; en tanto que el eje imajinario es una horizontal O$b=b$ perpendicular al plano de la elipse que mirarémos como el plano vertical de la figura. El radio de curbatura de esta elipse, respecto al vértice C, será una línea CG$=\frac{a^2}{c}=$R; y el de la hipérbola BCL contenida en el plano de los dos ejes OC y Ob, será CH$=\frac{b^2}{c}=$ R', pero estará colocado encima del plano tanjente XCY, en lugar de estar debajo como CG. Tirémos ahora por el punto C un plano normal cualquiera VCZ que forme con el plano principal XCZ un ángulo designado por φ; si este ángulo es bastante pequeño, la seccion será una elipse CDF que tendrá por ejes a OC$=c$ y a OD$=d$, y este último será evidentemente un diámetro de la hipérbola ADK contenido en el plano de los dos ejes horizontales OA y Ob. Y como sabemos que este diámetro está lígado con los ejes de la hipérbola, por medio de la relacion

$$\frac{1}{d^2}=\frac{1}{a^2}\cos^2\varphi-\frac{1}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Si ahora multiplicamos todos los términos por c, y observamos que el radio de curbatura en el vértice C de la elipse CDF es $\rho=\frac{d^2}{c}$, concluirémos de aquí que

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi-\frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi, \text{ ..... } (2)$$

cuya relacion está precisamente comprehendida en la fórmula (1) con tal que en ella se mire como *negativo*, aquel de los dos *radios principales* R o R', que esté colocado *encima* del plano tanjente (*).

(*) *Jeneralmente, se adopta la hipótesis contraria, porque el análisis nos da un valor positivo para el radio de curbatura de una curba situada* encima *de su tanjente, a lo ménos cuando se cuentan las ordenadas positivas de* abajo a arriba. *Pero como en el caso actual hemos di-*

687. Sentado esto, tendrémos que miéntras el ángulo φ se diferencie poco de cero, es claro que el primer término del segundo miembro de la fórmula (2), prevalecerá sobre el término negativo, y así el radio de curbatura ρ de la seccion normal CDF será positivo, esto nos anuncia que esta curba es *convexa*, es decir, situada debajo del plano tanjente XCY. Ademas, como $\frac{1}{\rho}$ es evidentemente menor que $\frac{\cos^2\varphi}{R}$, y con mayor razon aun menor que $\frac{1}{R'}$, resulta de aquí que el radio variable ρ será mayor que R, y que aumentará contínuamente con φ, hasta que este ángulo haya adquirido el valor ω determinado por la equacion

$$\frac{\cos^2\omega}{R} = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{R'}, \text{ y de aquí } \operatorname{tanj}\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

Luego, si se trazan sobre el plano XCY, o sobre el plano horizontal (*) paralelo a este, dos rectas O'P y O'Q, que formen con O'X' ángulos iguales a ω; en este caso, cuando el plano secante normal llegue a la posicion O'P, cortará al hiperboloide segun una línea cuya curbatura será nula, porque ρ será infinito; y con efecto, debemos ver que esta seccion será una de las dos jeneratrices rectilíneas que pasan por la cúspide C, en virtud de que segun los valores de R y R', la espresion de ω se convierte en $\operatorname{tanj}\omega = \frac{b}{a}$.

FIG. 132. 688. Cuando el ángulo φ haya llegado a ser mayor que ω, y el plano normal haya tomado la posicion O'W', en este caso la fórmula (2) nos dice que el radio ρ tendrá un valor negativo; de modo que la seccion co-

---

rijido el eje de las z positivas de arriba a bajo, *el convenio hecho en el testo está en consonancia con el análisis; hemos preferido esta disposicion, porque es mas cómodo figurar las secciones normales, cuando se colocan debajo del plano tanjente.*

(*) *Empleamos aquí, ademas de la figura en perspectiva sobre el* cuadro *vertical* XCZ, *una proyeccion horizontal ejecutada sobre un plano perpendicular a la normal* CZ, *con el objeto de hacer apreciar mejor los límites que separan las secciones convexas de las cóncavas.*

trespondiente será *cóncava*, es decir, situada encima del plano tanjente, y será una hipérbola cuyo radio de curbatura ρ irá disminuyendo numéricamente, hasta que tengamos

$$\varphi = 90^\circ, \text{ y de aquí } \rho = -R' = CH;$$

este último resultado se refiere al plano normal O'Y', que corta a la superficie segun la hipérbola principal BCL.

689. Si continuamos esta discusion desde $\varphi=90^\circ$, hasta $\varphi=360^\circ$, hallarémos resultados subcesivamente análogos, porque la fórmula (2) no contiene sino los cuadrados de sen φ y cos φ. De donde debemos concluir, 1.° que los dos planos normales PO'p y QO'q, dividen a la superficie en cuatro rejiones distintas al rededor del punto (O', C); en los dos ángulos PO'Q y pO'q opuestos al vértice, todas las secciones normales son *convexas*, o situadas debajo del plano tanjente XCY; y en los otros dos ángulos PO'q y qO'p todas las secciones normales son *cóncavas*, o situadas encima de este plano tanjente; ademas, el paso de las unas a las otras, se efectúa por dos secciones rectilíneas PO'p y QO'q, que son las jeneratrices del hiperboloide situadas en el plano tanjente XCY. 2.° El radio de curbatura R de la otra seccion principal CAF es el *mínimo* de todos los radios positivos, que varian desde $\rho=R$ hasta $\rho=\infty$: en tanto que el radio de curbatura R' de la otra seccion principal BCL, es el *mínimo* de los radios negativos; o teniendo en consideracion el signo de estos últimos, podremos decir que—R' es un *máximo*, pero solo con respecto a los radios negativos que varian desde $\rho=-R'$ hasta $\rho=-\infty$.

690. Las proposiciones que acabamos de demostrar respecto a la cúspide real de un elipsoide o de un hiperboloide de una napa, son así mismo ciertas para cualquiera superficie S, y *para un punto cualquiera* M de esta superficie cuya normal es MZ. Es decir, que *entre todas las secciones normales que pasan por este punto, hai siempre dos* MA *y* MB, *que se llaman* SECCIONES PRINCIPALES, *de las cuales la primera tiene un radio de curbatura* MG=R *que es* MINIMO, *y la segunda un radio de curbatnra* MH=R' *que es* MAXIMO: *estas dos seccionos principales están situadas en los planos* XMZ *e* YMZ, *perpendiculares entre sí; y una vez conocida la posicion de estos planos y los* RADIOS PRINCIPALES R *y* R', *conocerémos tambien el radio de curbatura* ρ *de cualquiera otra* FIG. 133 Y 134.

seccion normal MD *que pase por el mismo punto, por medio de la fórmula*

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi + \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi, \ldots\ldots\ldots (3)$$

en la cual φ espresa el ángulo del plano de MD con el plano MA, y es preciso mirar en ella como *negativo* aquel de los dos radios principales R o R', que esté dirijido *por encima* del plano tanjente XMY, si la superficie fuese *no convexa*, es decír, atravesada por su plano tanjente en M.

Este importante teorema, debido a *Eulero*, no es posible demostrarle de un modo completo y riguroso, por medio de consideraciones puramente sintéticas; y por esta razon hemos preferido admitirle como un resultado del cálculo diferencial (*); pero tambien es lo único que tomarémos del análisis, y ahora vamos a desarrollar, por el solo medio de la Jeometría, las interesantes consecuencias de que es susceptible este teorema.

FIG. 133. 691. Cuando los dos radios principales MG=R y MH=R', son positivos, como en la *fig.* 133, la fórmula (3) nos dice que ρ es constantemente positivo, sea cual fuere el ángulo φ; luego entónces todas las secciones normales se hallan debajo del plano tanjente XMY, a lo ménos en los alrrededores del punto M, y la superficie es *convexa* en este punto. Ademas, suponiendo a R <R', nos es fácil ver que R es entónces el *mínimo absoluto* de todos los radios de curbatura de las secciones normales que pasan por M, y R' el *máximo absoluto* de todos estos mismos radios; con efecto, la fórmula (3) escrita alternativamente bajo una u otra de las formas siguientes:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} - \operatorname{sen}^2\varphi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right), \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'} + \cos^2\varphi\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right),$$

nos dice, que sea cual fuese el ángulo φ, tendremos siempre

$$\frac{1}{\rho} < \frac{1}{R} \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R'}; \text{ y de aquí sacarémos que } \rho > R \text{ y } \rho < R'.$$

(*) *Véase* el Análisis aplicado a la Jeometría de las tres dimensiones, *cap. XVI.*

Iguales consecuencias resultarian, si los dos radios principales fuesen a un mismo tiempo negativos; solo que entónces estaria colocada la superficie encima del plano tanjente, en todo el alrededor del punto M.

692. Cuando respecto a un punto particular M de una superficie cualquiera, sucede que los dos radios principales R y R' son iguales y del mismo signo, la fórmula (3) evidentemente se simplifica, y el ángulo φ desaparece; de suerte que hallarémos $\rho = R$ para cualquiera seccion normal que pase por este punto, al rededor del cual presenta la superficie una curbatura uniforme en todos sentidos, como la de una esfera. Estos puntos particulares se llaman *ombligos*, y haremos observar muchos de este jénero en el helipsoide (núm. 739); pero es ya evidente que cuando la meridiana de una superficie de revolucion corta al eje formando ángulo recto, este punto es siempre un ombligo.

693. Cuando los dos radios principales son de signos contrarios, como sucede en la *fig.* 134, en la que MG=R que se refiere a la seccion (MA, M'A') es posivo, y MH=R' relativo a la seccion (MB, M'B') es negativo; en este caso, la fórmula (3) escrita con el signo evidente de R', se convierte en FIG. 134.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos^2\varphi - \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi. \quad \ldots\ldots\ (4)$$

Que desde luego nos dice que ρ será positivo o negativo, segun sea el valor del ángulo φ; es decir, que habrá secciones normales situadas unas debajo y otras encima del plano tanjente XMY; y así la seccion será *no convexa* o *de curbas opuestas*. Para determinar los límites de estas diversas secciones, indaguemos el valor particular ω del ángulo φ que cumpla con la equacion

$$\frac{1}{R}\cos^2\omega - \frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\omega = 0, \text{ de la cual sacarémos que } \operatorname{tanj}\omega = \pm\sqrt{\frac{R'}{R}};$$

en seguida tracemos sobre el plano tanjente XMY, o sobre el plano horizontal (*) que le es paralelo, dos rectas M'P y M'Q, que cada una for-

---

(*) *Para mayor claridad, empleamos tambien aqui una perspectiva sobre un plano vertical, y una proyeccion sobre otro plano horizontal; si*

me con M'X' un ángulo igual ω. En cuyo caso hallarémos para todos los valores comprehendidos entre $\varphi=-\omega$ y $\varphi=+\omega$, y tambien para todos los que se hallen entre $\varphi=180^0-\omega$ y $\varphi=180^0+\omega$ que la fórmula (4) nos dará manifiestamente valores de ρ que serán positivos; es decir, que todas las secciones normales comprehendidas en los ángulos diedros PM'Q y pM'q, estarán situadas debajo del plano tanjente horizontal XMY. Por el contrario, cuando el valor de φ caiga entre ω y $180^0-\omega$, o bien entre $180^0+\omega$ y $360^0-\omega$, la fórmula (4) nos dará para ρ un valor negativo: lo cual prueba que todas las secciones normales comprehendidas en los dos ángulos diedros PM'q y QM'p, estarán situadas encima del plano tanjente XMY, por lo ménos en los alrededores del punto M.

694. Finalmente, cuando a φ se le dé uno de los valores $\varphi=\pm\omega$, o $\varphi=180^0\pm\omega$, como segun la fórmula (4) ρ es *infinito*, síguese de aquí que los dos planos normales *límites* PM'p, y QM'q, cortarán a la superficie segun curbas que sin ser rectilíneas, como sucedia en el hiperboloide (núm. 687) serán a lo ménos mui aplanadas en las cercanías del punto M, y presentarán en él *una curbatura nula*; es decir, que cada una tendrá en este sitio dos elementos comunes con su tanjente que será precisamente la traza M'P o M'Q del *plano normal límite* sobre el plano tanjente XMY. Y así podemos decir que los dos planos normales PM'p y QM'q dividen a la superficia en *cuatro* rejiones distintas que alternativamente son *convexas* y *cóncavas*.

695. Supuesto que en las superficies no convexas, los radios de curbatura positivos varian, segun la fórmula (4,) desde $\rho=+R$ hasta $=\rho+\infty$, y los radios negativos desde $\rho=-R'$ hasta $\rho=-\infty$, síguese de aquí que R será en este caso un *mínimo* con relacion a los radios de primera clase, y $-R'$ un *máximo* analítico para los de segunda, teniendo

---

ademas, queremos fijar nuestras ideas por medio de un ejemplo, podremos mirar a la superficie que nos ocupa como que es la garganta de una polea, cuyo eje es horizontal y está proyectado segun (B'L', G). *El punto que consideramos* (M, M') *se halla entónces sobre el círculo de la garganta* (EMA, E'M'A') *y la seccion* (BML, B'M'L') *es un semi-círculo que sirve de meridiano al toro de esta polea.*

signos; pero si solo quisiéramos hablar de sus magnitudes absolutas, R' sería tambien un *mínimo*.

En cuanto a la construccion gráfica de las secciones principales y de sus radios de curbatura, esperamos para citar ejemplos sobre este asunto, a que háyamos hablado de las *líneas de curbatura*; porque estas darán a la Jeometría resultados mui útiles (*).

696. *En cada punto* M *de una superficie cualquiera* S, *puede construirse una superficie de segundo grado* Σ *que sea osculadora de* S (núm. 684) *al rededor de dicho punto.* Supongamos en primer lugar que la superficie dada S sea convexa en M, y que MA y MB representen sus dos secciones principales, o las secciones normales de *curbutura máxima* o *mínima*, que tengan por radios a MG=R y MH=R'. Tomemos sobre la normal MZ una distancia arbitraria MO=c, que adoptarémos por uno de los ejes de una elipse MA' que, trazada en él plano de la seccion MA, deberá serle osculadora; para cumplir con esta condicion, basta elejir el segundo eje OA'=a, de modo que el radio de curbatura de la elipse en el vértice M, sea igual a R, lo cual nos da la relacion FIG. 135.

(*) *Para completar las nociones precedentes, añadirémos que si por la tanjente* MV (fig. 133) *damos una seccion* oblícua *cuyo plano forme un ángulo* θ *con la seccion* normal MD *que pasa por la misma tanjente* MV, *el radio de curbatura* ρ_1 *de la seccion oblícua tendrá con el radio* ρ *de* MD *la relacion siguiente:*

$$\rho_1 = \rho \cos \theta,$$

que espresa que ρ_1 *es la proyeccion de* ρ *sobre el plano de la seccion oblícua; o bien que la esfera descrita con el radio* ρ *quedará cortada, por el plano de la seccion oblícua, segun un cículo menor que precisamente será el círculo osculador de esta seccion. Este teorema es debido a* Meunier, *y para su demostracion puede verse nuestra* Análisis aplicada, *cap. XVII; solo haremos observar aquí, que segun la fórmula precedente, las secciones oblícuas ejecutadas en una superficie cualquiera, serán siempre* convexas *o* cóncavas *auna con la seccion normal que pase por la misma tanjente.*

$$\frac{a^2}{c}=R, \text{ y de aquí } a=\sqrt{Rc};$$

y así el semi-eje OA'$=a$ se determinará hallando una media proporcional a R y c. Así mismo, construyamos en el plano de la seccion MB una elipse MB' que le sea osculadora, y que tenga por semi-ejes a OM$=c$ y OB'$=b$; este último se determinará tambien por medio de la relacion

$$\frac{b^2}{c}=R' \text{ y de aquí } b=\sqrt{R'c}.$$

Sentado esto, las dos elipses MA' y MB' determinarán completamente a un elipsoide Σ que tendrá por semi-ejes a OM, OA' y OB', en atencion a que el plano de la curba MB es perpendicular sobre el de MA; decimos que este elipsoide será *osculador* de la superficie S, lo que se reduce a probar (núm. 684) que todo plano normal MOD corta a S y Σ segun dos curbas MD y MD' que tienen el mismo radio de curbatura. Pero llamando ρ y ρ' a los radios de estas dos secciones, hallarémos sus valores (números 690 y 685) por medio de las fórmulas

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi+\frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi, \text{ y } \frac{1}{\rho'}=\frac{c}{a^2}\cos^2\varphi+\frac{c}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi,$$

las cuales nos prueban que $\rho=\rho'$, en virtud de los valores precedentes de a y de b.

697. Debemes observar que no es uno solo el elipsoide Σ osculador de S respecto al punto M, porque hemos tomado arbitrariamente la lonjitud del eje c; y así haciendo a $c=a=R$ o a $c=b=R'$, haríamos que fuese de revolucion, pero no al rededor de la normal MZ. Ademas, hubiéramos podido emplear por curbas osculadoras de las secciones principales MA y MB a dos hipérbolas o dos parábolas, y la superficie osculadora de S se habria convertido en un hiperboloide de dos napas, o en un paraboloide elíptico, que ámbas son superficies convexas.

FIG. 136 698. Sea ahora una superficie S no convexa, cuyas secciones principales MA y MB tengan radios de curbatura en sentido opuesto, MG$=R$, MH$=R'$. Construyamos, como arriba, una elipse MA', que sea osculadora de MA en el punto M, y cuyos semi-ejes sean MO$=c$, lonji-

tud arbitraria tomada sobre la normal, y OA'$=a$ línea determinada por la relacion $a=\sqrt{Rc}$; pero para curba osculadora de la seccion MB, no podemos ya adoptar a una elipse, porque no existe superficie de segundo grado que admita dos secciones de este jénero, situadas una encima y la otra debajo del plano tanjente. Por consiguiente, construirémos una hipérbola B'ML', que tenga por semi-eje real a la línea MO$=c$, y por semi-eje imajinario a una recta OB''$=b$ perpendicular al plano de la elipse, y de tal naturaleza que el radio de curbatura de esta hipérbola (núm. 200) verifique la relacion.

$$\frac{b^2}{c}=R', \text{ y de aquí } b=\sqrt{R'c}$$

En este caso, la elipse MA' y la hipérbola MB' determinarán completamente un hiperboloide de una napa Σ, que será osculador de S en el punto M (núm. 684); porque todo plano normal que forme un ángulo φ con MA, cortará a S y Σ segun dos curbas, cuyos radios de curbatura ρ y ρ' los conocerémos (números 693 y 686) por medio de las fórmulas

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\varphi-\frac{1}{R'}\operatorname{sen}^2\varphi, \quad \text{y} \quad \frac{1}{\rho'}=\frac{c}{a^2}\cos^2\varphi-\frac{c}{b^2}\operatorname{sen}^2\varphi,$$

que prueban que $\rho=\rho'$, en virtud de los valores precedentes de a y b. Hubiéramos tenido tambien un hiperboloide osculador de S, pero vuelto en sentido contrario, si hubiésemos colocado la elipse en el lugar de la hipérdola, y recíprocamente; no debemos tampoco olvidarnos de que el eje c que está dirijido segun la normal MG o MH, puede recibir una lonjitud arbitraria. Por último, si hubiésemos adoptado por curbas osculadoras de las secciones MA y MB a dos parábolas, hubiéramos obtenido por superficie osculadora de S, a un paraboloide hiperbólico.

699. LINEAS DE CURBATURA *de una superficie cualquiera.* MONGE ha llamado así a la série de puntos en que las normales de la superficie S van a encontrarse consecutivamente, y vamos a demostrar que partiendo de cada punto M dado sobre S, no existen en jeneral sino *dos líneas de curbatura* MαU *y* MβV, *las cuales se cortan formando ángulo recto, y son tanjentes a las secciones principales* MA y MB (núm. 690) de las que sin embargo se diferencian, porque comunmente no son FIG. 135.

planas como estas últimas. Principiemos por estudiar estas líneas de curbatura en la cúspide de una superficie de segundo grado.

FIG. 131. 700. Sean CA y CB las dos secciones principales que se cortan en la cúspide C de un elipsoide, en cuya cúspide es CO la normal de la superficie; tirando un plano paralelo al plano tanjente XCY, a una distancia infinitamente pequeña, nos dará una seccion elíptica $\alpha\beta\varepsilon$ cuyos vértices α y β estân colocados sobre CA y CB; y si tomamos sobre esta curba un punto cualquiera N diferente de α y β, decimos que la normal NK del elipsoide no encontrará a la normal CO relativa a la cúspide. Con efecto, esta última está proyectada en el centro ω de la elipse menor, miéntras que NK, que debe ser perpendicular a la tanjente NT, se proyectará sobre el plano de esta misma elipse segun una recta NK' perpendicular tambien a NT: pero sabemos que una normal NK' de la elipse $\alpha\beta\varepsilon$ no va a pasar por el centro ω; luego la normal NK de la superficie no encontrará nunca a $C\omega$, por mas próximo a C, que se tome el punto N; a no ser que se elija en α o β, sobre una de las dos secciones principales CA o CB, porque entónces la normal del helizoide estará proyectada segun uno de los ejes $\alpha\omega$ o $\beta\omega$, que van a pasar por el centro ω.

De aquí resulta que para la cúspide de un elipsoide C, no hai sino dos líneas de curbatura que estén dirijidas segun los elementos $C\alpha$ y $C\beta$ de las dos secciones principales. Ademas, para este punto particular, las dos línaas de curbatura coincidirán totalmente con las secciones CAF y CBF; porque las normales del elipsoide tiradas por todos los puntos de la curba CA, estarán situados en el plano de esta curba, y las tanjentes de las secciones horizontales en los vértices α, A,... serán todas perpendiculares al plano de la elipse CAF. Los mismos motivos se aplican a la seccion CBF.

FIG. 132. 701. En el hiperboloide de una napa de la *fig.* 132, veremos con facilidad que una seccion paralela al plano tanjente XCY, dada debajo de él a una distancia infinitamente pequeña, nos dará una hipérbola cuyos dos vértices reales α y ε se hallarán sobre ACE; en tanto que si esta seccion estuviese encima de XCY, sería una hipérbola transtornada cuyos vértices reales β y λ se hallarian sobre BCL. Y como la normal de la superficie se proyectaria sobre la normal de una u otra de las dos hipérbolas, y esta última recta no va a pasar por el centro,

sino cuando el punto de contacto coincida con una de las cúspides, concluirémos de aquí, como lo hemos hecho arriba, que la normal OCH del hiperboloide en C, no puede ser encontrada por una normal infinitamente próxima, sino cuando esta última parte de un pnnto de la seccion principal CA o CB. Por consiguiente, queda demostrado que en la cúspide C del hiperboloide, no hai tampocó sino dos líneas de curbatura, que coincidan enteramente con ACE y BCL, por las mismas razones que en el elipsoide.

702. Volvamos ahora a examinar una superficie jenernl S que desde luego supondrémos ser convexa, al rededor del punto arbitrario M que es el que se considera. Hai siempre (núm. 696) un elipsoide Σ que es osculador de S en M; y si cortamos a estas dos superficies con un plano paralelo al plano tanjente, e infinitamente próximo a él, no solo todos los puntos de le seccion αNβ obtenida de este modo, serán comunes a S y Σ, sino que tambien las normales de estas dos superficies, respecto a cada uno de los puntos α, N, β,.... serán las mismas. Con efecto, hemos visto que dos secciones MD y MD', contenidas en un mismo plano normal cualquiera, eran osculadoras; es decir, que tenian dos tanjentes cousecutivas comunes, una en M y la otra en N; y como esta última tanjente unida con la tanjente NT de la curba αNβ determina un plano que *tocará al mismo tiempo a* S y Σ en el punto N, síguese que, la perpendicular a este plano será una normal comun a las superficies S y Σ. Sentado esto, hemos probado (núm. 700) que sobre el elipsoide Σ, ninguna normal, por mas próxima que esté, puede encontrar a la normal MO de la cúspide, sino cuando la primera salga del punto α situado sobre MA', o de un punto β situado sobre MB'; luego tampoco, sobre la superficie S, hai sino las dos normales αG y βH que vayan a cortar a la normal MO; y por consiguiente no hai, partiendo desde el punto M, sino dos líneas de curbatura *cuyos primeros elementos* Mα y Mβ *sean comunes a las secciones principales* MA y MB. Si ahora, partiendo de α, quisiéramos hallar un punto infinitamente próximo α' cuya normal fuese a cortar a la precedente αG, sería preciso elejir este nuevo punto sobre una de las dos secciones principales relativas a α; pero, en jeneral, ninguna de estas dos últimas estará en el plano MA; por consiguiente, la primera línea de curbatura Mαα'U será comunmente *gausa*, y solo será *tanjente a la seccion principal* MαA. Una FIG. 135.

consecuencia análoga tiene lugar respecto a la línea de curbatura MβV que tocará a la seccion principal MβB, pero jeneralmente se diferenciará de esta en el resto de su curso; y ademas, *estas dos líneas de curbatura* MU y MV *se cortarán formando ángulo recto* en M, como sucede a las dos secciones principales a quien son tanjentes.

FIG. 135. 703. Ademas, las porciones MG y MH de la normal primitiva MO, determinadas por su encuentro con las dos normales vecinas, y que MONGE ha llamado *radios de curbatura de la superficie* en el punto M, no son otra cosa que los dos *radios principales* definidos en el núm. 490. Con efecto, siendo las rectas MG y αG normales a la superficie S, precisamente lo son a la curba MA; y como ademas se hallan en su plano, su encuentro G es ciertamente el centro del círculo osculador (núm. 650) de la seccion MA: así mismo, H es el centro de curbatura de la seccion MB; pero la denominacion adoptada por MONGE se funda en una propiedad que importa hagamos conocer.

Si desde un punto G como centro, y con una de las normales GM o Gα, que son iguales (núm. 650), describimos una esfera, esta *tocará* a la superficie S *en dos puntos consecutivos* M y α, supuesto que dos de sus radios son normales a S; y esto mismo sucederá a la esfera descrita desde el punto H, con el radio HM=Hβ. Miéntras que si con el radio de curbatura MI=NI de otra seccion normal MND, describimos una esfera, esta tocará solo a la superficie S en M, y no en N; porque el radio NI *no sería normal a la superficie* S, pues acabamos de probar que la verdadera normal NK no puede ir a cortar a MO. Y así es que las porciones MG y MH de la normal en M, son los radios de dos esferas *únicas* que pueden tener *dos planos tanjentes consecutivos comunes con* S, y cuya curbatura espresa el máximo y el mínimo de curbatura que presentan las diversas secciones normales dadas al rededor del punto M. Sin embargo, no podemos decir que estas dos esferas son *osculadoras* de S; porque el doble contacto que cada una de ellas tiene con esta superficie, no tiene lugar sino en una direccion, y no en todos los alrededores del punto M, como lo requeriria el verdadero carácter de la osculacion (núm. 684).

704. Es tambien preciso que nos guardemos de creer que MG sea el radio de curbatura de la linea MαU, es decir, el radio del círculo que tenga con esta línea dos elementos comunes. Con efecto, es mui cierto

que siendo las dos rectas MG y αG normales a la superficie, lo son tambien respecto a la curba MαU; pero para que su encuentro G dé el centro de curbatura de MαU, es preciso que estas normales esten ámbas situadas en el plano osculador de esta curba (núm. 650); lo que no sucederá sino en el caso particular en que MU coincida con MA, o a lo ménos cuando MU y MA tengan un contacto de segundo órden.

705. Respecto a una superficie no convexa, desmostrarémos de un FIG. 136. modo enteramente semejante la existencia y propiedades de las *dos líneas de curbatura* relativas a un punto culaquiera M, construyendo (núm, 698) el hiperboloide osculador de esta supeficie en M, y aplicando lo que hemos probado para el encuentro de las normales en la cuspide de un hiperboloide (núm. 701). Solo que en el caso presente, los dos *centros de curbatura* G y H, estarán colocados uno debajo y otro encima del plano tanjente; pero todas las demas relaciones precedentes serán así mismo ciertas.

706. Cuando el punto M que consideramos sobre una superficie cualquiera, sea un *ombligo* (692), llegará a ser infinito el número de líneas de curbatura, lo mismo que el número de secciones principales a quienes deben ser tanjentes; pero esta circunstancia particular no se presenta nunca en las superficies no convexas, porque aun cuando los radios principales sean iguales en magnitud absoluta, no serian idénticos en cuanto a su posicion.

707. Despues de haber demostrado de este modo jeneral la existencia de dos líneas de curbatura para cada punto de una superficie cualquiera, está bien citemos varios ejemplos en que se efectúe inmediatamente la determinacion de estas líneas

En una superficie de revolucion descrita por un meridiano cualquiera FIG. 139 AME, este mismo meridiano es la primera línea de curbatura para cada uno de sus puntos, tal como el M; porque como las normales MG, αG, α'G',.... de la superficie, se hallan todas contenidas en el plano meridiano (núm. 130), irán a cortarse consecutivamente sobre la evoluta GG'G"..... de la curba MA. Como la segunda línea de curbatura pasa por el punto M, es evidentemente el paralelo MβV, supuesto que todas las normales de la superficie que salen de los puntos M, β, V,.... van a terminar (núm. 130) en el mismo punto H del eje. Agreguemos que en el caso presente los *dos radios de curbatura de la superficie* son el radio

de curbatura MG del meridiano, y la porcion MH de la normal comprehendida entre el punto considerado M y el eje de revolucion.

708. En cuanto a las dos *secciones principales* de la superficie (núm. 690) relativas a un punto cualquiera M, la primera es tambien el meridiano MA; porque el plano de esta seccion debe contener a la normal MG de la superficie, y al elemento Mα de la línea de curbatura que le es tanjente (núm. 702); y esta coincidencia completa entre la seccion principal y la línea de curbatura, manifiestamente se reproducirá siempre que esta última *sea plana*, y que *su plano contenga a la normal de la superficie*. La segunda seccion principal respecto al punto M, no coincide con la otra línea de curbatura MβV, porque esta, aunque es plana, no contiene a la normal MH; pero esta segunda seccion principal MAB la obtendrémos fácilmente, tirando segun MHG un plano secante perpendicular al plano de la primera seccion MA, y la curba MβB tendrá un elemento Mβ comun con el paralelo MβV. Ademas, los dos radios de curbatura de las seccciones normales MA y MB, serán (núm. 703) los radios do curbatura MG y MH de la superficie.

709. En un cilindro cuya base sea cualquiera, la jeneratriz rectilínea que pase por el punto que se considera, será evidentemente la primera línea de curbatura; porque como el plano tanjente es comun en todo el largo de la jeneratriz, las diversas normales serán paralelas entre sí, y desde luego estarán contenidas en un mismo plano, aunque en el caso presente no vayan a encontrarse sino al infinito. Esta jeneratriz será al mismo tiempo la primera secciou principal, por la razon jeneral citada en el número precedente; y la *curbatura* de la superficie *será nula* en el sentido de la jeneratriz, porque el radio de curbatura producido por el encuentro de dos normales vecinas, se hallará al infinito. Si en seguida tiramos, por el punto considerado, un plano perpendicular a la jeneratriz, *la seccion ortogonal* producida por este medio será la segunda línea de curbatura, supuesto que las normales del cilindro relativas a los diversos puntos de esta curba, se hallarán evidentemente en su plano, e irán a cortarse sobre la evoluta de esta seccion ortogonal cuyo radio de curbatura es segun esto el *radio mínimo* de la superficie; es decir, que *la curbatura máxima* del cilindro tiene lugar en sentido de la seccion ortogonal, la cual manifiestamente es tambien (núm. 708) la segunda seccion principal.

710. Del mismo modo veremos que en un cono cuya base sea cualquiera, cada jeneratriz rectilínea es a un mismo tiempo una línea de curbatura y una seccion prncipal, en cuyo sentido presenta la superficie una curbatura nula; y como todas estas jeneratrices deben ser cortadas formando ángulo recto por las líneas de la segunda curbatura, estas últimas serán las intersecciones del cono con esferas cuyo centro comun estará colocado en la cúspide. En cuanto a la segunda seccion principal relativa a nn punto dado sobre una jeneratriz, la obtendrémos tirando por la normal del cono en este punto, un plano secante perpendicular a la jeneratriz.

711. Si se trata de cualquiera superficie desarrollable, la jeneratriz rectilínea será siempre una línea de curbatura y una seccion principal al mismo tiempo, y su radio de curbatura se hallará al infinito, a causa de que el plano tanjente de la superficie es comun en todo el largo de esta jeneratriz. La segunda seccion principal relativa a un punto dado M, se obtiene tirando por la normal a este punto un plano secante perpendicular a la jeneratriz que pasa por él, y la segunda línea de curbatura que debe cortar formando ángulos rectos a todas las jeneratrices será una *voluta* de la arista de retroceso de la superficie. Y así, en el helizoide desarrollable de la *fig.* 96, las jeneratrices rectilíneas son las líneas de primera curbatura, y las de segunda son las secciones horizontales, como ABCDLMPQ....; porque esta espiral corta formando ángulo recto a todas las jeneratrices, y es tambien una voluta (núm. 661) de la hélice ($A\beta\gamma\delta$.... $A'\beta'\gamma'\delta'$....).

712. Cuando la superficie propuesta S sea gausa, la jeneratriz GMP no será ya una línea de curbatura, porque las normales al largo de esta recta, léjos de encontrarse, forman un paraboloide hipérbólico (núm. 595); pero como GMP se halla en el plano tanjente tirado por M, precisamente será la seccion de uno de los dos *planos normales límites* (núm. 694) que separan las secciones normales colocadas debajo del plano tanjente, de las que están situadas encima de él. Y como el plano tanjente en M cortará a la superficie gausa segun otra segunda rama Mα, si le tiramos su tanjente MQ que será la traza del segundo plano normal límite, y si se divide por mitad al ángulo PMQ y a su suplemento, por medio de las rectas MA y MB, estas últimas serán las trazas de las dos *secciones principales* sobre el plano tanjente, y tambien FIG. 143.

rán las tanjentes a las dos líneas de curbatura que parten desde M.

713. Hallaríamos resultados enteramente semejantes a éste, en una superficie S que, sin ser gausa, fuese no convexa, porque el plano tanjente de semejante superficie, precisamente la cortaria segun dos ramas que pasarian por el punto de contacto, y cuyas tanjentes indicarian tambien la posicion de los planos normales límites; y de aquí concluiríamos, lo mismo que arriba, la direccion de las secciones principales y de las líneas de curbatura en este punto.

714. Despues de estos varios ejemplos, volvamos a la teoría jeneral, y concibamos que partiendo desde un punto M, tomado a discrecion sobre una superficie cualquiera S, se tratan de hallar, entre los puntos infinitamente próximos al punto de partida, solos los dos M' y K, cuyas normales vayan a cortar a la de M: hecho esto, y partiendo de M', hagamos la misma indagacion respecto alos dos puntos M" y K', y continuemos operando del mismo modo con los puntos M"...., K, K'...., R, R'....; y hallarémos por este medio dos séries de líneas de curbatura,

MM'U, KK'U', RR'U",.... y MKV, M'K'V', M"K"V',....

que divididirán a la superficie propuesta en cuadriláteros curbilíneos cuyos lados se cortarán siempre *formando ángulos rectos* (núm. 702) e indicarán las direcciones de las *dos curbaturas de la superficie*, es decir, las direcciones al rededor de cada punto, en que presentará una curbatura máxima o mínima (núm. 703).

715. Si ahora concebimos tiradas por todos los puntos de una de las líneas de la primera curbatura MU, las diversas normales de la superficie S, estas rectas que consecutivamente se encontrarán, formarán una superficie desarrollable cuya arista de retroceso GG'G" que es tanjente a todas estas normales, será la série de centros de la primera curbatura de S, relativos a la línea MU. Observémos ademas, que esta arista de retroceso será *una evoluta* (núm. 658) de la línea MU, y hallarémos tambien que esta última es una línea de curbatura (núm. 711) respecto a la superficie desarrollable formada por las normales de que estamos tratando. Operando lo mismo con cada línea KU', RU", TU"',.... de la primera curbatura, obtendrémos una série de superficies desarrollobles, que cada una será normal a S, y cuyas aristas de retroceso GG'G ,...., $G_1G_1'G_1$"...., formarán, por medio de su reunion, una superficie Σ *lugar*

de los centros de la primera curbatura de S, y a la que serán tanjentes las normales de esta última. Así mismo, existirá tambien otra segunda superficie Σ' *lugar de los centros de la segunda curbatura* de S, que se formará por las aristas de retroceso, tales como HH'H"...., de todas las superficies desarrollables producidas por las normales tiradas al largo de cada línea de segunda curbatura MV, M'V', M"V",.... y tocarán tambien a esta superficie Σ' las mismas normales que a Σ.

716, De ordinario, los lugares Σ y Σ' de todos los centros de curbatura, no serán otra cosa que dos napas distintas de una misma superficie curba, sujetas a una jeneracion comun, y representadas por una equacion sola. Pero algunas veces, serán tambien dos superficies independientes, como sucede en las superficies de revolucion, en que la napa Σ' de los centros de curbatura relativos a los paralelos, se reduce al mismo eje de revolucion (núm. 707), y la napa Σ de los centros de curbatura relativos a los diversos meridianos, es una nueva superficie de revolucion enjendrada por la rotacion de la evoluta plana del meridiano (núm. 707) al rededor del mismo eje. Por lo demas, las dos napas de los centros de curbatura de la superficie S son, con respecto a esta, lo que las evolutas son relativamente a las líneas curbas:

717. Es preciso observemos bien que las superficies desarrollables, FIG. 421. normales a S al largo de las líneas de primera curbatura MU, KU', RU",.... son tanjentes a la segunda napa de los centros Σ', en tanto que a la primera napa Σ la tocan las superficies desarrollables que pasan por las líneas de segunda curbatura MV, M'V', M"V".... Con efecto, las normales que parten de M, M', y M", se cortan sobre la primera napa Σ en G, y G', lo mismo que las normales que salen de K, K,' y K", que se cortan en G_1, y G_1'; pero el encuentro de las normales desde M a K, desde M' a K', y desde M" a K", tiene lugar en H, H_1, y H_2, sobre la segunda napa Σ': luego esta napa es el lugar de las *intersecciones consecutivas* de todas las superficies desarrollables de la primera série, o bien es su *involucro* (núm. 190), y por consiguiente, es tanjente a cada una de ellas. Del mismo modo veremos que la napa Σ es el *involucro* de todas las superficies desarrollables relativas a las líneas de la segunda curbatura.

718. Lo que precede nos enseña que dos superficies desarrollables normales a S, y que pertenecen a la misma série, o que pasan por dos líneas de curbatura de la misma especie, como MU y KU', se cortan segun

una curba HH_1H_2 que está situada en la napa de los centros de la especie opuesta. Pero si comparamos las superficies desarrollables de séries diferentes, veremos que se cortan de dos en dos segun una normal de S, como sucede con GMM'U y GMKV que tienen por interseccion a la recta MG. Ademas, esta interseccion se efectúa siempre formando *ángulo recto*, porque los planos MM'G y KMG que manifiestamente son tanjentes a estas dos superficies desarrollables, son perpendiculares uno a otro, en virtud de que los elementos MM' y MK de las dos líneas de curbatura son perpendiculares entre sí y a la normal MG.

719. Pero el plano M'MG tanjente a una superficie desarrollable de la primera série, debe tocar (núm. 717) a la segunda napa de los centros Σ'; y así mismo, el plano KMG será tanjente a la primera napa Σ: luego, supuesto que estos planos son rectangulares, siempre que considerémos a estas dos napas desde un *punto de vista* M tomado arbitrariamente sobre S, verémos *los contornos aparentes* de estas dos napas como cortados siempre formando ángulos rectos.

720. Observemos tambien que el plano M'MG es el plano osculador de la arista de retroceso GG'G".... situado sobre la napa Σ; y como este plano es perpendicular al KMG que toca a esta napa (núm. 717), síguese que la curba GG'G".... tiene todos sus planos osculadores *normales a la napa* Σ; y por consiguiente (núm. 189) esta curba es *la línea mínima* entre dos de sus puntos sobre la superficie Σ. La misma consecuencia tiene lugar en todas las demas aristas de retroceso situadas sobre esta napa, así como tambien respecto a todas las que componen la napa Σ'.

721. Si las dos napas Σ y Σ' se cortan en alguna parte, lo efectuarán en virtud de lo que acabamos de decir, formando ángulos rectos, y su interseccion Φ se llama *el lugar de los centros de curbatura esférica*, porque cada tanjente a la curba Φ será una normal de S, que irá a penetrar a esta superficie en un punto λ en el cual las dos curbaturas tendrán evidentemente el mismo radio y el mismo centro: de suerte que serán iguales, que es lo mismo que sucede en cada punto de una esfera. El conjunto de todas las tanjentes a la interseccion Φ irá tambien a penetrar a la superficie S segun una curba $\lambda\lambda'\lambda''$..., que se llama *línea de las curbaturas esféricas*, y que necesariamente corta a todas las líneas de curbatura de la primera y de segunda especie.

"Es mui evidente," dice *Monge*, "que la línea de las curbaturas esféricas sobre la superficie S, es una voluta de la línea de los centros de curbatura esférica Φ. Y así, despues de haber fijado un hilo, en uno de los puntos de esta interseccion de las dos napas de los centros, si al estenderle, le hacemos mover de modo que se envuelva sobre esta interseccion, y que la parte rectilínea del hilo sea siempre tanjente a esta curba, uno de los puntos de este hilo recorrerá la línea de las curbaturas esféricas. Pero si al estender el hilo, no nos sujetamos a ninguna condicion, y suponemos que no ejerce ningun razonamiento en la napa de los centros, cualquiera que sea la posicion en que se le considere, estará dividido en tres partes: la primera estará envuelta en una parte de la interseccion de las dos napas; la segunda estará doblada y tirante sobre la napa de los centros a que el hilo se haya aproximado, y se hallará aplicada sobre una de las aristas de retroceso (*) cuyo lugar es esta napa, y estas dos partes de curba se tocarán en su punto comun; la tercera parte del hilo en línea recta será tanjente a esta arista de retroceso, y normal a la superficie S; por último, la estremidad del hilo se hallará sobre esta misma superficie. Así es que, ajitando el hilo constantemente tendido, podremos transportar el mismo punto de él a todos los puntos subcesivos de la superficie. Por consiguiente, vemos que puede enjendrarse una superficie cualquiera por los dos movimientos contínuos del punto de un hilo tendido que se envuelve sobre la napa de los centros, lo mismo que puede enjendrarse una curba plana, por el punto de un hilo estirado que se envuelve sobre la evoluta de la curba.

723. "Presentemos ahora," continúa *Monge*, "algunos ejemplos de la utilidad que estas jeneralidades pueden presentar a ciertas artes. El primer ejemplo le tomarémos de la arquitectura.

"Las bóvedas que se construyen de piedra sillar se componen de diferentes piezas, a las cuales se les da el nombre jenérico de *dovelas*. Cada dovela tiene varias caras cuya ejecucion requiere el mayor cuidado: 1.º la cara que debe formar el paramento, y debe ser

---

(*) *Porque esta arista es la curba* mínima *entre dos de sus puntos, segun lo hemos demostrado núm.* 720.

una parte visible de la bóveda debe tambien ejecutarse con la mayor exactitud, esta cara se llama *intrados*; 2.º las caras en que las dovelas se aplican unas a otras se llaman jeneralmente *juntas*. Las juntas requieren tambien la mayor exactitud en su ejecucion, porque la presion se transmite de una dovela a la otra perpendicularmente a la superficie de la junta, y es necesario que las dos piedras se toquen en el mayor número posible de puntos, con el fin de que cada punto de contacto sufra la menor presion, y que en todos ellos se aproxime cuanto se pueda a la igualdad. Por consiguiente, es preciso que en cada dovela se acerquen las juntas lo mas que se pueda a la verdadera superficie, de que deben formar parte; y para que este objeto quede mas fácilmente satisfecho, es indispensable que la superficie de las juntas sea de la naturaleza mas sencilla y de la ejecucion mas susceptible de precision. Por esto es por lo que de ordinario se hacen las juntas planas, pero no todas las superficies de las bóvedas admiten esta disposicion, y en algunas de ellas chocaríamos con lo mas conveniente de que luego hablarémos, si no diésemos a las juntas una superficie curba. En este caso, es preciso elejir entre todas las superficies curbas que puedan cumplir exactamencon las demas condiciones, aquellas cuya jeneracion sea la mas sencilla, y su ejecucion mas susceptible de exactitud. Y como entre todas las supérficies curbas, las que son mas fáciles de ejecutar son las enjendradas por el movimiento de una línea recta, y sobre todo las superficies desarrollables; síguese que cuando se necesite que las juntas de las dovelas sean superficies curbas, las compondremos en cuanto sea posible de superficies desarrollables".

"Una de las principales condiciones con que debe cumplir la forma de las juntas de las dovelas, es la de ser, en todas partes, perpendicular es a la superficie de la bóveda que forman estas dovelas. Porque si los dos ángulos que forma una misma junta con la superficie de la bóveda, fuesen sensiblemente desiguales, el que entre estos ángulos excediese al ángulo recto, sería capaz de una resistencia mayor que el otro, y en la accion que dos dovelas consecutivas ejerciesen una sobre otra, el ángulo menor que el recto estaria espuesto a romperse, o por lo ménos esto deformaria la bóveda y aun podria alterar su solidez, y disminuir la duracion del edificio. Aun cuando la superficie de una junta deba ser curba, conviene enjendrarla por una recta que siempre sea

perpendicular a la superficie de la bóveda; y si ademas, queremos que la superficie de junta sea desarrollable, es preciso que todas las normales a la superficie de la bóveda, que componen, por decirlo así, la junta, estén consecutivamente de dos en dos en un mismo plano. Y como acabamos de ver que no puede quedar satisfecha esta condicion, a no ser que todas las normales pasen por una misma línea de curbatura de la superficie de la bóveda; síguese que si las superficies de las juntas de las dovelas de una bóveda deben ser desarrollables, es precisamente necesario que estas superficies encuentren a la de la bóveda en sus líneas de curbatura.

" Ademas, cualquiera que sea la exactitud con que se hayan ejecutado las dovelas de una bóveda, su division es siempre aparente en la superficie, y trazan en ella líneas mui sensibles, estas líneas deben estar sujetas a leyes jenerales, y cumplir con convenios particulares, segun sea la naturaleza de la superficie de la bóveda. Entre las leyes jenerales, unas son relativas a la estabilidad, y otras a la duracion del edificio; de este número es la regla que prescribe que las juntas de una misma dovela sean rectangulares entre sí, por la razon misma de que deben estas ser pendiculares a la superficie de la bóveda. Y así, las líneas de division de las dovelas deben ser de tal naturaleza que las que dividan a la bóveda en hiladas, sean todas perpendiculares a las que dividan a una misma hilada en dovelas. En cuanto a los convenios particulares, los hai de muchas clases, nuestro objeto no es hacer aquí su enumeracion; pero hai uno principal, y es que las líneas de division de las dovelas, que segun acabamos de ver son de dos especies, y que todas deben encontrarse perpendicularmente, deben tambien contener el caráter de la superficie a que pertenecen. Y como no existe otra línea sobre la superficie curba, que pueda a un mismo tiempo llenar todas estas condiciones, sino las dos séries de líneas de curbatura, y estas las satisfacen completamente: síguese que la division de una bóveda en dovelas debe siempre hacerse segun las líneas de curbatura de la superficie de la bóveda, y las juntas deben ser porciones de superficies desarrollables formadas por las normales a la superficie que, consideradas consecutivamente, estén de dos en dos en el mismo plano; con el fin de que en cada dovela, las superficies de las juntas y la de la bóveda sean todas rectangulares.

" Antes del descubrimiento de las consideraciones jeométricas en que está fundado todo cuando que acabamos de decir, tenian los artistas una idea confusa de las leyes a que conducen, y jeneralmente era costumbre el conformarse con ellas. Así es que, por ejemplo, cuando la superficie de la bóveda, era de revolucion, ya sea que fuese esférica, o ya en lecho jirante, dividian sus dovelas por medio de meridianos, y de paralelos, es decir, segun las líneas de curbatura de la superficie de la bóveda. Las juntas que correspondian a los meridianos, eran planos tirados pos el eje de revolucion; las que correspondian a los paralelos, eran superficies cónicas de revolucion al rededor del mismo eje: y estas dos especies de juntas eran rectangulares entre sí, y perpendiculares a la superficie de la bóveda. Pero, cuando las superficies de las bóvedas no tenian una jeneracion tan sencilla, y cuando sus líneas de curbatura no se presentaban de un modo tan marcado, como en las bóvedas de esferoides alongados, y en otro gran número de ellas, no podian los artistas satisfacer a todas las conveniencias, y sacrificaban, en cada caso particular, las que les presentaban mayores dificultades.

" Por consiguiente, convendria que en cada una de las escuelas de Jeometría descriptiva establecidas en los departamentos, se ocupase el profesor en la determinacion y construccion de las líneas de curbatura de las superficies de que con mas jeneralidad se hace uso en las artes, con el objeto, de que en caso necesario, los artistas que no pueden consagrar mucho tiempo a esta clase de investigaciones, pudiesen consultarlas con fruto y aprovecharse sus resultados.

724. " El segundo ejemplo que indicamos, lo tomarémos del arte del gravado

" En el gravado, se espresan las tintas de las diversas partes de las superficies de los objetos representados, por medio de raitas que se hacen tanto mas próximas y fuertes cuanto mas oscura deba ser la tinta. Cuando la distancia a que debe verse el gravado, es bastante grande para que los trazos individuales de las raitas pnedan percibirse, el jénero de estas raitas es casi indiferente; y cualquiera que sea el contorno de estos trazos, puede el artista variarlos y multiplicarlos, hasta que obtenga la tinta qne desea para producir el efecto pedido. Pero, y esto es lo que mas jeneralmente sucede, cuando el gravado está destinado a verse de bastante cerca para que los contornos de los trazos de las raitas

se perciban, no son entónces indiferentes estos contornos. Para cada objeto, y para cada parte de la superficie de un objeto, hai contornos de raitas mas propios unos que todos los otros, de dar una idea de la curbatura de la superficie; estos contornos particulares son siempre dos en número, y algunas veces los gravadores emplean al mismo tiempo los dos, cuando para recargar con mas facilidad las tintas, cruzan las raitas. Estos contornos, de que no tienen aun los artistas sino un sentimiento confuso, son las proyecciones de las líneas de curbatura de la superficie que quieren espresar. Como la superficie de la mayor parte de los objetos no son susceptibles de definicion rigurosa, no son tampoco sus líneas de curbatura de naturaleza adecuada a poderse determinar ni por el cálculo ni tampoco por medio de construcciones gráficas. Pero, si desde su tierna edad, se hubiese ejercitado a los artistas en diferentes superficies susceptibles de definiciones exactas, serian mas sensibles a la formacion de estas líneas, y a su posicion, aun respecto a los objetos ménos determinados; los ejecutarian con mas precision, y sus obras tendrian mas espresion.

"No insistirémos mas sobre este objeto, que quizás no presenta sino las menores ventajas que las artes e industria pueden sacar del establecimiento de las escuelas de Jeometría descriptiva en cada una de las villas principales de Francia".

725. Determinacion grafica *de las líneas de curbatura.* Hemos citado ya (números 707, 708,....) varios jéneros de superficies en que es fácil percibir inmediatamente la forma de estas líneas; pero si quisiésemos hallar sus direccionse en un punto M dado sobre una superficie cualquiera S, ved aquí la marcha que sería preciso seguir, suponiendo que esta superficie es *convexa.* Figurémonos, sin construirle, el elipsoide osculador S en el punto M, que es el mismo que hemos representado ya en la *fig.* 135; y en seguida, recordemos (núm. 696) que todo plano normal corta a estas dos superficies segun las curbas MD y MD', que tienen en M el mismo radio de curbatura ρ, y que ademas, este radio está unido a los semi-ejes MO$=c$, OD'$=d$ de la elipse MD', por la relacion $\rho = \frac{d^2}{c}$, o $d = \sqrt{c\rho}$. De aquí se sigue que, conociendo a ρ y c que tiene una lonjitud arbitraria, podrémos hallar a OD'$=d$ por una me- FIG. 135.

dia proporcional; ademas, esta última línea será siempre, respecto a cada plano normal, un semi-diámetro de la elipse A'B'E', cuyos ejes, desconocidos aquí de magnitud y posicion, evidentemente serán suficientes para hallar la curbatura y posicion de las secciones principales MA y MB de la superficie S en M; por esta razon, llamarémos *indicatriz* a esta elipse A'B'E' que es la seccion dada al elipsoide osculador, con un plano tirado por el centro, paralelamente al plano tanjente del punto M.

FIG. 135 Y 137 726. Para construir esta indicatriz (*), dirijirémos por el plano normal en M diversos planos secantes bastante próximos unos de otros, y despues de haber construido *en su verdadera magnitud* las secciones que de este modo resulten en S, indagarémos por el método del núm. 666, sus radios de curbatura $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ relativos al punto M; en seguida, sobre un plano cualquiera y partiendo del punto arbitrario *m*, trazarémos los radios vectores *md*, *md'*, *md''*,.... que formen entre sí los mismos ángulos que los que comprehendian entre sí los planos secantes, y que sus lonjitudes sean iguales a las medias proporcionales siguientes:

$$md = \sqrt{c\rho},\ md' = \sqrt{c\rho'},\ md'' = \sqrt{c\rho''},\ \ldots\ldots$$

en cuyas fórmulas *c* espresa una lonjitud arbitraria, pero constante. Hecho esto, la curba que pase por todos los puntos *d*, *d'*, *d''*,.... será *la indicatriz* de que acabamos de hablar arriba; y si despues de haber trazado esta elipse, describimos con el radio *md''* un arco de círculo que la corte en *f*, la recta *ma* tirada por el medio de este arco, y la perpendicular *mb*, serán los dos semi-ejes de la indicatriz, los cuales son tambien los del elipsoide osculador que tiene por tercer eje, segun la normal, a la línea 2*c*. De aquí resulta (números 696 y 703) que los radios de curbatura de la superficie S en M, tendrán por magnitudes a

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c} \quad \text{y} \quad R' = \frac{\overline{mb}^2}{c};$$

(*) *Esta marcha la ha empleado ántes M. Dupin, en sus* Desarrollos de Jeometría.

y será tambien conocida la posicion de las secciones principales, porque sus planos deberán pasar por la normal en M, y formar con el plano de la seccion *md* ángulos iguales a *dma* y *dmb*; o mas bien, si miramos el plano de la *fig.* 137 como paralelo al plano tanjente de S en M (*fig.* 135), las rectas *ma* y *mb* serán las trazas de los planos normales que contienen a esas secciones principales; y tambien serán las proyecciones de las tanjentes a las dos líneas de curbatura que parten del punto M, de modo que el primer elemento de cada una de estas líneas estará dirijido segun *ma* o *mb*.

727. Cuando la superficie propuesta S, sea *no convexa* al rededor del punto asignado M, nos imajinarémos, sin necesidad de construirle, el hiperboloide osculador que hemos representado ya en la *fig.* 136, y recordarémos (núm. 686) que los radios de curbatura de las secciones normales dadas por la cúspide M de este hiperboloide, están ligados a los diámetros de la seccion paralela al plano tanjente que pasa por el centro O, por medio de la relacion $\rho = \frac{d^2}{c}$; y en seguida, como estas secciones normales tienen la misma curbatura que las producidas por los mismos planos en la superficie S, deducirémos de aquí el procedimiento gráfico siguiente. FIG. 136 Y 138.

Dirijirémos por la normal de S en M, varios planos secantes bastante próximos unos a otros, y despues de haber construido *en su verdadera magnitud* estas secciones y sus radios de curbatura ρ, ρ', ρ'',.... (núm. 666) relativos al punto M, determinarémos las medias proporcionalas siguientes:

$$d = \sqrt{c\rho},\ d' = \sqrt{c\rho'},\ d'' = \sqrt{c\rho''},\ \ldots\ldots$$

en las cuales *c* representa una línea arbitraria pero constante; en seguida tomarémos estas lonjitudes *d*, *d'*, *d''*,.... segun las rectas *md*, *md'*, *md''*,... trazadas sobre un plano cualquiera, pero de modo que formen entre sí los mismos ángulos que comprehenden los planos normales de que nos hemos servido; y *la indicatriz* que pase por todos los puntos *d*, *d'*, *d''*,.... determinados de este modo, será la hipérbola que producirá en el hiperboloide osculador, un plano secante tirado por el centro paralelamente al plano tanjente del punto M.

728. Las construcciones precedentes suponen que todos los radios

$\rho, \rho', \rho'', \ldots$ son positivos; porque, si uno de los planos normales a S nos diese una seccion *situada encima* del plano tanjente, como el radio de curbatura ρ_2 de esta seccion sería *negativo* (núm. 686, *nota*), tendríamos que la media proporcional $\sqrt{c\rho_2}$ sería imajinaria, cuyo resultado ciertamente está en perfecta armonía con la naturaleza de los diámetros de la hipérbola d; d', d'',.... que ya no encuentran a esta curba cuando se desvian mas allá de cierto límite, pero que exije una modificacion en las operaciones gráficas. Aun cuando encontremos secciones normales situadas encima del plano tanjente de S en M, no harémos cuenta sino de la mognitud absoluta de sus radios de curbatura $\rho_2, \rho_2', \rho_2'', \ldots$ y despues de haber construido las medias proporcionales

$$m\delta = \sqrt{c\rho_2},\quad m\delta' = \sqrt{c\rho_2'},\quad m\delta'' = \sqrt{c\rho_2''},\ \ldots\ldots$$

tendrémos cuidado de distinguir esta clase de radios vectores, para reunir sus estremidades por medio de una hipérbola particular $\delta b\delta'$ que será una nueva rama de *la indicatriz*, y que podemos mirar como la seccion que produciria en el hiperboloide osculador, un plano paralelo al plano tanjente, pero tirado *encima* del punto M, y a una distancia igual a c.

FIG. 138. 729. Sentado esto, construirémos el primer eje ma de la indicatriz, tirándole por el medio del arco de círculo df descrito con uno de los diámetros md, en seguida, el segundo eje mb que es perpendicular al primero, y de aquí concluirémos las asíntotas mP y mQ comunes a estas dos hipérbolas *conjugadas*. En este caso, los dos radios de curbatura de la superficie S en el punto M (núm. 698) tendrán por magnitudes a

$$R = \frac{\overline{ma}^2}{c} \text{ y } R' = \frac{\overline{mb}^2}{c},$$

y las secciones principales nos las darán los dos planos normales que formen con el plano comun relativo a md, los ángulos dma y dmb; o más bien, si miramos al plano de la *fig.* 138 como paralelo al plano tanjente de S en M, las rectas ma y mb serán las trazas de los planos normales que contienen a estas secciones principales, y tambien serán las proyecciones de las tanjentes a las dos líneas de curbatura que parten de M.

730. En cuanto a los *planos normales límites* que separan las secciones *convexas* o situadas debajo del plano tanjente, de las que se hallan encima y que llamarémos *cóncavas*, sabemos (núm. 694) que cortan a la superficie S segun curbas cuyos radios de curbatura son infinitos en el punto M; luego estos planos tendrán por trazas sobre el plano tanjente, a los diámetros indefinidos de la indicatriz, es decir, a las dos asíntotas mP y mQ que se determinarán por medio del rectángulo construido sobre los dos ejes ma y mb; de aquí resulta que estas asíntotas tendrán cada una *un contacto de segundo órden*, por lo ménos, con las dos secciones normales *límites*; con efecto, es fácil ver que son precisamente las intersecciones del plano tanjente en M con el hiperboloide osculador.

731. Como ademas, este plano tanjente debe cortar a la superficie S no convexa segun una curba de dos ramas que pasan por el punto M, sucederá tambien que las rectas mP y mQ serán tanjentes a estas dos ramas. Con efecto, cada una de estas rectas se halla en el plano tanjente, y tiene dos elementos comunes con S, segun lo que se ha dicho en el número precedente; luego estos dos elementos pertenecen a la interseccion de la superficie por su plano tanjente, y cada rama curba de esta ofrecerá segun esto un contacto de segundo órden con mP o mQ. Ademas, estas son dos ramas que nos darán los límites precisos, de las cuatro rejiones alternativamente convexas o cóncavas (núm. 694) que presenta la superfiaie al rededor del punto M.

732. Las condiciones precedentes nos dan el modo de simplificar el método del núm. 727 respecto a una superficie S no convexa, admitiendo para ello que sabemos construir las tanjentes en un punto múltiplo de la interseccion de esta superficie con su plano tanjente; o limitándonos a tirarlas aproximadamente, hipótesis tanto mas plausible cuanto que la direccion de estas rectas estará aquí mejor indicada, porque cada rama de la interseccion nos presentará un arco casi rectilíneo (núm. 731) en los alrededores del punto considerado M. Con efecto, bastará construir esta interseccion sobre un plano paralelo al plano tanjente de S en M, y tirarle las tanjentes mP y mQ al punto múltiplo, las cuales serán las asíntotas de *la indicatriz* que no tendrémos necesidad de trazar; dividir en seguida en dos partes iguales a los ángulos agudos y óbtuos que forman estas asíntotas; y hecho esto, las rectas bisectoras ma y mb serán las trazas de los planos normales *principales*, y tambien las tanjentes a las

dos líneas de curbatura que parten desde M. En seguida, nos habrá mas que construir las secciones causadas en la superficie S por cada uno de estos planos principales, y hallar (núm. 666) los radios de curbatura de estas secciones que serán los de la superficie misma.

Esta marcha se emplearia con ventaja en un punto cualquiera de un hiperboloide o paraboloide gauso, porque la seccion del plano tanjente estaria compuesta de dos rectas que ocuparian el lugar de las tanjentes que era preciso tirar aquí arriba aproximadamente. Respecto a una superficie gausa cualquiera (*fig.* 143) una de estas tanjentes sería la jeneratriz rectilínea GMP, y la segunda rama Mα de la interseccion, se obtendria por la marcha jeneral del núm. 583.

733. Por el contrario, si quisiésemos construir rigurosamente las tanjentes al punto múltiplo de la interseccion de una superficie cualquiera no convexa, con su plano tanjente, no habria mas que determinar, como en el núm. 727, las direcciones y los radios de curbatura de las dos secciones principales relativas al punto de contacto asignado; y deducir en seguida, por medio del núm. 730, las asíntotas de la indicatriz, que serian las tanjentes que buscamos.

FIG. 45. 734. APLICACION AL TORO. A este toro, representado en el depurado 45, le ha cortado su plano tanjente M'T'T relativo al punto (M, M'), segun una curba de dos ramas MHRE.... y M*hre* que hemos construido en el núm. 268. Para hallar las tanjentes en M de estas ramas, observarémos que en el caso actual en que la superficie es de revolucion, el meridiano A'M'B' es a un mismo tiempo primera línea de curbatura y segunda seccion principal (núm. 708) cuyo radio de curbatura es R=M'ω; la otra seccion principal estará situada en el plano ωM'ζ perpendicular al meridiano precedente, y tendrá por radio de curbatura a R'=M'ζ, es decir, a la porcion de la normal comprehendida entre el punto M' y el eje O'Z' de revolucion (núm. 708). Para deducir de aquí el hiperboloide osculador en el punto (M, M'), es preciso (núm. 698) dar al eje real de esta superficie, dirijido segun la normal (M'ω, MB), una lonjitud arbitraria c que al presente elejirémos precisamente igual al radio M'ω, porque así resulta para el segundo eje real dirijido segun ($\omega\alpha$, BC), este sencillo valor $a=\sqrt{c.R}$=M'ω; es decir, que el hiperboloide será de revolucion, y tendrá por círculo de la garganta al meridiano dado (A'M'B'α, AC).

En cuanto al eje imajinario que sea perpendicular a este meridiano y pase por su centro (ω, B), su lonjitud determinada por $b=\sqrt{c\,.\,R'}$, será la recta M'β media proporcional entre M'ω y M'ζ. Ahora que el hiperboloide osculador está completamente determinado, quedarémos dispensados de construir la indicatriz por puntos, porque esta curba no es otra cosa (núm. 727) que la seccion dada al hiperboloide por el plano $\alpha\omega\varepsilon$ paralelo al plano tanjente M'T"T; por consiguiente, esta será una hipérbola que tendrá por eje real a $\omega\alpha$, y por eje imajinario, a una recta igual a M'β levantada en el centro (ω, B) perpendicularmente al plano vertical. Las asíntotas de esta indicatriz serán ahora de fácil construccion; pero como en seguida sería preciso proyectarlas sobre el plano tanjente M'T"T, lo que evidentemente se reduce a tomar a M'δ'$=\omega\alpha$ y levantar desde el puuto δ' una perpendicular al plano vertical que tenga por lonjitud a M'β; la hipotenusa del triángulo rectángulo formado de este modo, será la proyeccion de la asíntota sobre el plano tanjente, y tambien será (núm. 731) la tanjente misma de la seccion causada por este plano en el toro. En fin, para obtener esta tanjente sobre el plano horizontal, es preciso proyectar el lado M'δ' de este triángulo segun Mδ, levantar en seguida una perpendicular $\delta\lambda$=M'β, y la recta λM será la tanjente de la rama M*hre*. La tanjente λ"M de la otra rama MHRE se obtendrá por medio de la segunda asíntota, y como esto se reduce a tomar a $\delta\lambda$"$=\delta\lambda$, vemos que en cuanto al método práctico, la construccion de estas dos tanjentes no exije sino un número corto de operaciones mui sencillas.

735. Despues de haber determinado por los métodos precedentes, las tanjentes o los primeros elementos de las dos líneas de curbatura relativos a un punto cualquiera M señalado sobre una superficie jeneral S, será preciso para obtener el curso entero de estas líneas, que repitamos operaciones semejantes a las anteriores en un pnnto M_2 mui próximo a a M, y elejido sobre una de las dos tanjentes halladas ya; operar en seguida lo mismo con un punto M_3 próximo a M_2 y colocado sobre una de las dos direcciones que siguen las líneas de curbatura relativas a este último punto; y así subcesivamente. Pero la complicacion e incertidumbre de semejante marcha, hace ver que la determinacion *completa* de las líneas de curbatura es un problema que jeneralmente es insoluble por medio de operaciones puramente gráficas; por consiguiente, debemos re-

currir al Análisis para conseguir datos ciertos sobre esta materia, cuando la superficie no se halle entre alguno de los jéneros examinados en los números 707,.... 711; y ahora vamos a esponer los bellos resultados a que llegó *Monge* en el ejemplo de un elipsoide de tres ejes desiguales (*).

FIG. 144. 736. Sean a, b y c los tres semi-ejes del elipsoide dado, entre los cuales suponemos que existe la relacion $a > b > c$. Adoptémos por plano horizontal de proyeccion, un plano paralelo a los dos ejes mas grandes, y elijamos el plano vertical paralelo al eje máximo y al mínimo. Si entónces (O, O') es el centro de la superficie, y describimos sobre los semi-ejes OA$=a$ y OB$=b$, una elipse (ABDE, A'D'), este será el contorno aparente del elipsoide sobre el plano horizontal; en tanto que el contorno aparente relativo al plano vertical, será la elipse (A'C'D'F', AD) descrita con los semi-ejes O'A'$=a$ y O'C'$=c$. La tercer elipse principal, que tiene por semi-ejes a b y c, se halla proyectada sobre BE y C'F'; y la hemos abatido aquí segun EC''. En cuanto a las excentricidades de estas tres elipses, las hallarémos gráficamente por medio de las relaciones conocidas

$$e = \sqrt{a^2-b^2},\quad e' = \sqrt{a^2-c^2},\quad \text{y}\quad e'' = \sqrt{b^2-c^2};$$

y así será fácil construir, con el ausilio de las cuartas proporcionales, las dos distancias

$$O\alpha = a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} = \frac{ae}{e'},\quad \text{y}\quad O\beta = b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2-c^2}} = \frac{be}{e''},$$

sobre estas, como semi-ejes, describirémos una *elipse ausiliar* $\alpha\varepsilon\beta$, y en seguida una *hipérbola ausiliar* $\alpha\delta\gamma$. Hecho esto, tomarémos sobre los ejes de la proyeccion vertical, dos distancias

$$O'X' = a\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}} = \frac{ae'}{e},\quad \text{y}\quad O'Z' = c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}} = \frac{ce'}{e''},$$

con las las cuales, como semi-ejes, describirémos una nueva *elipse ausi-*

(*) *Véase el capítulo XVI de nuetra* Análisis aplicada a la Jeometría de tres dimensiones.

liar X'λZ' que se hallará siempre fuera del elipsoide, porque sus dos ejes son evidentemente mayores que *a* y *c*.

737. Sentado esto, el análisis nos enseña que las líneas de curbatura de la primer especie están proyectadas horizontalmente segun las hipérbolas TU, LS, KR,.... y verticalmente segun las elipses T'U', L'S', K'R',.... que con los datos precedentes se construyen, del modo siguiente. Despues de haber elejido sobre OA un punto arbitrario T, pero situado entre O y α, se trazan dos coordenadas Tε y εθ de la elipse ausiliar αβ; en seguida, con la abscisa OT como eje real, y con la ordenada Oθ como eje imajinario, se describirá una hipérbola TU. Hecho esto, se proyecta el punto U en que esta hipérbola va a cortar al contorno aparente ABD, a U', desde el cual se trazan las dos coordenadas U'π y πζ de la elipse ausiliar X'Z'; en seguida, con la abscisa O'U' y la ordenada O'ζ como semi-ejes, se describe una elipse ζT"U' que es la proyeccion vertical de la línea de curbatura proyectada ya horizontalmente segun TU. Conocemos mui bien que esta línea de curbatura es *gausa*, pero *cerrada*, y que presenta partes simétricas, encima y debajo, delante y detras de los planos principales del elipsoide, lo que motiva que sus dos proyecciones no ocupen sino una porcion limitada de la hipérbola o de la elipse.

738. En cuanto a las líneas de curbatura de la segunda especie, estas se proyectan horizontal y verticalmente sobre las elipses (φMV, φ'M'V') y (ϒNI, ϒ'N'I'),.... que se construyen del modo siguiente. Despues de haber tomado un punto arbitrario V entre α y A, se trazan las dos coordenadas Vδ y δψ de la hipérbola ausiliar αγ: y en seguida, sobre las rectas OV y Oψ como semi-ejes, se describe una elipse ψVφ. Hecho esto, se proyecta el vértice φ o ψ de esta curba, sobre la elipse principal abatida segun EC", y se levanta el pnnto φ" a φ' sobre el plano vertical; trazando en seguida las dos coordenadas φ'μ y μW' de la elipse ausiliar X'Z', obtendrémos los dos semi-ejes O'W' y O'φ' de la elipse que buscamos φ'V'W', y solo una parte de ella recibe la proyeccion vertical de la línea de curbatura que es tambien *cerrada* y *gausa*. FIG. 144.

739. Estudiemos ahora las variaciones de forma que padecen las líneas de curbatura de las dos especies, cuando los puntos T y V se alejan o aproximan a α. Cuando el punto T está en O, y el punto V en A, la proyeccion de la primera línea de curbatura se reduce evidentemente a la recta BOE, y la segunda se convierte en la elipse ABD, lo

que nos dice que las mismas dos elipses principales EC" y ABDE son líneas de curbatura; con efecto, las normales del elipsoide tiradas por todos los puntos de la una o de la otra de estas curbas, están situadas en su plano, y no pueden dejar de cortarse consecutivamente. Cuando los puntos T y V se aproximan a α, la hipérbola TU y la elipse VMφ se estrechan cada vez mas, y cuando estos puntos hayan llegado a α, la segunda se reduce evidentemente a la porcion de recta $\alpha\omega$, miéntras que la primera es reemplazada por las porciones rectilíneas αA y ωD; de modo que en este caso las dos líneas de curbatura vienen a coincidir, y su conjunto nos da la elipse principal (AD, A'C'D'). Vemos pues, que el punto α y su homólogo ω determinan sobre el elipsoide cuatro puntos singulares (α, α'), (α, α''), (ω, ω'), (ω, ω''), en los cuales las líneas de curbatura de las dos especies vienen a confundirse, así tambien nos lo enseña la proyeccion vertical en la que las elipses ζT'U' y φ'V'W' se abren cada vez mas, una en sentido horizontal, y la otra en el vertical; o mas bien, en estos cuatro puntos, la direccion de las líneas de curbatura son indeterminadas, segun lo prueba el análisis, y la *curbatura* de la superficie al rededor de cada uno de ellos *es uniforme*; de modo que estos son cuatro *ombligos*, segun los hemos definido en el núm. 692.

740. El Análisis prueba tambien que, sobre el plano vertical, todas las elipses de las dos séries están *inscritas* en el rombo X'Z'X"Z", que precisamente es tanjente a la elipse principal A'C'D'F' en los cuatro ombligos; y para manifestar una aplicacion de esta bella teoría, vamos a citar lo que *Monge* ha escrito sobre este asunto.

741. "Si se tratase de embovedar un espacio circunscripto por una elipse en la proyeccion horizontal, no se podria dar a la bóveda una superficie mas acomodada que la de la mitad de un elipsoide, en el cual una de las elipses principales coincidiese con la elipse del nacimiento; y suponiendo que esta bóveda debiese ejecutarse con piedras sillares, sería preciso que la division en dovelas se ejecutase por medio de las líneas de curbatura cuya construccion hemos dado ya, y que las juntas fuesen las superficies desarrollables normales a la bóveda. Las líneas de division en dovelas, trazarian sobre la superficie compartimientos rectangulares susceptibles de decoracion; y estos mismos compartimientos no tendrian nada de fantástico; porque no serian sino una consecuencia necesaria de la línea que se nos dió primero, que fue una elipse; pero el

destino del local podria influir en la eleccion del eje que entre los tres fuese preciso colocar verticalmente.

" Si no habiese ninguna razon para hacer al eje vertical igual a uno de los ejes horizontales; los tres ejes serian desiguales. En esta hipótesis, podria el eje vertical ser mayor que los otros dos, y la bóveda sería entónces peraltada; dicho eje podria ser el menor de los tres, y entónces la bóveda sería rebajada; finalmente podria este eje estar comprehendido entre los otros dos, y entónces la bóveda sería media. La bóveda peraltada manifestará en jeneral mas atrevimiento y mas dignidad; y si el arranque estubiese a una grande altura, cualquiera que fuese el destino del local, la bóveda peraltada sería la que se debia emplear, porque su gran elevacion haria aparecer sus dimensiones verticales menores que lo que en realidad son; una bóveda de cualquiera otra especie quedaria demasiado achatada. Como en la bóveda rebajada se disminuye mucho el volúmen de aire que comprehende, será mas favorable a la voz de un orador. Si el local debiese ser iluminado por dos arañas suspendidas de la bóveda, sería preciso que esta fuese o peraltada o rebajada, porque en estos dos casos, tendria su superficie dos ombligos, colocados simétricamente encima del eje mayor de la elipse horizontal, y estos ombligos que se hacen mui perceptibles por los compartimientos distribuidos al rededor de ellos, serian los puntos naturales de suspension; en este caso podrémos disponer de la razon que deban tener los ejes, para que estos puntos estén espaciados de un modo conveniente.

" Por el contrario, si el local debiese tener cuatro aberturas grandes, o si la bóveda debiese estar sostenida por cuatro grupos de columnas, o finalmente si en la decoracion interior, se empleasen cuatro soportes distribuidos simétricamente, sería preciso elejir la bóveda media en la que los cuatro ombligos están siempre en el arranque, y colocar los macizos o soportes en las cuatro estremidades de los ejes, porque en los alrededores de estos cuatro puntos, y léjos de los ombligos, es donde las líneas de curbatura, aparentes por la decoracion de la bóveda, y que ademas, encuentran todas verticalmente al arranque, se desvian mas lentamente de la línea de mayor pendiente de la superficie.

742. " En el dia se ocupan en la construccion de las salas para los dos consejos de la lejislatura; el sitio de que se ha podido disponer has-

ta el presente para estas salas, ha obligado á dar al anfiteatro mésos profundidad enfrente al orador que á los lados; y como la esperiencia ha probado que la voz alcanza de frente á mayor distancia, parece que esta es una disposicion enteramente contraria á la que se debia adoptar. De todas las formas prolongadas que se pueden dar a un anfiteatro, no hai ninguna cuya lei sea mas sencilla y mas graciosa que la elíptica; por consiguiente, sería preciso que la sala fuese elíptica, y que quedase cubierta por una bóveda de la forma de un elipsoide rebajado.

" El servicio de las asambleas lejislativas exije que haya un sitio para la mesa, delante de ella está la tribuna del orador. Colocando la mesa en uno de los vértices de la elipse, podríamos destinarle un espacio suficiente para la comodidad del servicio, y el orador se hallaría naturalmente colocado bajo uno de los ombligos de la bóveda; y el anfiteatro no ocuparia sino la parte que estuviese delante. Una galería que diese vuelta á toda la sala y que estuviese bastante elevada para que estuviese bastante separada del anfiteatro, servirá para que el público se colocase. La sala que no tuviese tribuna ni ninguna otra especie de irregularidad, podria decorarse con columnas, haciendo que á cada una de estas correspondiese una moldura en la bóveda, dirijida segun la línea de curbatura ascendente. Todas estas molduras, verticales en su arranque, se encorbarán al rededor de uno á otro ombligo, para volver a bajar en seguida a plomo sobre las columnas opuestas, y estarán cruzadas perpendicularmente por otras molduras dobladas segun las líneas de la otra curbatura. Los intervalos de estas molduras podrán estar abiertos, ya sea para dar luz a la sala, o para dar salida al aire, y formarán vidrieras ménos fantásticas que los rosetones de nuestras iglesias góticas. Por fin, dos arañas suspendidas de los ombligos de la bóveda, á cuya suspension pareceria concurrir toda la bóveda, servirian para iluminar la sala durante la noche.

" No entrarémos en mayores pormenores sobre este asunto; bástanos haber indicado a los artistas un objeto simple, cuya decoracion, aunque mui rica, puede no tener nada arbitrario, porque principalmente consiste en manifestar a la vista de todos un ornato mui gracioso, sacado de la naturaleza misma del objeto. "

743. Para hacer que el depurado 144 fuese aplicable a las ideas que acaba de esponer MONGE, sería preciso distribuir las líneas de curbatura

ascendentes, de modo que dividiesen a la elipse de arranque ABDE en partes iguales US, SR,... Dado que fuese entónces el punto U, le proyectaríamos a U', y de aquí concluiríamos los dos semi-ejes U'π y $\pi\zeta$ de la elipse ζT'U', y una vez trazada esta, nos daria el punto T', que proyectado a T determinaria los vértices y los ejes Tε, $\varepsilon\theta$ de la hipérbola pedida TU. En cuanto a las líneas de segunda curbatura, las haríamos pasar por puntos que dividiesen a la semi-elipse EC"B en un número *impar* de partes iguales; y proyectando cada punto de division φ" a ψ, y levantándolo a φ', nos daria a conocer, como en el núm. 738, a los semi-ejes $\psi\delta$ y δV, $\varphi'\mu$ y μW, de las elipses ψVφ y φ'V'W', segun las cuales se proyecta una línea de la segunda curbatura.

744. HIPERBOLOIDE OSCULADOR *al largo de una jeneratriz de una superficie gausa* S. Hemos visto (núm. 578) que si, en los planos tanjentes relativos a tres puntos M, M' y M", tomados sobre la misma jeneratriz G, se trazaban las rectas arbitrarias MQ, M'Q', M"Q", y las adoptábamos por directrices de la recta móvil G, obtendríamos de este modo un hiperboloide de una napa que se *identificaria* con la superficie S en todo el largo de la recta GMM'M", es decir, que tendria en cada punto de esta línea el mismo plano tanjente que S; de modo que el elemento superficial MM'M"*m*"*m'm*, indefinido en lonjitud, sería comun a las dos superficies. Pero hai una infinidad de hiperboloides que gozan de este propiedad, supuesto que las tres directrices MQ, M'Q', M"Q" pueden trazarse a discrecion en los planos tanjentes. Pero si se elije la recta QM de modo que sea tanjente a la curba Mα segun la cual es cortada la superficie S por su plano tanjente en M, sabemos (núm. 731) que esta tanjente tendrá dos elementos M*m* y *mn* comunes con Mα, y por consiguiente con S: lo mismo sucederá con las rectas M'Q' y M"Q", si las elejimos tanjentes a las secciones M'α', M"α", que trazan en la superficie los planos tanjentes relativos a los puntos M' y M"; por consiguiente, adoptando estas tres tanjentes particulares por directrices del hiperboloide, este último tendrá tambien dos elementos superficiales MM"*m*"*m* y *mm*"*n*"*n* comunes con S, y se llamará hiperboloide *osculador* de esta superficie, al largo de la recta asignada GMM'M". Como la jeneracion de este hiperboloide no contiene sino datos enteramente FIG. 143.

fijos, será único y presentará con la superficie S un contacto mas íntimo que todos los otros; ademas, respecto a cualquier punto de la recta GM, las líneas de curbatura de S serán tanjentes a las del hiperboloide osculador, y estas últimas son fáciles de determinar, en virtud de las observaciones del núm. 732.

LIBRO IX.

ADICIONES.

CAPITULO PRIMERO.

Teoremas diversos.

Reunimos aquí varias proposiciones relativas a las teorías anteriores, que entónces no hubieran tenido una aplicacion inmediata, y que nos serán útiles en la Perspectiva, las Sombras y la Estereotomía.

745. *Cuando un cilindro penetra a una esfera por una curba* PLANA, *la segunda rama de la interseccion es así-mismo* PLANA: ademas, esta *curba de salida*, que es un círculo igual a la *curba de entrada*, es perpendicular al plano que se tire formando ángulo recto con la curba de entrada y paralelamente a las jeneratrices del cilindro.

Conduzcamos por el centro de la esfera, un plano de proyeccion que sea paralelo a las jeneratrices del cilindro y perpendicular a la curba de entrada: esta curba, que entónces necesariamente es un círculo, estará representada por la cuerda AB igual a su diámetro, y las jeneratrices CA y FB, saldrán de la esfera por los puntos A' y B' que están evidentemente situados sobre el mismo círculo máximo que A y B, miéntras que una arista cualquiera DM saldrá de esta superficie por *un punto cuya proyeccion* M *caerá sobre la* recta A'B'. Con efecto, todas las cuerdas paralelas AA', BB', MM',.... comprehendidas en la esfera, estarán divididas en dos partes iguales por el plano OR tirado del cen- FIG. 145.

tro perpendicularmente a su direccion comun; luego las ordenadas EA, PM, IB, son respectivamente iguales a EA', PM', IB'; y en virtud de esto, es cierto que los tres puntos A', M' y B' se hallan en línea recta; porque A, M y B cumplen con esta condicion. De donde resulta que la curba de salida está proyectada sobre la recta A'M'B', y que segun esto *es plana*; ademas, cumple mui bien con las otras condiciones del enunciado, segun la eleccion del plano de proyeccion de que nos hemos servido, y en virtud de que el diámetro A'B' es evidentemente igual al AB.

Observemos que si el cilindro penetrase a la esfera por un círculo máximo como el *a*O*b*, la curba de salida sería el otro círculo máximo *a*'O*b*'; y para construir mas fácilmente esta última curba, que la encontrarémos en el depurado de las *Sombras de un nicho*, bastará emplear un plano de proyeccion que sea paralelo a los rayos de luz y perpendicular a la curba de entrada, porque sobre un plano situado así, se proyectará la curba de salida segun una recta.

746. *Si en la interseccion de un cono con una esfera, la curba de entrada es* PLANA, *la curba de salida lo es tambien.*

FIG. 146. Adoptemos por plano de la figura el que pase por el centro de la esfera y la cúspide del cono, y que al mismo tiempo sea perpendicular a la curba de entrada, y designémosle con el nombre de plano horizontal. La curba de entrada que precisamente es un círculo, estará proyectada segun una cuerda AB de la esfera, y si S es la cúspide situada en el plano horizontal que hemos elejido, las dos aristas SA y SB irán manifiestamente a salir de la esfera por los puntos *a* y *b*; pero decimos ademas que la recta *ab* es la proyeccion total de la curba de salida. Con efecto, si por el punto de la superficie cónica que está proyectado en *m* tiremos un plano vertical A'*m*B' paralelo a AB, dicho plano cortará al cono segun un círculo cuyo diámetro será A'B', el mismo que abatirémos segun A'*m*'B'; y como la ordenada *m*'*m* del cono es media proporcional entre las dos partes de este diámetro, tendrémos que

$$\overline{mm'}^2 = A'm \,.\, mB'.$$

y como ademas los dos triángulos *m*A'*a* y *m*B'*b* son semejantes, por tener el ángulo A' igual al SAB que tiene por medida al mismo arco que el ángulo *ab*B; síguese que estos triángulos nos darán la igualdad siguiente:

$$A'm.\ mB' = am.\ mb \text{ y de aquí } \overline{mm'}^2 = am.\ mb$$

Esta última relacion prueba que la ordenada abatida segun *mm'*, pertenece tambien al círculo vertical descrito sobre *ab* como diámetro, y ya que este nuevo círculo está evidentemente sobre la esfera propuesta, concluirémos de aquí que el estremo de la ordenada *mm'*, o el punto del cono que está proyectado en *m* se halla al mismo tiempo sobre la esfera. Como esto mismo diríamos de cualquiera otro punto del cono proyectado en *n* sobre *ab*, es cierto que el plano vertical *ab* corta al cono y a la esfera segun un círculo *único*, que es la segunda rama de su interseccion o la *curba de salida*; con lo que queda demostrado el teorema enunciado.

747. Observemos que el círculo vertical *ab* es precisamente el que se llama seccion *antiparalela* del cono SAB de base circular; porque la primera condicion con que debe cumplir esta seccion, es la de ser perpendicular al *plano principal* del cono, es decir, al que pasando por la cúspide S y el centro C de la base circular AB, es ademas, perpendicular a esta base; y este plano coincide evidentemente con el de nuestro depurado, que contiene a los puntos S, O y al radio OC. La seccion antiparalela debe en seguida formar, sobre el plano principal, un triángulo S*ab* semejante sin ser paralelo a SAB; cuya condicion queda tambien satisfecha, pues acabamos de observar que los ángulos SAB y S*ba* tienen la misma medida.

748. *Cuando dos cilindros de segundo grado se cortan segun la primera curba* PLANA, *la curba de salida es tambien* PLANA.

Supongamos que la elipse EMM'FN'N sea la curba de entrada, comun a los dos cilindros (el mismo razonamiento es tambien aplicable a una hipérbola o a una parábola); tirando en este caso varios planos que sean paralelos a un mismo tiempo a las jeneratrices de los dos cilindros, estos planos trazarán en la elipse cuerdas MN, M'N',.... que serán paralelas entre sí, y ademas cada uno de estos planos cortará a los cilindros segun cuatro rectas; las que corresponden al plano secante MN, es decir, las MA y NB, M*a* y N*b*, formarán por medio de su interseccion, un paralelógramo M*n*N*m* cuyos dos vértices *m* y *n* pertenecerán manifiestamente a la curba de salida; así mismo, esta curba pasará por los puntos *m'* y *n'* en que se cortan las cuatro aristas M'A' y N'B', M'*a'* y N'*b'* contenidas FIG. 147.

en el plano secante M'N'; y así de las demas. Y como todas las diagonales *mn, m'n'*,.... son evidentemente paralelas; pasarán ademas por el medio de las cuerdas MN, M'N',.... y por consiguiente, encontrarán todas al diámetro EF conjugado con estas cuerdas. Luego estas diagonales formarán, apoyándose sobre la recta EF, una superficie precisamente *plana*, que contendrá a toda la curba de salida *mm*'F*n'n*, y así esta última cumple exactamente con el enunciado del teorema.

749. Vemos ademas, que la curba *mm*'F*n'n* será de la misma especie que la curba de entrada; porque para las abscisas comunes OP, OP',... las ordenadas MP y *m*P, M'P' y *m*'P',.... serán evidentemente proporcionales; de modo que en el caso actual las dos ramas de interseccion serán dos elipses que tendrán un diámetro comun EF. Es tambien claro que en las estremidades de este diámetro, las tanjentes ET y FV de las dos curbas, así como tambien las aristas de los dos cilindros, serán todas paralelas a los planos secantes empleados aquí arriba; por consiguiente, los cilindros propuestos tendrán *dos planos tanjentes comunes* y *paralelos*.

750. *Cuando dos superficies de segundo grado tienen* UN EJE COMUN *en magnitud y posicion, no pueden cortarse sino segun* DOS CURBAS PLANAS *que ámbas pasan por el eje comun.*

FIG. 148. Segun la hipótesis admitida, las dos superficies tendrán el mismo centro, y haciendo pasar por este punto el plano horizontal de proyeccion que ademas elejirémos perpendicular al eje comun (O, O'C'), este cortará a las dos superficies dadas segun dos curbas de segundo grado y concéntricas ABDE y *abde*. Pero si estas últimas se encuentran en dos puntos G y H, habrá precisamente otros dos I y K, diametralmente opuestos a los primeros, que tambien serán comunes a las dos curbas. Entónces el plano vertical GI cortará a las superficies propuestas segun dos curbas que coincidirán completamente, porque tendrán los mismos semi-ejes OG y O'C'; luego esta seccion comun será una de las ramas de la interseccion total de las dos superficies, y la otra rama será la seccion tambien comun, producida por el plano vertical HK.

Estos mismos raciocinios son aplicables a todas las superficies de segundo grado que tienen un centro, ya sean o no de la misma especie, con tal que el eje comun sea a un mismo tiempo *real* o *imajinario* en las dos superficies.

751. Si la primera no tuviese centro, su eje único sería infinito; y por consiguiente, la segunda debia, para cumplir con el enunciado del teorema, ser tambien un paraboloide que tuviese la misma cúspide. En este caso, cortaríamos a estos dos paraboloides con un plano perpendicular al eje comun, y estas dos secciones que evidentemente tendrian el mismo centro, se encontrarian en cuatro puntos diametralmente opuestos, como los G e I, H y K en la figura precedente; de donde concluiríamos que el plano conducido por la recta GI o HK, y por el eje comun, corta a los paraboloides segun dos parábolas que como tienen el mismo eje, la misma cúspide y un punto comun G o H, se confundirán necesariamente.

752. Podrémos jeneralizar el teorema del núm. 750, aplicándole a dos superficies de segundo grado que tengan *dos planos tanjentes comunes y paralelos*. Con efecto, la recta que una los puntos de contacto de estos planos será un diámetro comun a las dos superficies, y como el plano diametral conjugado con este diámetro, debe ser paralelo a los planos tanjentes dados, será el mismo para la primera y segunda superficie, y cortará a estas segun dos curbas concéntricas, tales como ABDE y *abde*; de modo que el plano tirado por GI o HK, y por el diámetro comun, producirá en las superficies propuestas dos secciones que deberán tambien coincidir, en virtud de que tendrán dos diámetros conjugados comunes en direccion y lonjitud; luego *estas superficies se cortarán segun dos curbas planas.*

753. Un caso particular de este teorema se presenta en el encuentro de *dos cañones cilíndricos que tienen el mismo plano de arranque y la misma montea.* Con efecto, si el círculo AMNB y la elipse *amnb* cuyos ejes verticales son iguales, representan las bases de estos cilindros, que aquí están abatidas al rededor de los ejes AB y *ab* situados en el plano horizontal del arranque, vemos desde luego que las cuatro jeneratrices AG, BH, *a*G y *b*K, se encontrarán formando el rectángulo GHIK. Si en seguida cortamos a los dos cilindros con un mismo plano horizontal, obtendrémos cuatro aristas que saldrán de los puntos M, N, *m* y *n*, y que necesariamente se encontrarán en puntos cuyas proyecciones M', N', M" y N" caerán precisamente sobre las diagonales del rectángulo GHIK; porque siendo iguales las dos ordenadas *pm* y PM, sabemos que FIG. 149.

las abscisas *ap* y AP serán entre sí como los dos ejes *ab* y AB, lo cual nos da la proporcion

$$G\alpha : \alpha M' :: GK : KI;$$

de donde concluimos que el punto M' está en línea recta con G e I. De un modo semejante probarémos que N'' cae sobre la misma diagonal, en tanto que N' y M'' están sobre la recta HK; y así la interseccion total de los cilindros propuestos, se compondrá de las dos elipses situadas en los planos verticales GI y HK.

754. Obser[illegible] [illegible]perficies cualesquiera S y S' se *tocan* en un punto, y [illegible] segun una curba de dos ramas que pasan por [illegible], no es posible hallar las tanjentes de estas ra[illegible] por el método de los planos tanjentes, porque [illegible] se sustituyen a las superficies S y S', dos supe[illegible] Σ y Σ' que sean osculadoras de las primeras, e[illegible]cion de Σ con Σ' tendrá las mismas tanjentes [illegible] con S'. Y como en cada superficie Σ o Σ' hai [illegible]d es arbitraria (núm. 696), aunque siempre es[illegible]al al punto que consideramos, si tomamos este [illegible]do, sucederá que las superficies Σ y Σ' se cor[illegible]as (núm. 750), cuyas proyecciones *sobre un plano perpendicular a la normal*, se reducirán a dos rectas fáciles de construir, estas dos rectas serán manifiestamente en este caso las tanjentes de las dos ramas de la interseccion de S con S', para el punto múltiplo de que tratamos. Este método injenioso lo ha dado M. *Th. Olivier*, en una memoria inserta en el cuaderno 21 del *Diario de la Escuela Politécnica;* y el autor lo ha aplicado al *conoide de la bóveda por aristas en cañon cicular*, cuyas tanjentes hemos hallado por otro medio (núm. 646).

FIG. 150. 755. De las tanjentes conjugadas o *recíprocas*. Cuando un cono VMKN está circunscrito a una superficie de segundo grado, *una arista cualquiera* VM de este cono *y la tanjente* MT' tirada a la curba de contacto MKN por el pie de esta arista, *son siempre respectivamente paralelas a dos diámetros conjugados* de la seccion producida, en la superficie, por un plano paralelo al plano tanjente VMT'.

Para demostrar este teorema (*), adoptarémos como plano de la figura al plano diametral que, pasando por la arista MV y el diámetro VO, corte a la superficie segun una curba NXMY a la que será tanjente VM. Si ademas, tiramos el plano diametral conjugado de VO, la seccion de este plano con la superficie será una curba EZY paralela y semejante (núm. 354) a NKM, y por consiguiente, las tanjentes YT y MT' serán paralelas; luego el conjugado de OY será una recta OZ paralela a MT'. Sentado esto, como los tres diámetros OX, OY y OZ son conjugados entre sí, resulta de aquí que el plano XOY de la figura actual, divide en dos partes iguales a todas las cuerdas paralelas a OZ; esto mismo sucederá con el diámetro RY' tirado paralelamente a MV; y como este diámetro es tambien conjugado de OZ en la seccion RZY', que es tambien paralela al plano tanjente VMT', queda justificado el enunciado de que tratamos, porque OY' y OZ son respectivamente paralelas a la arista VM y a la tanjente MT'.

756. A estas dos tanjentes de la superficie se les ha dado tambien el nombre de *recíprocas*, porque si colocásemos sobre MT' la cúspide de un nuevo cono circunscrito al elipsoide, la curba de contacto de este cono tendria por tanjente a la recta MV. Con efecto, la seccion dada en la superficie propuesta por un plano paralelo al plano tanjente en M sería la curba RZY', cuyo diámetro OZ paralelo a MT' tiene por conjugado a OY': y así es que la tanjente a la nueva curba de contacto, que segun el teorema precedente, debe ser paralela a OY', no podrá ser sino MV que es la que cumple con esta condicion.

757. Esta reciprocidad y el teorema del núm. 755 en que está fundada, se estienden con facilidad a un cono circunscrito a una superficie cualquiera S. Porque sean AMB la curba de contacto de estas dos superficies, MT una de sus tanjentes, y VM la arista del cono que termina en el punto de contacto; puede mirarse a esta arista (núm. 182) como la interseccion de dos planos tanjentes infinitamente próximos, tirados desde la cúspide V a la superficie, y cuyos puntos de contacto p y q con S, se hallen sobre la curba AMB. Figurémonos ahora el elipsoide o el FIG. 151.

(*) *Se le debe a M. Dupin, pero aquí le demostramos de un modo diferente, sin necesidad de pasar por el intermedio de un cilindro.*

hiperboloide Σ que fuese *osculador* de S en M; en los alrededores de este punto, las superficies S y Σ tendrán dos planos tanjentes consecutivos comunes; luego los puntos *p* y *q* pertenecerán tambien a la curba de contacto A'M'B' del cono que, teniendo su cúspide en V, estuviese circunscrito a Σ; y por consiguiente, esta última curba tendrá tambien por tanjente a MT. Pero sabemos (núm. 755) la relacion que existe entre MV y MT en la superficie Σ; luego tambien, relativamente a una superficie cualquiera S, *la arista del cono circunscrito y la tanjente a la curba de contacto, son respectivamente paralelas a dos diámetros conjugados de la seccion dada paralelamente al plano tanjente, en la superficie de segundo grado osculadora de* S; y estas dos tanjentes nos presentan tambien la reciprocidad enunciada en el núm. 756.

758. Este teorema, que nos será mui útil en la perspectiva de un toro y de un pedestal de estátua o vaso, snbsiste tambien en un cilindro circunscrito a una superficie cualquiera S, porque podemos suponer que su cúspide V está colocada a una distancia infinita sobre MV; y será fácil estenderle, valiéndonos de consideraciones semejantes, a cualquiera superficie desarrollable que esté circunscrita a la superficie dada S.

CAPITULO II.

Método de los planos de acotacion (*).

759. Para representar los puntos y las líneas, hemos visto que era suficiente señalar sus proyecciones sobre dos planos fijos, y que de aquí

(*) *La mayor parte de este artículo está, en sustancia, sacado de las lecciones redactadas en* 1831 *para la Escuela de Aplicacion de Metz, por el capitan de Injenieros M. Noizet, que ha coordenado y perfeccionado de este modo los elementos de los planos de acotacion, aun cuando se habian empleado ya por otros injenieros.*

podíamos deducir todo cuanto interesase en las distancias de estos puntos, la forma de estas líneas o de las superficies a que pertenecian, &a. Pero en ciertos casos, como en los dibujos de Fortificacion o de Topografía, es mas cómodo definir los objetos *solo por su proyeccion horizontal*, a la cual se agregan las *acotaciones* que indican la altura de los diversos puntos sobre un plano horizontal fijo, que siempre se supone mas bajo que todos los objetos de que se trata. Es evidente que este método, en el cual no se emplea sino un solo plano de proyeccion, es no obstante suficiente para determinar completamente la posicion de cada punto, porque la acotacion de este reemplaza a su proyeccion vertical, y aun podrá tambien servir para hallar esta proyeccion, si así se desease. En virtud de esto, vamos a ver que segun esta marcha, se resuelven con facilidad todos los problemas elementales de Jeometría descriptiva, y de un modo que se presta mejor a las *traducciones numéricas* a que nos vemos obligados a recurrir en la Fortificacion; porque en esta, los datos y los resultados de un problema presentan dimensiones mui considerables para poderse espresar en los dibujos de otro modo que por una *escala* de reduccion. Agreguémos a esto, que en la Fortificacion, el poco relieve que la mayor parte de los objetos tienen sobre el terreno, comparado con sus dimensiones horizontales, haria que fuese incómodo el emplear un plano vertical de proyeccion, sobre el cual el mayor número de rectas qne se considerasen serian casi horizontales, e irian a encontrarse mui léjos.

760. Observemos, ademas, que habiéndose en un principio hecho uso de este método de descripcion para las acotaciones submarinas referidas al nivel del mar, ha prevalecido el uso de contar las ordenadas verticales *de arriba* a bajo, mirándolas como verdaderas *sondas* bajadas de *un plano de comparacion* horizoutal situado *encima* de todos los objetos que se consideran; miéntras que el plano de proyeccion sobre el cual se opera, lo consideramos horizontal y colocado a una distancia arbitraria *debajo* de estos mismos objetos. Por lo demas, estos convenios no harán mas difícil la evaluacion de la diferencia de nivel de dos puntos dados; pero será preciso recordemos que el punto que está afectado de la acotacion *mayor* está *mas bajo* que el otro.

761. En virtud de esto, estará representado un punto por su proyeccion y su acotacion, como el que está indicado por (12^m, 5) de la LAM. 62. FIG. 1.

fig. 1. Sin embargo, si hubiese muchos puntos notables situados sobre la misma vertical, sería preciso escribir la acotacion de cada uno de ellos al lado de esta proyeccion comun.

FIG. 1. 762. *Una recta queda definida por su proyeccion y las acotaciones de* DOS *de sus puntos.* De aquí sería fácil, por medio de un trapecio abatido, concluir gráficamente la lonjitud de una porcion de esta recta, su inclinacion sobre el horizonte, la acotacion de otro tercer punto de esta línea, dado por su proyeccion; o recíprocamente la proyeccion de un punto definido por su acotacion; pero como para las aplicaciones que aquí nos hemos propuesto, sería preciso concluir por valuar estos resultados en números, será mas exacto y mas cómodo el construir desde luego la *escala de pendiente* de la recta propuesta. Sean, por ejemplo (14^m, 7) y (12^m, 5) los dos puntos dados; principiarémos por indagar el intervalo L que, en la proyeccion de la recta, separa dos puntos cuyas acotaciones se diferencien un metro, esto evidentemente lo conseguirémos por la proporcion siguiente, en la que D representa el intervalo de las dos proyecciones dadas:

$$(14^m, 7 - 12^m, 5) : D :: 1^m : L = \frac{5}{11} D.$$

Y así, despues de haber valuado a D en partes de *la escala* HORIZONTAL del dibujo, calcularémos fácilmente la lonjitud L; y si tomamos los $\frac{3}{10}$ de esta lonjitud por la parte de abajo del punto (14^m, 7) obtendrémos el punto que tiene la acotacion 15^m. En seguida, si partiendo de este último punto, tomamos la lonjitud L muchas veces subcesivas, hallarémos los puntos que corresponderán a las acotaciones 14^m, 13^m, 12^m,..., y no habrá mas que subdividir uno de estos intervalos en diez partes iguales, para completar *la escala de pendiente* de la recta propuesta.

FIG. 1. 763. Sentado esto, representemos por A la proyeccion asignada a un punto situado sobre esta recta, y cuya acotacion se nos pide. Si A cae entre las divisiones 13^m y 14^m, por ejemplo, tomarémos con el compás la distancia *horizontal* del punto A al punto 13^m, y trasladándola en seguida sobre la parte de la escala de pendiente que está subdividida en decímetros, verémos cual es el número de decímetros que es preciso agregar a 13^m, para obtener la acotacion del punto proyectado en A. Los centímetros podrán estimarse a ojo.

Con la misma facilidad hallarémos la proyeccion de un punto cuya acotacion se nos dé

764. Para obtener la verdadera distancia de dos puntos de la recta, dados por sus proyecciones, hallarémos en primer lugar sus acotaciones; en seguida, calcularémos la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya altura sea la diferencia de estas acotaciones, y su base igual a los intervalos de las dos proyecciones, apreciada en metros sobre la escala *horizontal* del dibujo.

765. En cuanto a la *pendiente* de la recta, entendemos por ella la tanjente trigonométrica del ángulo que esta línea forma con el horizonte; es decir, la diferencia de nivel de dos puntos de esta recta, dividida por la distancia de sus proyecciones. Y así, respecto a la recta citada num. 762, su pendiente está espresada por la fraccion FIG. 1.

$$\frac{14,7-12,5}{D} \text{ o } \frac{1}{L};$$

si nos recordamos que L representa aquí el intervalo que separa las proyecciones de los dos puntos cuyas acotaciones se diferencian en un metro, y que es preciso estimar esta lonjitud en partes de la escala horizontal del dibujo. Esta regla se enuncia tambien, diciendo que *la pendiente* de una recta es la razon de *la altura a la base.*

766. Recíprocamente, si se nos da la proyeccion de una recta y la acotacion $14^m, 7$ de uno de sus puntos, con la pendiente $\frac{1}{3}$ que debe tener esta línea, tomarémos sobre la escala horizontal del dibujo, una lonjitud igual a 3 metros, que aplicada a continuacion del punto ($14^m, 7$) nos dará por resultado el punto que debe tener la acotacion ($13^m, 7$). En este caso, conocemos dos puntos de acotacion de la recta, y por consiguiente, conocerémos tambien su escala de pendiente lo mismo que en el núm. 762. FIG. 1.

767. *Tirar por un punto dado* ($10^m, 6$) *una recta paralela a una recta conocida ya.* Tirarémos por el punto dado una paralela a la proyeccion de la primera recta, y esta evidentemente será la proyeccion de la segunda. En seguida, como estas dos rectas deben tener la misma pendiente, si unimos el punto ($10^m, 6$) de la segunda con el punto afectado de la misma acotacion en la primera, y si en seguida tiramos paralelas a esta línea de union, por las divisiones enteras de la primera recta, inmediata- FIG. 1.

mente formarémos la escala de pendiente de la recta pedida, que segun esto quedará completamente determinada.

FIG. 1. 768. Cuando la primera recta solo se nos dé por medio de dos de sus puntos de acotacion (14^m, 7) y (12^m, 5), tomarémos el intervalo D de estas proyecciones debajo del punto (10^m, 6), y obtendrémos otro segundo punto de la nueva recta, que evidentemente tendrá por acotacion a (10^m, $6+2^m$, 2) o (12^m, 8). Hecho esto, acabarémos la escala de la recta pedida, como en el núm. 762.

769. Una curba *aislada* se representa por su proyeccion horizontal acompañada de las acotaciones de cierto número de puntos de ella, tomados bastante próximos para que a ojo pueda apreciarse el curso ascendente o descendente de esta línea, o para que los arcos intermedios puedan mirarse como rectas. Pero casi siempre las curbas están relacionadas con superficies que mui pronto enseñarémos a representar; y esta es la razon porque no nos detenemos mas sobre este asunto.

LAM. 62. FIG. 2. 770. Un plano, cuando es una magnitud que realmente existe y está, por consiguiente, limitado por todas partes, se representa por la proyeccion de su contorno, y cada ángulo de este debe tener su acotacion, se le agregan cierto número de *secciones de nivel* que en el caso presente son rectas paralelas a su traza horizontal. Estas secciones que se elijen equidistantes y separadas, por ejemplo, un metro *en el sentido vertical*, deben estar señaladas en sus dos estremos con una acotacion comun; si en seguida trazamos una perpendicular a estas horizontales, esta evidentemente será la proyeccion de *la línea de mayor pendiente* del plano propuesto; y acotando los puntos en que la encuentran las horizontales anteriores, constituirá lo que se llama *escala de pendiente* del plano de que tratamos, la cual jeneralmente se indica por una línea doble. Este modo de representar estos objetos, equivale a mirar, como lo hemos hecho en la Jeometría descriptiva, a un plano como enjendrado por una de sus horizontales que resbaba, paralelamente a sí misma sobre la línea de mayor pendiente de este plano.

FIG. 2 (*bis*). 771. *Cuando un plano es ilimitado*, y no existe realmente, se le representa solo por una de sus horizontales acotada, con su escala de pendiente graduada; así se asigna la jeneratriz y la directriz de esta superficie para determinarla completamente. Muchas veces nos contentamos con señalar la escala de pendiente graduada, porque de aquí se pueden

deducir trazas horizontales acotadas cuantas se quiera, porque estas son siempre perpendiculares a la direccion de la escala.

772. Cuando un plano es horizontal, no existe su escala de pendiente, pero todos los ángulos de su contorno tienen la misma acotacion; o bien, si este plano es indefinido, se le espresa por *el plano horizontal de la acotacion* n. Si el plano dado es vertical, le representarémos por su traza horizontal solamente.

773. *Determinar al plano que pasa por tres puntos dados* (9^m, 4), (14^m) y (17^m). Unirémos por medio de una recta el primero y el último de estos puntos, y valiéndonos de una proporcion análoga a la que hemos empleado en el núm. 762, hallarémos sobre esta recta un punto que tenga por acotacion a 14^m,: en cuyo caso la recta que reuna este último punto con el segundo de los puntos dados, será evidentemente *una horizontal* del plano pedido; y una paralela tirada por el punto (17^m) será otra segunda horizontal de este plano, cuya escala de pendiente será en este estado mui fácil de señalar y graduar. FIG. 2 (*bis*).

El mismo procedimiento se aplicará tambien al caso en que el plano pedido debiese pasar por un punto y una recta dada; y si esta recta estuviese acompañada de su escala de pendiente, la solucion sería aun mas sencilla.

774. *Tirar por una recta dada un plano cuya pendiente sea* $\frac{1}{n}$. Deben conocerse a lo ménos las acotaciones de dos puntos de esta recta, que aquí son 10^m y 12^m, 5; mirando en este estado al primer punto como la cúspide de un cono recto cuyas jeneratrices tuviesen la inclinacion $\frac{1}{n}$ (núm. 765), sería preciso y evidentemente bastaria tirar un plano tanjente a este cono que pasase por el segundo punto. Pero si describimos un círculo que tenga por centro a la proyeccion del punto (10^m), y por radio una lonjitud tomada sobre la escala horizontal del dibujo, e igual a n veces la diferencia 2^m, 5 de las acotaciones de los puntos dados, este círculo será la traza del cono en cuestion sobre el plano horizontal que pase por el punto inferior (12^m, 5); luego, tirando por este último punto dos tanjentes a este círculo, obtendrémos las trazas horizontales de dos planos que satisfarán al problema; y de aquí se deducirán con suma facilidad sus escalas de pendiente, porque conocerémos sus direc- LAM. 62, FIG. 3.

ciones y la acotacion de dos puntos de cada una de ellas. Tambien verémos con facilidad que el problema no admitirá sino una solucion o será imposible, segun la pendiente asignada sea igual a la de la recta dada, o menor que esta última.

775. Cuando la recta definida por los dos puntos acotados, esté mui poco inclinada, el método precedente nos conduciria a trazar un círculo mui pequeño, y por lo tanto, poco cómodo para el objeto. En este caso, tomarémos un plano horizontal inferior a los dos puntos, y acotado en número entero; describirémos en seguida sobre este plano dos círculos cuyos centros sean las proyecciones de los dos puntos propuestos, y que los radios sean n veces la altura de cada uno de estos puntos sobre este plano horizontal. De este modo tendrémos las bases de dos conos cuya pendiente será $\frac{1}{n}$, y no habrá mas que tirar una tanjente comun a estos dos círculos.

776. Si la recta dada fuese horizontal, conoceríamos imediatamente la proyeccion de la escala de pendiente del plano que buscamos; y en seguida, como nos es dada la inclinacion $\frac{1}{n}$, no habrá mas que tomar sobre esta escala, partiendo de la recta propuesta, una lonjitud de n metros medidos sobre la escala horizontal del dibujo, y el estremo de esta lonjitud corresponderá a un punto de la escala de pendiente, cuya acotacion será un metro menor que el punto situado sobre la recta dada. Como de este modo tenemos dos puntos acotados de esta escala de pendiente, será mui fácil concluir su graduacion.

FIG. 4. 777. *Por un punto* $10^m,3$ *situado sobre un plano dado, trazar sobre este plano una recta cuya pendiente sea* $\frac{1}{n}$. Trazarémos una horizontal de este plano cuya acotacion se diferencie de la del punto dado, en 4^m, por ejemplo; en seguida, con un radio igual a 4 veces la base n de la pendiente asignada, y desde el punto dado como centro, describirémos un arco de círculo que al cortar a la horizontal elejida, nos dará a conocer el punto que se debe unir con el punto dado, para obtener la recta pedida. Conocemos que en jeneral este problema tendrá dos soluciones, pero se reducirán a una sola, o serán imposibles, si la pendiente asignada a la recta, iguala o excede a la del plano dado.

778. *Dada la proyeccion de un punto situado sobre un plano conocido, hallar la acotacion de este punto.* Tirarémos por esta proyeccion una perpendicular a la escala del plano, y la acotacion del punto de encuentro será la del punto propuesto.

Si no estuviese construida la escala del plano, y este estuviese solamente representado por varias horizontales, podríamos aplicar al punto propuesto una regla dividida en milímetros colocándola de modo que dos divisiones enteras cayesen sobre las horizontales vecinas; de este modo apreciaríamos inmediatamente la fraccion de metro que es preciso agregar a la acotacion de la horizontal superior para obtener la acotacion del punto de que se trata.

779. *Hallar la interseccion de dos planos dados.* En cada plano FIG. 5. trazarémos dos horizontales que tengan respectivamente las mismas acotaciones; y el encuentro de estas cuatro rectas nos dará a conocer dos puntos acotados de la interseccion pedida, lo cual determinará su proyeccion y pendiente.

780. Cuando las horizontales de los dos planos propuestos se en- FIG 6. cuentran demasiado léjos, se hace uso de dos *planos ausiliares* que, cortando a cada uno de los planos dados segun dos rectas, nos darán a conocer dos puntos de la interseccion que buscamos.

Así mismo, si los dos planos dados tuviesen sus horizontales respectivamente paralelas, bastaria un solo plano ausiliar, porque entónces la interseccion pedida debia tambien ser paralela a las horizontales primitivas.

781. *Hallar la interseccion de una recta y de un plano dado.* Por FIG. 7. la recta propuesta conducirémos un plano ausiliar cuyas horizontales serán dos paralelas tiradas arbitrariamente por dos puntos de esta recta; en seguida, indagando la interseccion de este plano ausiliar con el plano dado, esta interseccion cortará a la recta propuesta en el punto que se nos pedia.

782. Del mismo modo hallarémos el punto de encuentro de dos FIG. 8. rectas dadas, que estuviesen situadas en el mismo plano vertical. Porque dirijiendo por cada una de ellas un plano arbitrario, irá la interseccion de estos dos planos a pasar por el punto que buscamos, cuya acotacion se estimará en seguida, como en el núm. 763.

783. Por un medio análogo, podremos reconocer si dos rectas da-

das, cuyas proyecciones son diferentes, se cortan efectivamente; porque, en este caso, será preciso que la interseccion de los dos planos arbitrarios conducidos por estas rectas, vaya a pasar por el punto comun a las dos proyecciones dadas.

LAM. 63. FIG. 9. 784. *Tirar por un punto dado* (10^m, 4) *un plano paralelo a un plano dado.* La escala de pendiente del plano que buscamos, será paralela a la del plano conocido, y pasará por el punto dado. Ademas, como la inclinacion debe ser igual, bastará unir el punto (10^m, 4) con el que tiene la misma acotacion en la escala dada, y en seguida, tirar a esta línea de union, paralelas por las otras divisiones de la escala del plano conocido.

FIG. 10. 785. *Tirar por dos rectas dadas, dos planos que sean paralelos entre sí.* Por un punto de la primera recta, tirarémos una paralela a la segunda; y por un punto de esta, una paralela a la primera recta. Hecho esto, y conduciendo un plano por la primera y la tercera recta, y en seguida, otro por la segunda y la cuarta, manifiestamente hallarémos los dos planos pedidos. Conocemos bien que estos se reducirian a uno solo, si las rectas primitivas se cortasen; o que serian indeterminados, si fuesen paralelas.

786. *Bajar desde un punto dado* (8^m, 2), *una perpendicular a un plano conocido.* La proyeccion de esta perpendicular será evidentemente *paralela* a la proyeccion de la escala del plano, pero sus inclinaciones serán inversas una de otra; es decir, que si la pendiente del plano dado es $\frac{3}{5}$, por ejemplo, la de la recta que buscamos será $\frac{5}{3}$. Tomando entónces, sobre la escala horizontal del dibujo, una lonjitud igual a 3 metros, y trasladando este intervalo sobre la perpendicular indefinida debajo del punto dado (8^m, 2), obtendrémos otro segundo punto de esta perpendicular que tendrá por acotacion a (8^m, $2+5^m$) o a (13^m, 2). Y así, esta perpendicular quedará completamente determinada; dejarémos al lector el cuidado de ejecutar estas construcciones, así como tambien las que se indican en los dos números siguientes.

787. Si ademas, hallamos (núm. 781) el punto de encuntro de esta perpendicular con el plano propuesto, y en seguida, calculamos la verdadera distancia que hai de este punto de seccion al punto dado (núm. 764), conocerémos la distancia mas corta que media entre este último punto y plano propuesto.

788. Así mismo, si se nos pidiese la menor distancia de un punto a una recta, tiraríamos por este pnnto un plano perpendicular a esta recta, y la escala de este plano se construiria por un procedimiento inverso de el del núm. 786. En seguida, determinaríamos el punto de encuentro de este plano y de la recta propuesta, y hecho esto, hallaríamos la verdadera distancia de este punto de seccion al punto dado.

Las cuestiones que preceden son, sin duda ninguna, suficientes para enseñar el modo de resolver todos los problemas en que no haya que combinar sino rectas y planos.

789. Las superficies curbas, sobre todo cuando no son susceptibles de una definicion rigurosa, como sucede con la superficie del suelo, se representan por las proyecciones de cierto número de *curbas de nivel* que son las secciones que producirian en esta superficie los planos horizontales, *equidistantes* en sentido vertical; mirarémos en seguida, a cada zona comprehendida entre dos curbas consecutivas de nivel, como engendrada por una recta que, resbalando sobre estas dos curbas, permaneciese constantemente *normal* a una de ellas, a la curba inferior, por ejemplo. Por consiguiente, es *una superficie gausa* la que de este modo sustituimos a la superficie real del terreno, cuya forma rigurosa no nos sería conocida miéntras no hubiésemos asignado la lei jeomátrica que une entre sí a las diversas secciones de nivel; pero en el caso actual es mui suficiente esta aproximacion. LAM. 63 FIG. 11.

790. Por lo comun, las curbas horizontales están bastante próximas y se diferencian mui poco en su curbatura, y por lo tanto podrémos mirar a la jeneratriz rectilínea como que sensiblemente es *normal* a un mismo tiempo *a las dos curbas*. Segun esta hipótesis, la superficie que sustituimos a la zona del suelo, es desarrollable (núm. 180); porque para pasar cada jeneratriz a una posicion infinitamente próxima, debe moverse sobre dos tanjentes que evidentemente son paralelas, y por lo tanto están situadas en un mismo plano.

791. Cuando la distancia de las secciones de nivel se halla, en ciertas rejiones, mui considerable para que las rectas jeneratrices sean sensiblemente normales a las dos curbas vecinas, se sustituye a estas rectas arcos de curba que llenen esta condicion, y no por esto, se varia el modo de jeneracion, porque esto se reduce a suponer otras secciones de nivel intercaladas entre las primeras, y bastante próximas FIG. 11.

para interceptar en la jeneratriz curbilínea, arcos que puedan mirarse como confundidos con sus cuerdas.

792. Si partiendo de un punto dado sobre la superficie, tiramos de este modo una normal a la curba inferior; y en seguida, desde el pie de esta normal dirijimos otra perpendicular a la tercera curba, y así, en seguida, el conjunto de estas diversas normales formará *la línea de mayor pendiente* de la superficie, con relacion al punto de partida.

FIG. 11. 793. *Hallar la acotacion de un punto dado por su proyeccion horizontal y situado sobre una superficie conocida.* Si esta proyeccion cae entre las curbas de nivel que tienen las acotaciones 12ᵐ y 13ᵐ, tirarémos por este punto una jeneratriz normal cuyos estremos tengan estas mismas acotaciones; y por medio de una simple proporcion, hallarémos la acotacion del punto propuesto (12ᵐ, 6).

794 La cuestion recíproca, que tuviese por objeto hallar todos los puntos de la superficie que tienen una acotacion dada (14ᵐ, 5), es así mismo fácil de resolver; y por este medio es por el que intercalarémos nuevas curbas de nivel entre las primeras, segun lo vemos en la figura

FIG. 11. 795. *Construir el plano tanjente para un punto dado sobre una superficie conocida.* Cuando el punto dado M esté colocado sobre una de las curbas de nivel, deberá el plano tanjente pasar por la tanjente de esta curba y por la jenerataiz rectilínea LM que le es normal; y así, prolongando esta normal hasta la curba superior, la parte interceptada nos dará a conocer: 1.º la direccion de *la escala de pendiente* del plano pedido; 2.º las acotaciones de dos puntos de esta escala, cuya graduacion será fácil concluir. Si admitimos la hipótesis del número 790, este plano tocará a la zona en todo el largo de la jeneratriz interceptada LM; miéntras que no sería tanjente sino en el punto M, si conservásemos la jeneracion del núm. 789.

796. Cuando el punto de contacto se nos dé entre dos curbas consecutivas, de nivel tirarémos tambien por este punto una normal a la curba inferior; y si esta recta es sensiblemente normal a la curba superior, la parte interceptada nos dará la direccion y magnitud de una de las divisiones de la escala del plano tanjente. En el caso contrario, trazarémos (núm. 794) la seccion horizontal que pase por el punto dado; y entónces la tanjente y la normal de esta curba determinarán el plano tanjente como en el número precedente.

797. En las aplicaciones del método presente, es mui importante saber discernir con anticipacion cual será la posicion del plano tanjente con respecto a la superficie, en los alrededores del punto de contacto. Pero en virtud de lo que hemos dicho sobre la curbatura de las superficies, y de la nota del núm. 695, podemos sentar, como jeneralmente cierta, la regla siguiente: Cuando dos curbas trazadas sobre una superficie, se cortan formando ángulos rectos, y ámbas son *convexas*, es decir, situadas debajo del plano tanjente relativo al punto comun, la superficie al rededor de este punto es así mismo convexa. Esta consecuencia no padecerá excepcion, sino cuando las tanjentes a las dos curbas rectangulares se hallasen comprehendidas en el mismo ángulo obtuso PM*q* o QM*p* (*fig.* 134) formado por los dos planos normales *límites* de que hemos hablado en el núm. 694; pero este caso excepcional no se presentará aquí respecto a la seccion de nivel y la línea de mayor pendiente, a lo ménos miéntras exista la hipótesis de una zona desarrollable admitida en el núm. 790; porque entónces esta línea de mayor pendiente será tanjente a una de las dos *secciones principales*. Y así, para cerciorarnos de que la superficie del suelo es convexa en los alrededores de un punto, será suficiente reconozcamos que la curba de nivel y la línea de mayor pendiente, son ámbas convexas en la proximidad de este punto; para esto se nos ha dado la primera de estas líneas en su verdadera magnitud sobre el plano horizontal, y en cuanto a la segunda, ved aquí un carácter fácil de comprender.

798. Representando por h la distancia vertical de dos secciones de nivel consecutivas, y por l su distancia LM en la proyeccion horizontal, es claro que la inclinacion α de la tanjente a la línea de mayor pendiente en el punto M, la conocerémos por la relacion $\tan \alpha = \frac{h}{l}$. Luego, si queremos que esta curba sea *convexa*, o esté situada debajo de su tanjente en la proximidad del punto que consideramos, es evidentemente preciso que el ángulo α vaya aumentando a medida que descendemos de L a M, N, P,...., y consiguientemente que las distancias horizontales l o LM, MN, NP,.... vayan disminuyendo, supuesto que h es constante. En virtud de estas observaciones, podrémos sentar las reglas siguientes: FIG. 11.

1ª La superficie es *convexa*, es decir inferior al plano tanjente en todo el alrededor del punto de contacto, cuando todas las curbas de nivel

vecinas son convexas, y sus distancias horizontales *disminuyen* bajando, o por lo ménos permanecen constante.

2ª La superficie es *cóncava*, o superior al plano tanjente, cuando todas las curbas de nivel son *cóncavas*, y su distancia horizontal *aumenta* bajando, o a lo ménos permanece constante.

3ª Cuando las curbas de nivel son *convexas*, y su distancia horizontal *aumenta* bajando, es convexa la superficie en el sentido horizontal; pero es cóncava segun la línea de mayor pendiente, como la garganta de una polea cuyo eje fuese vertical.

4ª Cuando las curbas de nivel son *cóncavas*, y su distancia horizontal *disminuye* bajando, es cóncava tambien la superficie en sentido horizontal, y convexa en sentido de la línea de mayor pendiente, como la garganta de una polea cuyo eje fuese horizontal.

Pero en estos dos últimos casos, y en las otras variedades de forma que pueden presentar las curbas de nivel, el plano tanjente se halla en parte encima y en parte debajo de la superficie; por consiguiente, corta al terreno, y no podemos hacer uso de él con utilidad para resolver los problemas de *desenfilamiento*. Este mismo inconveniente tiene lugar en el segundo de los casos citados arriba.

799. De las consideraciones precedentes, resulta tambien que *la pendiente* del suelo es tanto mas *áspera*, cuanto mas próximas estén unas de otras las curbas en proyeccion horizontal; y si dos de estas curbas llegasen a tocarse, la forma del terreno sería *vertical* en este sitio.

LAM. 63. FIG. 12. 800. *Hallar la interseccion de un plano dado con una superficie conocida.* Trazarémos las horizontales del plano que tengan las mismas acotaciones que las curbas de nivel de la superficie propuesta; y sus encuentros mútuos nos darán a conocer los puntos de la interseccion pedida. Será preciso tengamos cuidado en no confundir los puntos *de entrada* con los *de salida*, e intercalémos nuevas curbas de nivel en las partes en que los datos no estén bastante próximos. Para obtener el punto *culminante* de la seccion, será preciso que determinémos aproximadamente una jeneratriz normal a dos curbas de nivel vecinas, y que en su proyeccion sea *paralela a la escala de pendiente* del plano secante; porque el plano tanjente que toque a la superficie en todo el largo de esta jeneratriz (núm. 790), no podrá cortar al plano secante sino segun *una horizontal* que será la tanjente al punto culminante. En seguida, no tendrémos

mas que hallar el punto de encuentro de esta jeneratriz con el plano secante dado; lo que efectuarémos por el método del núm. 781, que es como se vé en la *fig.* 12.

801. Cuando el plano propuesto es vertical, la seccion está proyectada sobre su traza; pero como entónces conocerémos las acotaciones de los puntos en que corta a las curbas de nivel, podrémos ejecutar *un perfil* abatido.

802. *Hallar la interseccion de una recta y de una superficie dada.* FIG. 13. Tirarémos por esta recta un plano arbitrario; e indagarémos la seccion que produzca en la superficie; esta curba irá a encontrar a la recta primitiva en el punto pedido.

803. La interseccion de dos superficies conocidas, la hallarémos combinando las curbas de nivel que tengan acotaciones repectivamente iguales en las dos superficies.

804. Si se tratase de conocer el punto de encuentro de una superficie con una curba, nos imajinaríamos, por esta última, un cilindro horizontal, y hallaríamos la interseccion de este con la superficie dada esta operacion la ejecutaríamos como en el núm. 800; y esta interseccion iria a cortar a la curba dada, en los puntos que fuesen comunes a esta última y a la superficie propuesta.

Nos limitarémos aquí a estas indicacionos suscintas, porque las otras cuestiones que podíamos tratar por estos métodos, no tendrian interes sino presentándolas bajo una forma que principalmente harian relacion a la *Fortificacion*,

CAPITULO III.

Nociones preliminares sobre los Engarganies.

805. Cuando un cuerpo sólido, cualquiera que sea su forma, jira al rededor de un eje fijo, todos los puntos de este cuerpo describirán en un

mismo tiempo, arcos de círculo correspondientes a ángulos que necesariamente son *iguales*, porque el sistema es de forma invariable; luego estos arcos serán proporcionales a sus radios que son las distancias de estos varios puntos al eje fijo, y por consiguiente, las velocidades *absolutas* $v, v', v'', \ldots$ de todos estos puntos son tambien proporcionales a los radios $r, r', r'' \ldots$; de modo que si representamos por ω la *velocidad absoluta* comun a todos los puntos que están colocados a una distancia del eje *igual a la unidad*, tendrémos constantemente las relaciones

$$\frac{v}{r} = \frac{v'}{r'} = \frac{v''}{r''} = \ldots\ldots = \omega; \text{ y de aquí } v = r\omega,\ v' = r'\omega,\ \ldots\ldots$$

La cantidad ω es la que se llama *velocidad angular* o *velocidad de rotacion* del sistema, ya sea que permanezca constante o que varíe con el tiempo.

LAM. 64 FIG. 1. 306. Sentado esto, el objeto que nos proponemos en un engargante cilíndrico, es establecer entre dos ejes paralelos, proyectados en O y O', una dependencia tal que cuando al primero se le imprima una velocidad de rotacion ω, el segundo reciba tambien una velocidad de rotacion ω' que tenga con ω *una razon constante* y asignada en cada cuestion particular. Pero si dividimos el intervalo OO' en dos partes OA = R y O'A = R', que estén en razon inversa con las velocidades ω y ω', o de modo que tengamos que

$$R : R' :: \omega' : \omega;$$

y si en seguida, con estas distancias como radios, describimos dos círculos tanjentes en A, y que cada uno esté unido de un modo invariable a su eje, conseguirémos evidentemente el fin que nos habíamos propuesto, haciendo jirar estos dos *círculos primitivos* de modo que los puntos de una y otra circunferencia adquieran *velocidades absolutas* que sean *iguales*. Porque, representándolas por V y V', resultarán las velocidades angulares dadas por la fórmula

$$W = \frac{V}{R},\ \text{y}\ W' = \frac{V'}{R'};$$

y si V = V', tendrémos tambien que

$$W : W' :: R' : R :: \omega : \omega'.$$

Pero para que las velocidades absolutas de las dos circunferencias OA y O'A sean iguales, es manifiestamente necesario que los dos puntos A y *a*, colocados en la actualidad en contacto sobre la línea de los centros, recorran en un mismo tiempo los arcos AA' y *aa'* que sean *iguales en lonjitud absoluta;* esta es pues definitivamente la condicion esencial con que todo engargante deberá cumplir.

807. Para que el movimiento de rotacion impreso a la rueda O se transmita a la rueda O' de un modo eficaz y capaz de vencer resistencias considerables, se arman estas dos ruedas de cuerpos salientes o dientes, terminados por superficies cilíndricas proyectadas sobre curbas, tales como AB y *ab*. Pero si uno de estos perfiles *ab* lo podemos trazar a nuestro arbitrio, no sucede así con el otro; porque de no ser así no quedaria satisfecha la condicion esencial del núm. 806; y para enunciar mas claramente la forma que conviene al perfil AB, propondrémos la cuestion en términos un poco diferentes. FIG. 1:

808. Imajinémonos que el círculo O permanece enteramente inmóvil y que el círculo O' rueda, *sin resbalar*, sobre él, llevando consigo a la curba *ab* que forma un cuerpo con él. Tomando sobre las varias posiciones O'_1, O'_2, O'_3,.... de este círculo móvil, los arcos LAM. 64. FIG. 1.

$$A_1a_1 = A_1A,\ A_2a_2 = A_2A,\ A_3a_3 = A_3A,$$

obtendrémos desde luego la epicicloide $aa_1a_2a_3a_4$ (núm. 471); si en seguida trazamos las curbas a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3,.... idénticas con *ab* en cuanto a la forma y situacion relativa, estas curbas se cortarán consecutivamente en los puntos i, i', i'', i''',.... que darán oríjen a un polígono curbilíneo; pero aproximando indefinidamente los centros O'_1, O'_2, O'_3, este polígono se convertirá, en el estado de límite, en una curba contínua $Ae_1e_2e_3e_4B$ que se llama *la envolvente* de todas las curbas individuales *ab*; a_1b_1, a_2b_2,.... porque evidentemente es tanjente a cada una de estas otras que se llaman *involutas* (números 190 y 192).

Sentado esto, decimos que esta envolvente Ae_4B es el perfil que es preciso adoptar para el diente de la rueda O. Con efecto, si hacemos jirar al rededor del centro O el sistema invariable de los dos círculos O y O'_4, sin alterar en nada su situacion relativa, hasta que la recta $OA_4O'_4$ haya tomado la posicion vertical OAO', estos dos círculos se hallarán entónces auna con las curbas Ae_4B y a_4b_4 en una posicion

(*fig.* 3) que evidentemente será idéntica con la que hubieran tomado los círculos O y O' de la *fig.* 2, si estos hubiesen solo *jirado al rededor de sus centros inmovibles*, y de modo que imprimiesen a las circunferencias $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, velocidades absolutas iguales; porque vemos mui bien en la *fig.* 3, que los puntos A y a_4 que en un principio se hallaban en contacto sobre la línea de los centros, habrán recorrido los arcos A_4A y A_4a_4 *iguales en lonjitud absoluta*, supuesto que son los mismos que los arcos A_4A y A_4a_4 de la *fig.* 2, y que así mismo estos son tambien iguales por la definicion de la rodadura dada en el núm. 469. Y como otro tanto sucederia con los círculos O y O'_3, O y O'_2,.... podemos asegurar que la condicion esencial de los engargartes (núm 806) quedará completamente satisfecha, si adoptamos por perfil conjugado de *ab* la envolvente Ae_4B definida como lo hemos hecho aquí arriba.

809. De aquí podemos concluir este principio jeneral: hacer jirar que simultáneamente los dos círculos O y O' al rededor de sus centros inmóviles, de modo que las circunferencias $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ adquieran velocidades *iguales*, es lo mismo que hacer rodar a la circunferencia $\alpha'\beta'$ sobre la circunferencia $\alpha\beta$, permaneciendo esta enteramente inmóvil, salvo que en seguida se vuelva el sistema de estos dos círculos, considerados invariables a la situacion en que la línea de los centros adquiera de nuevo la posicion primitiva OO'. Debemos conocer que este segundo modo de movimiento es mas cómodo para las operaciones gráficas, porque podemos efectuarlo sobre el plano del círculo O luego de quedar este inmóvil.

Así mismo, si en la primera hipótesis, tuviésemos necesidad de hallar la curba gg_1g_2.... descrita sobre el plano móvil del círculo O, por un punto cualquiera *g* unido invariablemente con la circunferencia $\alpha'\beta'$, bastaria hacer rodar a esta última sobre la circunferencia $\alpha\beta$ enteramente fija; y entónces el punto *g* describiria una epicicloide alongada $gg_1g_2g_3$.... que ya hemos enseñado a construir (núm. 473), y que sería la curba que buscábamos.

FIG. 2. 810. Vemos pues que para la teoría de los engargantes, es necesario saber construir *la envolvente de las posiciones que toma una curba* ab *arrastrada por un círculo móvil* O' *que rueda sobre otro círculo* O *enteramente fijo.* Es cierto que podríamos contentarnos con trazar esta envolvente $Ae_1e_2e_3e_4B$ haciándola sensiblemente tanjente a las curbas individuales *ab*, a_1b_1, a_2b_2,.... construidas como en el núm. 808; pero ob-

tendrémos mas precision, inquiriendo directamente la posicion de los puntos de contacto por medio del teorema siguiente:

Si consideramos el círculo individual O'_3 con la involuta correspondiente a_3b_3, y tiramos a esta una normal A_3e_3 que salga del punto de contacto del círculo móvil, decimos que e_3 será el punto de contacto de la envolvente AB con la curba a_3b_3. Con efecto, miéntras dura la rotacion del círculo O'_3 para pasar a una posicion infinitamente próxima, el punto e_3 describe (núm. 470) un arco pequeño circular $e_3\varepsilon$ que tiene por radio a la distancia A_2e_3: y como hemos elejido esta recta normal a la curba a_3b_3, el arco $e_3\varepsilon$ se hallará todo él en la involuta a_3b_3; luego el punto ε será comun a la involuta a_3b_3 y a la que inmediatamente la sigue, y en virtud de esto, este punto pertenecerá a la envolvente AB que buscamos. Pero esta envolvente pasaria tambien por un punto análogo ε' situado a la izquierda de e_3 que será la interseccion de la curba a_3b_3 con la involuta que la precede inmediatamente; luego el elemento $\varepsilon'e_3\varepsilon$, es comun a la involuta a_3b_3 y a la envolvente jeneral AB; por consiguiente, el contacto de estas dos líneas está ciertamente en e_3, y *su normal comun* es A_3e_3.

811. Sentado esto, cuando la involuta *ab* esté definida jeométricamente, sabremos tirar normales que salgan de A_2, A_3,.... a sus diversas posiciones, las cuales nos darán a conocer otros tantos puntos e_2, e_3..., de la envolvente jeneral. Si solo se nos da gráficamente la involuta *ab*, despues de haberla transportado a la posicion a_3b_3, por ejemplo, determinaríamos una abertura de compás tal, que describiendo desde el centro A_3 un arco de círculo, este toque sencillamente a la curba a_3b_3; una pequeña porcion de este arco sensiblemente pertenecerá a la envolvente, y casando en seguida todos los arcos semejantes por medio de un trazo contínuo, obtendrémos la envolvente que buscamos con una exactitud suficiente en la práctica. Sin embargo, este trazo presentaría mas precision aun, si le efectuásemos con los radios de los círculos osculadores de la envolvente; por esta razon vamos a dar el medio de hallar estos últimos.

812. Observemos ántes de esto, que si por el contrario hacemos rodar sobre el círculo O' permaneciendo este fijo, al círculo O que considerarémos móvil, y que arrastra consigo a la curba $Ae_1e_2e_3e_4B$, la envolvente de todas las posiciones de esta última curba será precisamente la línea *ab*. Con efecto, cuando un punto del círculo O, por ejemplo el A_3,

haya llegado a tocar a la circunferencia O', la curba a_3b_3, que en la actualidad toca a la línea Ae_3B, evidentemente coincidirá con ab, y por consiguiente, esta última será *tanjente* a la posicion que habrá tomado entónces la línea Ae_3B.

LAM. 64. FIG. 4. 813. *Centros de curbatura de la involuta.* Sea O' una posicion cualquiera del círculo móvil que toque al círculo fijo O en un punto α; sean ab la involuta correspondiente a esta situacion, AmB la envolvente jeneral, C' y C los centros de curbatura de estas líneas para el punto de contacto m, cuyos centros deben hallarse sobre la normal comun αm, al primero de estos le consideramos como conocido por la definicion de la curba amb. Si sobre los círculos primitivos tomamos dos arcos $\alpha\alpha_1$ $\alpha\alpha'$ que sean iguales en magnitud absoluta, e infinitamente pequeños, la recta $C\alpha_1 m_1$, será (núm. 810) una normal de la envolvente y $C'm'\alpha'$ una normal de la involuta; pero cuando la rotacion del círculo O' haya llevado al punto α' al contacto con α_1, necesariamente se hallarán las dos normales $C\alpha_1$ y $O'\alpha'$ en línea recta, así como tambien los dos radios $O\alpha_1$ y $O'\alpha'$; de donde concluirémos que los ángulos $O\alpha_1C$ y $O'\alpha'C'$ deben en la actualidad ser iguales, porque durante la rodadura del círculo O' no habrán variado de magnitud. Sentado esto, y representando por φ el ángulo $O\alpha C = O'\alpha C'$, tendrémos evidentemente que

$$O\alpha_1C = \varphi + O - C \quad \text{y} \quad O'\alpha'C' = \varphi + C' - O';$$

de donde, igualando estas espresiones, resulta que

$$(a) \qquad O + O' = C + C'.$$

Para estimar estos últimos ángulos, es preciso emplear los arcos de círculo descritos desde sus vértices con un radio igual a la unidad, y comparar estos arcos con $\alpha\alpha_1$ y $\alpha\alpha'$, que deberémos mirar como una sola línea recta perpendicular a $O\alpha O'$. En seguida, haciendo a

$$O\alpha = R,\ Cm = \rho,\ O'\alpha = R',\ C'm = \rho',\ \alpha m = p,\ \alpha\alpha_1 = \alpha\alpha' = ds,$$

hallarémos fácilmente que

$$\text{ángulo } O = \frac{ds}{R},\ O' = \frac{ds}{R'},\ C = \frac{ds \,.\, \cos\varphi}{\rho - p},\ C' = \frac{ds \,.\, \cos\varphi}{\rho' + p},$$

y, sustituyendo estos valores en la igualdad precedente (a), nos resultará

$$\text{(A)} \quad \left(\frac{1}{\rho-p}+\frac{1}{\rho'+p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'};$$

fórmula mui sencilla que nos dará a conocer al radio de curbatura ρ de la envolvente, y por consiguiente, a su centro de curbatura C, cuando se conozca el radio ρ' de la involuta

814. Podemos preveer con facilidad y sin necesidad de trazar una nueva figura que deberémos cambiar en esta fórmula el signo de ρ', cuando el centro C' caiga al mismo lado que C respecto al punto m; lo mismo será preciso hacer con R', si el centro O' se halla al mismo lado que O relativamente al punto de contacto α de los dos círculos. Y así, en el caso de la *fig.* 5, la equacion (A) tomará la forma

$$\text{(B)} \quad \left(\frac{1}{\rho-p}-\frac{1}{\rho'-p}\right)\cos\varphi=\frac{1}{R}-\frac{1}{R'},$$

que es mui simétrica en todas sus partes. Bajo este punto de vista, hubiera sido mas racional fundar la demostracion en la *fig.* 5, en que los centros están colocados al mismo lado de la tanjente; pero como este último caso se presenta ménos veces en los engargantes, hemos querido fijar la atencion en los datos mas habituales.

Somos deudores de las fórmulas (A) y (B) a *M. Savary*, así como tambien de la construccion gráfica que vamos a esponer.

815. Unamos por medio de rectas los centros O y C, O' y C'; prolongando en seguida estas rectas, indaguémos los puntos D y D' en que van a cortar a la perpendicular αD levantada a la normal comun CαC'; y sucederá que estos dos puntos se confundirán. Con efecto, si desde los centros O y O' bajamos perpendiculares a la normal CαC', formarémos triángulos semejantes con CαD y C'αD', de los cuales con suma facilidad sacarémos que FIG. 6.

$$\alpha D=\frac{(\rho-p)\,R\,\text{sen}\varphi}{R\cos\varphi-(\rho-p)} \quad \text{y} \quad \alpha D'=\frac{(\rho'+p)\,R'\,\text{sen}\varphi}{(\rho'+p)-R'\cos\varphi}.$$

Pero la fórmula (A) nos da, transportando el segundo y tercer término,

$$\frac{R\cos\varphi-(\rho-p)}{(\rho-p)\,R}=\frac{(\rho'+p)-R'\cos\varphi}{(\rho'+p)\,R'};$$

que nos prueba que los valores precedentes de αD y αD' son ciertamente iguales.

816 Y así, cuando se conozca el centro de curbatura C' del punto *m* de la involuta *amb*, tirarémos la recta C'O' que prolongarémos hasta que encuentre en un punto D a la perpendicular αD levantada a la normal αmC': y en seguida, uniendo este punto D con O, la recta OD irá a cortar a la normal prolongada C'α en el punto C que será el centro de curbatura de la envolvente A*m*B respecto al punto *m*. Cuando la involuta *amb*, en lugar de estar definida por sus propiedades jeométricas, solo se nos dé gráficamente, trazarémos muchos círculos tanjentes en *m* a esta curba, y elijiendo entre ellos el que se aproxime mas a confundirse con *ab* en los alrededores de *m*, podrémos tomar su centro como si fuese el punto C'.

En todos los casos, si con radios como C*m* describimos arcos pequeños de círculo, y los casamos por medio de un trazo contínuo, obtendrémos el trazado de la envolvente A*mb* del modo gráfico mas exacto.

FIG. 4. 817. Antes de aplicar estos resultados a varios ejemplos, colocarémos en este lugar una observacion importante relativa a la teoría de los engargantes; tal es la de que durante la rotacion del círculo O' sobre el círculo fijo O, la curba *amb* no solo rueda sencillamente sobre A*m*B, sino que al mismo tiempo resbala sobre ella (núm. 469), de lo cual resulta un *rozamiento* entre los dientes de las dos ruedas que consume una parte de la fuerza motriz. Con efecto, cuando en una época cualquiera se tocan los círculos O y O' en α, el contacto *m* de la envolvente con la involuta se conoce por la normal CαmC' tirada por este punto α; luego, cuando un desvío infinitamente pequeño haya hecho que los círculos se toquen en los puntos α' y α_1, las normales correspondientes serán las rectas C α' y Cα_1, que van a determinar los puntos *m*' y m_1 en que la involuta y la envolvente se tocan en esta segunda época del movimiento. Pero si los arcos *mm*' y mm_1 no son iguales, y dirijidos en el mismo sentido, es claro que habrá resbalamiento de una de las curbas sobre la otra; calculémos pues estos arcos.

Evidentemente tenemos que

$$mm_1 = \frac{\rho \cos\varphi \,.\, ds}{\rho - p} \quad \text{y} \quad mm' = \frac{\rho' \cos\varphi \,.\, ds}{\rho' + p};$$

luego

$$mm_1 - mm' = \left(\frac{\rho}{\rho - p} - \frac{\rho'}{\rho' - p}\right) \cos\varphi \,.\, ds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) pds,$$

reduciéndola en virtud de la fórmula (A). Ademas, si consideramos un desvío de magnitud finita, representado sobre el círculo fijo por $s''-s'$, la diferencia de los arcos recorridos sobre la envolvente y la involuta por el punto de contacto, nos la dará a conocer la integral definida

$$\delta = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \int_{s'}^{s''} pds.$$

luego, excluyendo los casos inusitados en que la porcion de normal $\alpha m = p$ cambiasen de signo en el intervalo de s' a s'', es cierto que esta integral, compuesta toda de elementos positivos, no será nunca nula; y por consiguiente, habrá siempre un resbalamiento entre las curbas *amb* y A*m*B.

818. No nos detendrémos en el caso mui particular que supusiese a p constantemente nula; porque esto exijiria que la involuta y la envolvente se confundiesen con las circunferencias O' y O. Si uno de los dos centros C o C' estuviese situado entre α y m, debíamos notar, en la *fig.* 4, que los puntos m_1 y m' estarian colocados uno a la izquierda y otro a la derecha de m; y como entónces uno de los arcos mm_1 o mm' sería negativo, su diferencia analítica sería tambien la que nos diese a conocer el desvio de los puntos m_1 y m', de modo que la integral δ se aplica tambien a este caso. Finalmente, cuando el resbalamiento es interior, como sucede en la *fig.* 5, esta integral tomará la forma

$$\delta' = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \int_{s'}^{s''} pds;$$

y supuesto que en este caso, son precisamente desiguales los radios R y R', la diferencia δ de los arcos recorridos por el contacto, será tambien diferente de cero, y habrá siempre resbalamiento entre la envolvente y la involuta, con tal que p no cambie de signo en el intervalo que se considera.

Volvamos ahora a la construccion gráfica de los centros de curbatura de una envolvente, tomando por ejemplo los casos que mas comunmente se usan en los engargantes.

LAM. 65. FIG. 9. 819. *Envolvente de un punto móvil.* Si la involuta se reduce a un solo punto A colocado sobre la misma circunferencia del círculo móvil, la envolvente no será otra cosa que la curba descrita por este punto, es decir, la epicicloide sencilla AMB; sería una epicicloide alongada A'M'B', si el punto jenerador estuviese colocado en A' esterior al círculo móvil; y si estuviese colocado interiormente en A", daria oríjen a la epicicloide acortada A"M"B". Hemos visto precedentemente (números 471, y 473) cuan fácil es hallar los puntos M, M' y M" de estas curbas, correspondientes a cada punto de contacto α del círculo móvil O'; y que las normales correspondientes son las rectas αM, αM', y αM". Para obtener ahora los centros de curbatura, es preciso, segun la regla del núm. 816, levantar una perpendicular αD, αD' o αD" a cada normal, y prolongarla hasta que corte al diámetro MO'; y uniendo en seguida el punto de seccion D, D' o D", con el centro O por una recta, esta última encontrará a la prolongacion de la normal en el centro C, C' o C" que buscamos.

FIG. 9. 820. Para la epicicloide sencilla AMB, vemos claramente que, sin trazar la perpendicular αD, el punto de encuentro con MO' estará siempre en el estremo D de este diámetro; ademas, la série de los centros de curbatura análogos a C, formará una involuta ACE que será ella misma una nueva epicicloide y que podemos determinar *a priori* del modo siguiente. Despues de haber levantado la perpendicular Cβ a la normal, describirémos un círculo que tenga por diámetro el intervalo $\alpha\beta$, y otro círculo que tenga por radio a Oβ; haciendo en seguida rodar el primero sobre el segundo, el punto C enjendrará la evoluta ACE. Para justificar esta asercion, adoptemos las anotaciones siguientes:

$$O\alpha = R,\ O'\alpha = R',\ O\beta = r \text{ y } \alpha\beta = 2r';$$

observémos en seguida, que con motivo de ser αD=MT, tendrémos evidentemente que

$$O\beta : O\alpha :: \beta C : \alpha D :: \alpha\beta : \alpha T;$$

lo cual nos da la relacion

$$r : R :: r' : R'; \text{ y ademas } R = r + 2r';$$

de donde concluimos que

$$r = \frac{R^2}{R+2R'}, \text{ y } r' = \frac{RR'}{R+2R'}.$$

Estos valores constantes prueban desde luego que los dos círculos descritos con Oβ y $\alpha\beta$ permanecerán invariables en magnitud, cualquiera que sea la posicion del contacto α del círculo primitivo O'; segun esto, despues de haber tomado el arco AF igual a la semi-circunferencia MαD, y de haber tirado el radio OEF, no habrá mas que demostrar que el arco βC es igual a βE. Pero como los arcos semejantes βC y MT son proporcionales a sus radios, y como el segundo de estos arcos es igual αD$=\alpha$F, tendrémos que

$$\text{arco } \beta C = \frac{r'}{R'} \cdot \alpha F, \text{ y arco } \beta E = \frac{r}{R} \cdot \alpha F,$$

de donde resulta qne los arcos βC y βE son efectivamente iguales en lonjitud absoluta, en virtud de la proporcion hallada mas arriba entre los cuatro radios.

821. Para el vértice B de la epicicloide primitiva, el centro de curbatura se halla en el oríjen E de la evoluta ACE; y como la regla jeneral del núm. 816 es en este caso insuficiente para obtener este centro particular E, es útil saberlo hallar directamente. Pero el valor de r sentado arriba nos dice que si sobre OB como diámetro, describimos una semi-circunferencia, esta cortará al círculo primitivo descrito con el radio OA en un punto G, desde el cual, bajando una perpendicular GE al diámetro, nos dará a conocer al punto E que buscamos.

822. Debemos observar que la epicicloide es una curba rectificable; porque un arco de una evoluta es siempre igual a la diferencia de los radios de curbatura que terminan en los estremos de este arco, de aquí resulta que el arco AC es igual a la recta CαM. La mitad de la rama ACE tendrá por lonjitud a EB$=2r'+2R'$; y si queremos espresarla solo por medio de los elementos de esta epicicloide, bastará que sustituyamos aquí por R' su valor en funciones de r y r'.

823. *Envolvente de un círculo.* Sea O el círculo fijo, y O' el móvil LAM. 65. que rodando sobre el otro, arrastre consigo a un pequeño círculo *amb* FIG. 10. cuyo centro M esté colocado sobre la circunferencia O'. Este punto M ha descrito la epicicloide AM; y para obtener la envolvente εm, es preciso, segun la regla del núm. 811, tirar de cada punto de contacto α, una normal a la involuta *amb*, es decir, tirar la recta αM. Esta última encuentra a la involuta en dos puntos m y m'; luego aquí habrá dos

envolventes, una εm interior, y la otra $\varepsilon' m'$ esterior, las cuales tocarán a la involuta amb en los puntos m y m'. Estas dos envolventes tendrán los mismos centros de curbatura C y la misma evoluta ACE que la epicicloide AM; pero sus radios de curbatura serán todos menores o mayores que los de esta última línea, una cantidad constante $Mm=r$; de modo que estas tres curbas estarán equidistantes en todos sus puntos, en el sentido de sus normales comunes.

Cada uno de estos involucros presenta un retroceso en el sitio en que encuentra a la evoluta ACE. Para determinar este punto ε, basta observar que entónces el radio de curbatura de la epicicloide es igual a $Mm=r$, y que la porcion de normal señalada por p en el núm. 813, es en este caso la cuerda αM del círculo móvil; luego, si en la fórmula (A) de este número, hacemos a

$$\rho=r,\ \rho'=0 \text{ y a } p=2R'\cos\varphi,$$

deducirémos de aquí con suma facilidad que

$$p=\frac{r}{2}\left(\frac{R+2R'}{R+R'}\right),$$

lo que nos dice que tomando sobre la circunferencia O, y partiendo del punto A, un arco igual al que en el círculo O' tiene por cuerda el valor que acabamos de hallar para p, obtendrémos el punto de contacto α' que corresponde al retroceso ε que buscamos; y desde luego, este último punto se construirá fácilmente, así como lo hemos hecho con el centro C por medio del punto α.

En lugar de aplicar la fórmula (A) a la epicicloide AM, hubiéramos podido aplicarla directamente a la envolvente εm, cuyo radio de curbatura es nulo en el punto que buscamos ε; en cuyo caso hubiera sido preciso hacer a

$$\rho=0,\ \rho'=r \text{ y } p+r=p'=2R'\cos\varphi,$$

y hubiéramos hallado para p', que representa la cuerda $M\alpha$, el mismo valor que aquí arriba.

825. La única parte de estas envolventes que es útil en las aplicaciones a los engargantes, es la rama εm, o para hablar mas exactamente, es la porcion δm de esta rama que se halla en el esterior del círculo O.

Aun cuando el oríjen δ de esta porcion útil se diferencia mui poco del retroceso ε, si queremos determinar rigurosamente el primero de estos puntos, observarémos que se presenta cuando el círculo pequeño pasa por el contacto α de los círculos O y O', es decir, cuando la cuerda Mα es igual al radio Mm. Luego será suficiente tomar el arco Aδ igual al que, en el círculo O', tiene por cuerda al radio Mm.

826 *Envolvente de un radio.* Si adoptamos por involuta al radio O'A del círculo móvil O', la envolvente será la epicicloide AmB enjendrada por el punto A de un círculo V que se hubiese descrito sobre AO' como diámetro, y que él mismo rodase sobre la circunferencia O. Con efecto, cuando el círculo O' haya llegado a una posicion cualquiera O", el radio O'A ocupará una situacion O"a determinada por la condicion $\alpha a = \alpha$A; luego si bajamos sobre esta involuta O"a la perpendicular αm, el punto m será (núm. 811) un punto de la envolvente que buscamos. Pero este punto m manifiestamente pertenecerá a la circunferencia V' descrita sobre αO" como diámetro, y entónces los arcos αm y αa que corresponden a un mismo ángulo aO"α y están descritos con radios duplo uno y otro, serán iguales en lonjitud absoluta; de donde concluirémos que el arco αm es tambien igual al arco αA, y que segun esto el punto m hallado ya para la envolvente; pertenece efectivamente a la epicicloide AB que describiria el punto A del círculo V que rodase sobre la circunferencia O. FIG. 11.

827. Lo que precede demuestra al mismo tiempo que si el círculo V rodase en el interior del círculo O considerado inmóvil, el punto A de esta circunferencia V describiria una epicicloide *rectilínea* que precisamente sería el radio AO', o mas bien el diámetro entero del círculo O', segun ya lo hemos visto en el núm. 475. De modo que en el caso presente la involuta y la envolvente son enjendradas por el rodamiento del mismo círculo V sobre las circunferencias O y O', este resultado no es sino un caso particular de la proposicion siguiente :

828. *Envolvente de una epicicloide.* Si hacemos rodar un círculo U de un radio arbitrario, primeramente en el interior del círculo O', y en seguida, en el esterior del círculo O, un mismo punto de la circunferencia U describirá dos epicicloides ab y AB, de las cuales la última será la envolvente de todas las posiciones que tomará la involuta ab, cuando esta sea arrastrada por la rotacion del círculo O' sobre la circunferencia O. Con efecto, consideremos los círculos O y O' en una posicion cualquiera FIG. 12.

en que se toquen en α, tracémos en seguida el círculo U tanjente en este mismo punto a los otros dos. En este caso, la circunferencia U irá a cortar a la epicicloide *ab* en un punto *m*, de modo que sea el arco $am = \alpha a$; pero a causa de la rotacion del círculo O' sobre O, será tambien el arco $\alpha a = \alpha A$; luego los arcos αm y αA son iguales, y por consiguiente, el punto *m* de la curba *ab* pertenece tambien a la epicicloide AB. Ademas, estas dos epicicloides son tanjentes en el punto comun *m*, porque tanto para la una como para la otra (núm. 472) la normal es la cuerda αm del círculo jenerador U. Pero mui rara vez se emplean estos dos perfiles curbilíneos en los dientes de las ruedas, en atencion a que es mucho mas cómodo adoptar el sistema de la *fig.* 11, en el cual uno de los dos perfiles es una recta AO' (*).

(*) *Jeneralizando estas consideraciones, podemos definir de otro modo que como lo hemos hecho en el núm.* 808, *la forma que deben tener los perfiles conjugados de los dientes de un engargante. Para esto, tomemos una curba cualquiera* W *tanjente en* A (fig. 2) *a los dos círculos* O *y* O', *y hagámosla rodar alternativamente en el interior de la circunferencia* O' *y en el esterior del círculo* O; *en este caso el punto* A *de* W *describirá subcesivamente dos curbas* ab *y* AB *que serán los perfiles pedidos. Porque cuando los eirculos* O *y* O' *jiren al rededor de sus centros inmóviles de modo que impriman velocidades iguales* (*núm.* 806) *a las circunferencias* $\alpha\beta$ *y* $\alpha'\beta'$, *sucederá que las curbas* AB *y* ab *enjendradas como arriba, se* tocarán *constantemenente en un punto variable, cuya normal comun pasará siempre por el punto* A *colocado sobre la linea que une los centros. Demostrarémos esto con facilidad, sustituyendo, en conformidad con el principio del núm.* 809, *al movimiento de revolucion de los círculos* O *y* O' *al rededor de sus centros inmóviles, el rodamiento de la circunferencia* O' *sobre la circunferencia* O *enteramente fija:*

Pero esta segunda definicion de los perfiles de los dientes, sería poco cómoda para emplearla en el caso en que con anticipacion y arbitrariamente *se asigne la forma* ab *de uno de estos perfiles; porque entónces sería preciso principiar por indagar cual era la curba* W *que, rodando sobre* O' *podria enjendrar el perfil dado* ab, *lo que de ordinario ofreceria muchas dificultades.*

829. *Envolvente de una voluta de círculo.* Finalmente, adoptémos por involuta a la curba *amb* que es la voluta (núm. 479) de un círculo concéntrico con O', y descrito con un radio arbitrario O'C'. Si desde el punto α tiramos a este círculo O'C' la tanjente αmC', esta será normal a *amb* y nos dará (núm. 811) un punto *m* de la envolvente A*m*B que buscamos; por otra parte, el centro de curbatura C de esta envolvente se obtendrá (núm. 816) tirando O'C' y su paralela OC, que será perpendicular a la normal C'αC, y evidentemente tendrá por valor constante a FIG. 13.

$$OC = O'C' \times \frac{R}{R'};$$

de donde concluimos que la circunferencia descrita con el radio OC será el lugar de todos los centros de curbatura de la envolvente A*m*B, y consiguientemente esta misma envolvente es una voluta del círculo OC.

830. Volvamos ahora a tratar del verdadero estado de dos ruedas una de las cuales transmita a la otra el movimiento circular que la anima; porque segun hemos dicho núm. 808, la hipótesis de que el círculo O' rodaba sobre el círculo O que estaba absolutamente fijo, no era sino una ficcion propia para simplificar el estudio y trazado de las envolventes de que teníamos necesidad. Y así en realidad, los centros O y O' están ámbos fijos, y el movimiento de revolucion que se imprime a la rueda O se comunica a la rueda O' por medio del empuje que la curba AB transmite a la otra *ab*; pero para que este movimiento satisfaga a la condicion esencial del núm. 806, es preciso (núm. 808) que una de estas curbas sea la envolvente de la otra cuya forma queda arbitraria. Sin embargo, debemos hacer la restriccion de que, en la porcion de *ab* que se utilice, vayan los radios vectores, tales como O'*m*, disminuyendo siempre o siempre aumentando; y entónces los de AB, tales como O*m*, variarán constantemente en sentido contrario a los anteriores. Esto es necesario para que haya verdadero *empuje* de un diente contra otro; porque si uno de los radios vectores O'*m* fuese máximo o mínimo, este necesariamente sería *normal* a la curba *ab*; y cuando los dos dientes llegasen a tocarse en *m*, la normal O'*m*, que en esta época debe (núm. 810) pasar por el punto de contacto D de los dos círculos, iria a coincidir en direccion con la línea de los centros ODO'; y entónces la revolucion FIG. 7.

del círculo O al rededor de su centro inmóvil, produciria una velocidad precisamente *tanjencial* a la curba *amb*, esto no daria lugar sino a un simple rozamiento que sería insuficiente para arastrar a la rueda O'.

FIG. 7. 831. *Lugar de los contactos.* En el movimiento de revolucion al rededor de los centros fijos O y O', el punto de contacto *m* de la envolvente y de la involuta, que ámbas participan de este movimiento, ocupa subcesivamente posiciones diferentes con respecto a la recta invariable ODO' y al punto D en que constantemente se tocan los círculos movibles; la sucesion de estas posiciones del punto *m*, sobre el plano fijo de los dos círculos, forma una curba que es útil conocer. En jeneral, la obtendrémos midiendo en cada posicion del círculo móvil de la *fig.* 2 el radio vector A_3e_3 y el ángulo $e_3A_3O'_3$ para referirlos en seguida sobre la *fig.* 7, partiendo desde el punto D considerado como polo; pero en muchos casos, este lugar de los contactos entre la envolvente y la involuta se obtiene de un modo directo y mui sencillo.

1.° Si la involuta se redujese a un punto de la circunferencia O', es evidente que esta circunferencia sería ella misma el lugar pedido.

FIG. 11 2.° Cuando la involuta es el radio O'A (*fig.* 11), el lugar de los contactos subcesivos es la circunferencia V descrita sobre O'A como diámetro: porque cualquiera que sea la posicion O'A' del radio móvil, la normal AN', que es preciso bajar del punto A (núm. 811), terminará siempre sobre la circunferencia V.

3.° En el caso poco usado de la *fig.* 12, en que la envolvente y la involuta fuesen dos epicicloides, sus puntos de contacto se hallarian todos evidentemente sobre la circunferencia U, colocada tanjencialmente a los dos círculos primitivos sobre la línea invariable que une los centros fijos.

FIG. 13 4.° Por último, cuando la involuta y la envolvente son dos volutas de círculo, el lugar de sus contactos subcesivos será precisamente la recta C'αC, que es tanjente comun a los dos círculos ausiliares que dan nacimiento a estas volutas; porque durante la revolucion de estas curbas al rededor de los centros fijos O y O', la normal que sería preciso tirar desde el punto α (núm. 811), coincidiria siempre con la recta C'αC.

832. *Límites correspondientes.* Como en la práctica, no se emplean sino arcos poco estensos de envolvente e involuta, es importante saber

limitar una de estas curbas en la porcion verdaderamente útil, segun la magnitud del arco que se ha conservado para la otra. Pero los puntos correspondientes, es decir, los que se hallan en contacto a cierta época del movimiento de revolucion, naturalmente serian dados si construyésemos la envolvente segun el método del núm. 811 y la *fig.* 2; y como en la mayor parte de los casos usuales, se conoce con anticipacion la naturaleza de la envolvente y de la involuta, y se trazan estas curbas independientemente una de otra; de modo que es necesario indagar en seguida los límites correspondientes, es fácil esto despues de haber construido el *lugar de los contactos* subcesivos.

833. Por ejemplo, en el caso de la *fig.* 11 en que la involuta es el radio O'A, y la envolvente la epicicloide A*m*B descrita por el rodamiento del círculo V', para hallar el punto correspondiente a N, referirémos este último a N' sobre la circunferencia V que es el lugar de los contactos subcesivos, por medio de un arco de círculo descrito desde el centro O; y en seguida, desde el centro O' con el radio O'N', describirémos otro arco de círculo que transportará el punto N' a *n* sobre el radio O'A; y este último punto corresponderá a N. De modo que si de la envolvente no conservamos sino el arco A'N, la única porcion útil de la involuta será A*n;* y como estos arcos evidentemente tienen lonjitudes mui desiguales, conocerémos claramente que habrá *resbalamiento,* y por consiguiente *rozamiento* de la envolvente con la involuta, como lo hemos demostrado en jeneral en el núm. 817.

834. En la *fig.* 13 en que la envolvente y la involuta son dos volutas, sabemos que el lugar de sus contactos subcesivos es la recta C'αC; luego para obtener el punto correspondiente a N, será suficiente transportar este último a N' por medio de un arco descrito con el radio ON, y referir en seguida N' a *n* por medio de un arco de círculo descrito desde el centro O'. Y así es que los arcos AN y *an,* AB y *ab,*.... serán los arcos correspondientes, que ruedan y resbalan uno sobre otro durante la revolucion de los círculos O y O' al rededor de sus centros fijos.

CAPITULO IV.

Trazado de los engargantes planos o cilíndricos.

LAM. 66. FIG. 14. 835. Cuando las dos ruedas que queremos poner en movimiento tienen sus *ejes paralelos* proyectados en O y O' sobre el plano mismo del depurado, tanto estas ruedas como los *dientes* de que están armadas, se componen de rebanadas cilíndricas mas o ménos gruesas, pero que tienen sus jeneratrices paralelas a los ejes: estos dientes se proyectarán segun curbas o *perfiles*, que manifiestamente bastará señalar para que la forma total de la rueda quede bien definida. Haremos pues abstraccion de los espesores, y no tendrémos que ocuparnos sino de los perfiles situados en el plano del depurado. Sentado esto, y segun las nociones preliminares manifestadas en los números 806 y 808, sabemos que será preciso principiar por dividir el intervalo OO' en dos partes OA=R y O'A=R' que estén en razon inversa de las velocidades *angulares* (núm. 805) ω y ω' que se quieran imprimir a las dos ruedas; en seguida, se trazarán con estos radios los círculos *primitivos* $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ cuyas circunferencias deberán adquirir velocidades absolutas que sean *iguales*, es decir, que los arcos iguales AA' y aa' deberán pasar por la línea de los centros OO' en un mismo tiempo.

836. Elijamos ahora dos números *enteros* cualesquiera n y n', que estén en razon inversa de las velocidades angulares ω y ω', es decir, que sean de tal magnitud que nos den

$$n : n' :: \omega' : \omega :: R : R';$$

dividamos en seguida el círculo primitivo $\alpha\beta$ en n partes iguales AA', A'A", A"A"',... y el $\alpha'\beta'$ en n' partes tambien iguales aa', $a'a''$, $a''a'''$,... Estas divisiones tendrán tambien las mismas lonjitudes absolutas en los dos círculos; porque en virtud de la proporcion precedente, evidentemente hallarémos que

$$\frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'}, \text{ o } AA' = aa';$$

de modo que, por la revolucion de los círculos, los puntos A' y *a*', A" y *a*".... llegarán al mismo tiempo a la línea de los centros OO'. En seguida, subdividirémos cada una de las *divisiones* precedentes en dos partes desiguales, tomando los arcos AB, A'B', A"B".... iguales entre sí, pero un tanto menor que la mitad de AA'; estos arcos parciales formarán la *base* de cada diente, o el *lleno* de la rueda, miéntras que los arcos AB', A'B".... serán los vanos o intervalos entre dos dientes consecutivos. Del mismo modo operarémos con el círculo primitivo $\alpha'\beta'$, en el que *ab*, *a'b'*,... serán las bases de los dientes de esta rueda, un poco menores que los intervalos *ba'*, *b'a"*.... Esta diferencia es necesaria para *el juego* que siempre debe haber en el engargante, como lo demostrarémos en lo que sigue (núm. 342).

337. Si queremos apreciar con exactitud la amplitud de este juego, llamemos B y B' a las bases AB y *ab* que pueden ser desiguales, I e I' a los intervalos, y tendrémos que

$$B + I = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'} = B' + I';$$

y de aquí concluirémos para el juego que

$$J = I - B' = I' - B = \frac{2\pi R}{n} - (B + B');$$

es decir, *la lonjitud comun de las divisiones, ménos la suma de las bases.* Si las bases fuesen iguales en las dos ruedas, la amplitud del jnego sería el exceso de un intervalo sobre una base; pero en todos los casos, es preciso que este juego esté comprehendido entre *un duodécimo* y *un vijésimo* de la lonjitud constante AA' de las divisiones primitivas, con el fin de no disminuir mucho el espesor de los dientes, y por consiguiente la resistencia de que son susceptibles; y tambien para hacer ménos sensibles los choques alternativos, que comunmente se manifiestan, cuando las dos ruedas, aunque continuen su marcha en el mismo sentido, sufren variaciones en sus velocidadas, producidas por causas accidentales.

Todos los detalles que preceden son comunes a los diferentes jéneros de engargantes, y estos no se diferencian entre sí sino por la forma del perfil de los dientes: pero en todos casos, para cumplir con la condicion

esencial (núm. 806) de qne los arcos iguales AA' y *aa'* pasen al mismo tiempo por la línea de los centros, será preciso recordemos que los perfiles corespondientes ZAF y *zaf* deben ser uno con respecto al otro, *envolvente* e *involuta* (núm. 808), y podemos elejir a nuestro arbitrio uno de estos perfiles, siempre que quede satisfecha la restriccion indicada en el núm. 830.

FIG. 14. 838. ENGARGANTE DE FLANCO *simétrico y recíproco*. En este caso, adoptarémos por perfil de cada diente de la rueda O', a un radio como el O'*a*; y desde luego el perfil correspondiente AZ sobre la rueda O deberá ser un arco de epicicloide enjendrada por el punto *a* del círculo V' descrito sobre el diámetro O'*a* cuyo círculo rodará sobre la circunferencia O; porque hemos visto (núm. 826) que esta epicicloide era la *envolvente* de todas las posiciones que adquiere el radio O'*a* en la rotacion del círculo O'. Trazarémos pues este arco AZ por el procedimiento del núm. 471 o por el del núm. 472, y le terminarémos en el punto Z en que cortará al radio OZ tirado por el medio de la base AB : en seguida, transportarémos estos resultados simétricamente a la izquierda de este radio OZ para obtener el perfil opuesto BZ; porque, en el caso actual, es *simétrico* el engargante, es decir, destinado a rodar de derecha a izquierda del mismo modo que de izquierda a derecha; pero si la rueda O no debiese nunca jirar sino en el segundo de estos sentidos, quedaria arbitraria la forma del perfil BZ (*).

839. Se da el nombre de *flanco* a la parte plana del diente, dirijida segun el radio O'*a*; y como no hai sino una débil porcion de este radio que sea tocada y conducida por el arco epicicloídico AZ, conviene saber hallar la estension exacta *af* que debe tener el flanco. Pero en virtud de lo que hemos dicho en el núm. 833, será preciso describir con la distancia OZ por radio un arco de círculo que transportará la estremidad Z a

---

(*) *Para evitar toda equivocacion, y no caer en contradicciones graves sobre* el sentido *de los diversos movimientos de rotacion al rededor de ejes diferentes, es preciso tener cuidado de observar cada uno de ellos colocándose sobre el eje correspondiente. Y así en la* fig. 14, *si el sistema funciona en la direccion indicada por la flecha, será preciso decir que la rueda* O *jira* de izquierda a derecha *y la rueda* O' de derecha a izquierda.

m sobre la circunferencia V'; y en seguida, referir este punto *m* a *f* por medio de un arco de círculo descrito desde el centro O'.

840. Por lo comun se hace que este engargante sea *recíproco* prolongando el perfil ZA en el interior de la rueda O por un flanco AF, y agregando al esterior de la rueda O' un diente saliente *azb* cuyo perfil está formado de dos arcos de epicicloide simétricos uno de otro. En el caso actual, se trazará el arco *az* haciendo rodar sobre la circunferencia O' al círculo V descrito sobre AO como diámetro; y la estension exacta AF del flanco que será rejida por el arco *az* se obtendrá (núm. 833) describiendo desde el punto O' el arco de círculo *z*M terminado en la circunferencia V, y refiriendo en seguida el punto M a F por medio de un arco concéntrico con O.

Una vez trazado el perfil FAZBE sobre un carton se recorta este segun el contorno y sirve de patron móvil colocándolo encima de todas las demas bases A'B', A"B",.... con cuyo ausilio se trazan inmediatamente los perfiles de todos los dientes de la rueda O. Del mismo modo operarémos con la rueda O' empleando tambien otro patron recortado segun el contorno *fazbe*.

841. *Límite de las escopleaduras, o Curba de identificacion entre dos perfiles.* A continuacion de los flancos AF y BE, es preciso practicar una escopleadura que deje espacio al diente *azb* para moverse libremente. Para determinar estos límites exactamente, consideremos la *fig.* 15 en que *suponemos que es nulo el juego* del engargante, y en la que desde luego el diente *azb* está precisamente en contacto con los dos perfiles ZAF y Z'B'E' a un mismo tiempo; en este caso, se tratará de hallar el lugar FGE' de todas las posiciones que toma el punto *z* sobre el círculo O móvil al rededor de su centro, en tanto que el mismo círculo O' jira y arrastra al radio O'*z* al rededor del punto fijo O'. Pero segun las consideraciones espuestas en el núm. 809, esta curba FGE' es la misma que la que describiria el punto *z* en la hipótesis de que el círculo O' *rodase* sobre el círculo O enteramente inmóvil; este último jénero de rotacion produce una epicicloide alongada cuya construccion hemos dado en el núm. 473; es pues una porcion del *nudo* de esta epicicloide la que es preciso tomar para el contorno F*z*E', y este arco se identificará completamente con los dos flancos AF y BE'. Con efecto, si consideramos (*fig.* 16) el diente *azb* cuando ha llegado a la posicion en que va FIG. 15.

a dejar de estar trabado, y en que toca la estremidad del arco *az* al último elemento del flanco AF, en este caso, la normal comun a esta involuta y a esta envolvente es la recta FD (núm. 810); pero mirando al punto *z* como que ha descrito en el mismo tiempo la epicicloide alargada E'GF, la recta FD será tambien (núm. 470) normal a esta última curba; de donde concluirémos que la epicicloide E'GF es tanjente al flanco AF, y así mismo toca al otro flanco B'E' en el punto E'.

842. Lo que acabamos de decir supone que la base *ab* de cada diente es precisamente igual al intervalo AB'; pero en la práctica no debe nunca admitirse esta hipótesis; porque de aquí resultaria en cada cara *bz* de dientes trabados, un contacto inútil para el empuje, y por consiguiente, rozamientos que disminuirian notablemente el efecto útil de la fuerza motriz: ademas, la menor irregularidad en los perfiles detendria el movimiento de la máquina, o espondria a que se quebrasen los dientes. Por consiguiente, es preciso que admitamos cierto *juego,* cuyos límites hemos indicado ya en el núm. 837; y en este caso, que es el de la *fig.* 14, la epicicloide FG no volverá ya a unirse con el flanco B'E', y deberémos terminarla en su vértice G situado sobre la circunferencia descrita con el radio OL que se halla tomando OZ=O'z: en seguida, como es preciso prevenir al caso en que una causa accidental llegue a retardar la velocidad de rotacion de la rueda *ducente,* sucederia que el perfil *faz* marcharia de vacío miéntras que el empuje se ejerceria entre las caras *ebz* y Z'B'E'; segun esto, deberémos tambien trazar la epicicloide alongada E'H simétrica con FG (*), y el conjunto de estas dos ramas reunidos por un arco mui pequeño de circunferencia OL, compondrá el contorno FGH'E' de la escopleadura rigurosamente necesaria para que la

---

(*) *Estos dos arcos* FG *y* E'H' *no pertenecen a la misma epicicloide alongada; porque para conseguir el vértice* G *de la primera, sería preciso tomar sobre la circunferencia* αβ, *partiendo desde el punto* A, *un arco igual a la mitad* ak *de* ab; *y en seguida, tirar al radio* Ok' *que cortase a la circunferencia* OL *en el punto pedido* G. *Miéntras que para la otra epicicloide* E'H', *necesitaríamos tomar el arco* bk *sobre el círculo* αβ, *pero partiendo desde el punto* B', *haciendo* mover *a las dos ruedas para poner en contacto al perfil* bz *con el orijen* B' *del flanco* B'E'.

punta z se mueva libremente, ya sea en las pequeñas vacilaciones que permite el juego, o ya en el caso en que la rueda O deba moverse tanto a la izquierda como a la derecha.

Del mismo modo determinaríamos el contorno $ehg'f'$ de la escopleadura que deberia ejecutarse en la rueda O' para dejar paso libre al diente A'Z'B', formándole de dos ramas de epicicloide alargada, descrita por la estremidad del radio OZ' cuando este es arrastrado por el rodamiento del círculo O sobre el círculo O', y estas dos ramas se casarán por medio de un arco pequeño de la circunferencia cuyo radio será $O'l'$, que se determina tomando la distancia Ol=OZ'.

843. En lugar de atenernos a estos límites rigurosos, es siempre preciso en la práctica, hacer la escopleadura un poco mas profunda; y para simplicar los procedimientos de la ejecucion, creemos por lo comun suficiente prolongar los flancos hasta la circunferencia OL, cuyo radio se halla tomando O'L=O'z; de modo que la escopleadura se termine a escuadra como se ve en $F''G_2H_3E'''$. Ademas, como el influjo de una gran presion podria hacer que las partes agudas o las aristas vivas espusiesen el sistema a que se apuntalasen o decentasen las superficies sobre que resbalan, y esto alteraria la curbatura primitiva de los perfiles y aumentaria el rozamiento, es costumbre quitar la porcion de cada diente que se aproxima a la punta Z, segun se ve en B_4XYA_4, teniendo cuidado de suavizar de la arista viva que deje esta truncadura ejecutada por medio de un círculo concéntrico con O. Los dientes se llaman entónces *chaflanados*, y practicando lo mismo con la rueda O', podrémos dar a las escopleaduras de las dos ruedas una profundidad menor que la que indican las circunferencias OL y O'l. FIG. 14.

844. Para fijar convenientemente el radio de círculo XY que sirve para determinar el *chaflanamiento*, es preciso cumplir con la condicion siguiente: *cuando dos dientes se tocan en* A *sobre la línea de los centros* OAO', *debe haber despues de esta línea, y en sentido del movimiento, otro par de dientes* Z' *y* z' *que tambien estén trabados en este mismo instante.* Y como la epicicloide A'Z' toca al flanco $a'f'$ en un punto x que se halla bajando desde el punto A una perpendicular Ax al flanco (núm. 810), bastará por consiguiente, tirar esta normal, y tomar la distancia Ox para radio del círculo XY.

Si sucediese que la normal Ax bajada sobre el flanco $a'f'$, fuese a caer

encima del punto f', nos indicaria esto que los dientes estaban demasiado separados para complir con la condicion enunciada aquí arriba, y entónces sería preciso aumentar los números n y n' disminuyendo la magnitud de las divisiones iguales AA' y aa'. Volverémos a tratar de esta circunferencia en el núm. 879.

FIG. 14: 845. *Método aproximativo.* De la condicion precedente se ha deducido un procedimiento mui simple, pero que su exactitud no es sino aproximada, este consiste en reemplazar el perfil epicicloídico A'Z' por un arco de círculo que pase por el punto x indicado arriba, y toque en A' al flanco rectilíneo A'F'O; será mui fácil hallar el centro de este arco circular que se deberá terminar en x, chaflanando el diente como anteriormente se ha hecho. Este método, que debe prescribirse cuando se trate de una máquina que demande exactitud, puede emplearse en las máquinas de fuerza en que están arreglados los movimientos por medio de *volantes*; sobre todo cuando los dientes de la rueda están bastante próximos para que las porciones de perfil B_4X, A_4Y, que quedan despues del chaflanamiento, no excede de 4 o 5 centímetros.

846. Y tambien cuando un dibujo no tiene por objeto el servir para ejecutar una máquina en sus verdaderas dimensiones, sino solamente para dar a conocer la disposicion de sus diversas partes, entónces nos contentarémos con figurar los dientes describiendo un círculo que tenga por centro el medio ω del arco B_7A_8, y por radio a una de las dos distancias iguales ωB_7 u ωA_8: en este caso, este círculo nos da a la vez los dos perfiles opuestos B_7X_7 y A_8Y_8 con una aproximacion suficiente para la indicacion que nos proponemos.

847. En el depurado que presentamos, suponemos que la rueda pequeña O' es maciza, y se llama *un piñon*. La rueda grande O está calada, con el objeto de que sea mas lijera: N representa la *pina* que está religada por medio de los *brazos* P, P',... con el *cubo*: este está proyectado entre los dos círculos OQ y OS, el último de estos indica el vacío destinado para recibir el *árbol* de la rueda, y este árbol se fija al cubo por medio de dos *llaves* que se introducen en las escopleaduras T y T'. Finalmente, W es la *loriga* o anillo de hierro que rodea el estremo saliente del cubo, para reforzarle e impedir que se rompa.

848. *Observacion.* Si despues de haber construido este engargante, necesitásemos cambiar mas adelante las velocidades angulares, y qui-

siéramos conservar intacta la rueda O, sustituyendo a O' una nueva rueda O" de un radio diferente, sabemos (núm. 808) que sería preciso adoptar por perfil de cada diente de O", la envolvente del espacio que recorriese el contorno ZAF en la hipótesis en que el círculo O rodase sobre la circunferencia O". Pero como la porcion ZA de este contorno, es ya una epicicloide enjendrada por el rodamiento del círculo V' sobre el O, y hemos visto (núm. 828) que su envolvente era otra epicicloide producida por el mismo círculo V' rodandolo en el interior de la circunferencia O"; por consiguiente, esta epicicloide interior será la que reemplazará en el caso actual al flanco *af*; y en cuanto a la parte de radio AF, su envolvente será tambien (núm. 826) una epicicloide enjendrada por el rodamiento del círculo V sobre la circunferencia O". Y así es que el diente de esta nueva rueda no tendrá *flanco rectilíneo*; y todo su perfil se compondrá de dos arcos pertenecientes a las epicicloides producidas por los círculos V' y V que rodasen en el interior y esterior del círculo O": su trazado será, por consiguiente, ménos sencillo que de ordinario, pero presentará la ventaja de hacer que sirva la rueda O que está ya construida.

849. ENGARGANTE DE FLANCOS *simétrico, pero no recíproco*. La rueda grande O podria sola llevar dientes propiamente tales, es decir, salientes por la parte esterior del círculo primitivo $\alpha\beta$ miéntras que el piñon no tuviese sino flancos *ab, be,* dirijidos segun los radios, en el interior del círculo primitivo $\alpha'\beta'$. La estension de estos flancos la obtendrémos como en el núm 839, refiriendo el punto Z a *m* sobre la circunferencia V' por medio de un arco descrito desde el centro O, y trazando en seguida, desde el centro O' el arco de círculo *mfe*, prolongando despues estos flancos para formar una escopleadura terminada a escuadra en la circunferencia O'*g* cuyo radio debe a lo mas ser igual a la diferencia de las distancias OO' y OZ (núm. 843). En cuanto a la rueda O, en rigor no tendrá ni flanco ni vacíos; pero como siempre es prudente dejar un poco de juego con el fin de evitar el rozamiento que produciria un desvío accidental, se escoplea esta rueda en sentido de los radios hasta una profundidad de 1 o 2 centímetros indicada por el círculo GH. LAM. 67. FIG. 17.

850. En el caso actual, la rueda es la que deberá *mover* al piñon. Con efecto, vemos que la epicicloide AZ principia a tocar al flanco *af*

en el punto a, cuando este flanco coincide con la línea de los centros OO' y que depues de esta línea en sentido del movimiento, el contacto x con el radio O'a', se aproxima al centro O'; luego a la izquierda de OO', no tendrá el perfil A_2Z_2 ningun punto comun con el flanco O'a_2, este no será tocado sino por la rama de la epicicloide simétrica de A_2Z_2. De aquí resulta que cuando es la rueda la que mueve al piñon, nunca están trabados los dientes sino *segun la línea de los centros* OO', en sentido del movimiento; esto nos ofrece una ventaja importante para la práctica, como lo esplicarémos en el núm. 875. En la *fig.* 14 habia empuje tanto delante como detras de la línea de los centros, en atencion a que la rueda pequeña, estaba tambien armada de dientes salientes por la parte esterior del círculo primitivo $\alpha'\beta'$.

FIG. 18. 851. BARRA DENTADA *movida por una rueda tambien dentada.* Si en el engargante precedente, suponemos que la rueda O' adquiere un radio infinito, el círculo primitivo $\alpha'\beta'$ se cambiará en una recta tanjente a la circunferencia $\alpha\beta$ de la rueda O; y la rotacion de esta imprimirá un movimiento rectilíneo a la pieza recta XY, llamada *barra dentada,* que se mantiene en esta direccion por medio de canales o de *abrazaderas.* Sin tratar aquí de la razon de las velocidades angulares, una de las cuales es cero, será preciso dividir a la circunferencia $\alpha\beta$ en cierto número de partes iguales AA', A'A",.... y en seguida trasladar la lonjitud rectificada de una de estas divisiones sobre aa', $a'a''$....

El perfil AZ del diente de la rueda, deberá ser una *voluta* del círculo enjendrado por el rodamiento de la recta $\alpha'\beta'$ sobre la circunferencia $\alpha\beta$: porque en el caso actual esta recta es en lo que se convierte el círculo V' de la *fig.* 17, que tenia por diámetro el radio del círculo O', y que, en el caso presente, es infinito. Por la misma razon, los flancos de la rueda dentada serán las rectas ag, bh,.... perpendiculares a $\alpha'\beta'$, y los prolongarémos hasta que encuentren a una recta ghg' paralela a $\alpha'\beta'$ tirada a una distancia Og igual por lo ménos a OZ; o mas bien, estas rectas ag, bh,.... solo sirven para formar las escopleaduras necesarias para el libre paso de los dientes, porque los flancos de la barra dentada se reducen en la actualidad a *un solo punto.* Con efecto, siendo la tanjente $\alpha'\beta'$ normal (núm. 479) a todas las volutas AZ, A'Z', A"Z",.... lo es precisamente en los puntos a, a', a'',... en que se hallan los contactos de estos perfiles con los flancos ag, $a'g'$, $a''g''$:... Ademas, la rueda O, hablando

didad de la escopleadura, deberá estenderse hasta la circunferencia *ghg'* cuyo radio quedará determinado por el círculo *mZ*. La rueda *ducente* deberá ser la que lleva los dientes, por los motivos esplicados ya en el núm. 850, con el fin de que el empuje no se ejerza sino despues de la línea de los centros.

FIG. 21. 855. Si por el contrario se quisiese que la rueda pequeña O'α'β' llevase dientes y colocar los flancos sobre la grande αβ cuyo centro está ficticiamente representado en O (porque realmente cae fuera de los límites de la *fig.* 21), sería preciso para trazar el perfil *az*, describir un círculo VSA cuyo radio VA fuese la mitad de OA, y hacer rodar a este círculo V sobre la circunferencia α'β' que él envuelve, esto nos dará una epicicloide del jénero de la que hemos considerado en el núm. 477. En cuanto al flanco FAG, deberia estenderse desde A hasta G en la circunferencia GH'G' descrita con el radio OO' + O'*z*, con el fin de dejar paso libre al diente *azb*; y en seguida, se deberá prolongar hácia el centro desde A a F, para recibir el empuje del perfil *az*. Con efecto, si segun la regla jeneral del núm. 833, querémos hallar el punto de la involuta AO que venga a tocar al punto *z* de la envolvente *az*, será preciso, para conseguirlo, transportar el punto *z* a M sobre la circunferencia V, por medio de un arco *z*M descrito desde el centro O'; y en seguida, referir el punte M a F por medio de un arco MEF descrito desde el centro O. Y así, AF, A_2F_2,.... serán las únicas porciones de los flancos sobre que se ejercerá el empuje de los dientes, miéntras que el contacto *x* se avance de A_2 hácia F_2; de modo que siendo el camino total recorrido por este contacto mayor que en los otros casos, aumentará considerablemente el rozamiento.

Pero aun hai otro iconveniente mas grave, que resulta de la escopleadura que es preciso practicar en la rueda pequeña para dejar al flanco AF lugar de jirar libremente. Porque miéntras la revolucion de los dos círculos O y O' al rededor de sus centros inmóviles, la curba que el punto F recorre sobre el círculo pequeño móvil es la misma (núm. 809) que la que este punto describiria sobre el plano fijo de este círculo, si hiciésemos rodar la circunferencia αβ sobre α'β': luego esta curba es una epicicloide de nudo θλFμ*z* que vendrá a casar en *z* con el perfil *az*, segun lo hemos probado para un caso semejante en el núm. 841. Por consiguiente, será preciso vaciar la rueda O' segun el contorno Fλθ, con lo cual se

quitará una porcion pequeña del perfil *az*; de donde resultará que el diente *azb* no principiará a trabar sino un poco despues de la línea de los centros. Pero lo mas importante que hai en esto, es que la base del diente se debilitará de tal modo por esta escopleadura, que no presentará ya la resistencia suficiente; y por consiguiente, el sistema de engargante representado en la *fig.* 21 debe proscribirse en la práctica.

856. *El engargante interior no puede ser* RECIPROCO; es decir, que es imposible dar a cada rueda dientes y flancos a un mismo tiempo. Con efecto, si sobreponemos las *figuras* 20 y 21 de modo que coincidan los dos radios designados por O'*a*, verémos claramente que el perfil AZ quedará cubierto por el flanco AF, y que será preciso destruir este último para poder ejecutar el otro: así mismo, en la rueda O', el flanco *af* no puede coexistir con la escopleadura $a\lambda$F.

857. ENGARGANTE DE LINTERNA. Por este último nombre se espresa una especie de tambor compuesto de dos *rodajas* o planchas circulares, iguales, paralelas y reunidas por medio de cilindros rectos, llamados *husillos*, cuyas bases son los círculos *c*, *c*', *c*"; todos los centros de estos pequeños círculos están situados sobre una circunferencia $\alpha'\beta'$ que forma el *círculo primitivo* de esta especie de rueda, y la *fig.* 22 presenta un *corte* dado entre las rodajas por un plano paralelo a estas; por esta razon los círculos *c*, *c*', *c*",.... están cubiertos con raitas. Esta linterna se pone en movimiento por una rueda O cuyo *círculo primitivo* es $\alpha\beta$, jeneralmente los dientes de esta se trabajan separadamente, y en seguida se injieren en el cuerpo de la rueda: entónces se les da el nombre de *puntones*, y se trabajan de madera mui dura; los husillos que se gastan mas pronto con motivo del rozamiento, son algunas veces de hierro fundido. Este jénero de engargante no se emplea sino en las máquinas fuertes, en que no se requiere una gran exactitud en los movimientos; porque no presenta tanta suavidad y regularidad como el engargante de flancos. LAM. 67. FIG. 22.

Despues de haber elejido (núm. 836) dos números enteros *n* y *n*' que tengan entre sí la misma razon que los radios de las circunferencias $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$, dividirémos la primera en *n* partes iguales AA', A'A",.... y la segunda en *n*' partes tambien iguales *aa*', *a'a*",... de lo cual nos resultará tambien que AA' = *aa*'; señalarémos las bases de los dientes AB, A'B',.... iguales, cuando mas, a la mitad de una division AA'; tomando en seguida un arco *ac* menor que la cuarta parte de la division *aa*', em-

plearémos la cuerda de este arco para describir todos los círculos *c*, *c'*, *c''*,... que seran las bases de los husillos. Hecho esto, como el perfiil AZ debe ser la envolvente (núm. 808) del espacio que recorriese el círculo *c* en la hipótesis en que la circunferencia $\alpha'\beta'$ rodase sobre $\alpha\beta$ que permaneciese inmóvil, observarémos desde luego que el punto *c* describirá en este caso una epicicloide *cl* cuya construccion será fácil (núm. 471); luego, si de los diversos puntos de esta epicicloide y con un radio constantemente igual a la cuerda *ca*, describimos varíos arcos de círculo, bastaria trazar una curba $AZ\lambda$ que les fuese tanjente, para obtener el perfiil pedido por un medio mas espedito que la construccion por puntos indicada en el núm. 823.

858. Esta rama $AZ\lambda$ de la envolvente del círculo pequeño *c*, se prolongará en el interior de la circnferencia $\alpha\beta$ hasta un punto de retroceso indicado por ε' en la *fig.* 10 de la *Lám.* 65. Y como en la época en que la involuta tocase a la envolvente en este punto ε', el eje del husillo habria ya pasado de la línea de los centros OO', nada habria que se opusiese a que conservásemos esta prolongacion de $AZ\lambda$: pero, para mayor facilidad en la práctica, se termina este perfil en el punto δ' que corresponde a A en la *fig.* 22, que es en el que tiene lugar el contacto cuando este punto A ha llegado a la recta OO' (núm. 825). Y así, en los engargantes de linterna no se efectuará la trabazon de los dientes ántes de la línea de los centros,

859. En cuanto a la escopleadura necesaria para que los husillos se muevan libremente, podrá dársele por contorno el semi-círculo descrito sobre la cuerda del arco AB' como diámetro; pero jeneralmente nos contentamos con trazar la porcion de radio AG un poco mayor que la cuerda *ac*, y describir desde el punto O el arco de círculo GH' terminado tambien en el radio B'H'. Es cierto que la recta AG no es rigurosamente tanjente al perfil AZ, porque la normal comun a esta curba y a la opicicloide *cl* sería la cuerda *ac* (núm. 823); pero la arista saliente que resultaria en A seria mui obtusa, y ademas se podrá suavizar, salvo que el diente no principiára a trabar sino un poco mas tarde.

860. Es bueno chaflanar los dientes, pero sin dejar por esto de llenar la condicion del núm. 844, con el fin de que el movimiento se continúe sin *golpes*. Para esto, tirarémos la recta A*c'* que siendo normal (núm. 823) a la involuta *c'a'b'* y a la envolvente A'Z', determinará el

punto de contacto x: y entónces bastará tomar un radio un poco mayor que Ox para describir la circunferencia en que se principiará el chaflan. Si esta normal Ac' nos diese un punto x que estuviese encima de la seccion Z' de los dos perfiles simétricos, estarian los husillos demasiado separados para llenar la condicion del núm. 844; y en este caso, sería preciso aumentar su número n', haciendo tambien variar el número n de dientes de la rueda, de modo que la razon de los números n y n' permaneciese siempre la misma que la de los radios R y R' de los círculos primitivos $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$.

861. Barra dentada con husillos. Cuando el radio R' llega a ser infinito, el círculo primitivo $\alpha'\beta'$ se reduce a una recta, y la linterna se convierte en una barra dentada XY. En este caso, como la curba cl descrita por la recta $\alpha'\beta'$ que rueda sobre $\alpha\beta$ es una envolvente del círculo; la curba equidistante AZ será tambien una envolvente de $\alpha\beta$, enjendrada por el punto a; de modo que inmediatamente podrémos trazar esta última, sin recurrir a cl. La escopleadura AGH'B' se ejecutará lo mismo aquí arriba; y como siempre coincide la normal Ac con $\alpha'\beta'$, los puntos de contacto x de todos los perfiles de los dientes, se hallaráu constantemente sobre la línea $\alpha'\beta'$; luego, para chaflanar los dientes, bastará trazar una circunferencia con un radio un poco mayor que Ox. FIG. 23.

Barra dentada *con una* linterna. Si por el contrario supusiésemos en la *fig.* 22 el radio R infinito, la rueda O sería una barra dentada armada de dientes que conduciria a la linterna O'. En este caso, la curba cl sería una *cicloide* comun descrita por el punto c del círculo $\alpha'\beta'$ que rodase sobre la línea $\alpha\beta$ convertida en recta; y debiendo ser el perfil AZ una curba equidistante de esta cicloide, la construirémos por medio de arcos de círculo, como en el núm. 857. FIG. 22.

863. Engargante de voluta. Despues de haber determinado, como en el núm. 836, las divisiones iguales AA', aa', y tambien las bases de los dientes AB, ab, sobre los círculo primitivos $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$ cuyos radios están representados por R y R', trazarémos por el punto A una recta TAT' que forme un ángulo arbitrario con la línea OAO'; y desde los centros O y O', describiésemos dos nuevos círculos CD y C'D' tanjentes a esta recta TAT': los radios de círculo *ausiliares* serán evidentemente proporcionales a R y R'. Sentado esto, haciendo rodar la recta TAT' sobre la circunferencia CD, el punto A describirá una curba FAZ volu- LAM. 68. FIG. 24.

ta de este círculo; y rodando en seguida la misma recta sobre C'D', tambien el punto *a* describirá una voluta *faz* de esta última circunferencia. Pero hemos visto (núm. 829) que estas dos curbas FAZ y *faz* eran respectivamente envolvente e involuta; luego (núm. 808) estos son los perfiles conjugados que es preciso adoptar para los dientes, con el fin de que en un mismo tiempo pasen por la línea de los centros arcos iguales AA' y *aa'* medidos sobre los círculos primitivos.

864. Para chaflanar los dientes, cumpliendo con la condicion del núm. 844, observarémos que el punto *x*, en que actualmente encuentra la recta AT' a la voluta *a'z'*, es precisamente el pie de la normal bajada desde el punto A a esta curba; luego sera preciso tomar el radio del círculo del chaflanamiento por lo ménos igual a O*x*. Así mismo, para los dientes de la rueda O', deberá el radio análogo igualar o exceder un poco a la distancia O'*x'*. En cuanto a la escopleadura necesaria para dar paso a los dientes, despues de haber continuado la voluta ZAF hasta su oríjen F en el círculo ausiliar, prolongarémos esta curba (si fuese preciso) segun un radio FGO, hasta una profundidad tal que OG sea un poco menor que la diferencia que hai entre O'O y O'*z;* del mismo modo, para el vacio de la rueda O', debe ser el radio O'*g* del fondo de la escopleadura un poco menor que la diferencia entre OO' y OZ. Debemos tambien observar que el trabamiento de los dientes tendrá lugar tanto ántes como despues de la línea de los centros; a no ser que se reduzcan los dientes de la rueda *movida* O' a que no pasen del círculo primitivo segun la forma *gabh*; pero en este caso no sería ya recíproco el engargante.

865. Aun cuando háyamos dejado arbitrario el ángulo TAO=φ formado por la tanjente a los círculos ausiliares con la línea de los centros, es conveniente que este ángulo sea a lo ménos igual a los tres cuartos de un ángulo recto, con el fin de que las escopleaduras que deben ejecutarse en las dos ruedas no tengan demasiada profundidad. Ademas, harémos observar que este sistema de engargante es muchas veces preferido por los constructores modernos, a causa de las dos ventajas siguientes:

1ª El ancho de los dientes va siempre aumentando hasta la estremidad inferior EF, lo que hace que sean susceptibles de mayor resisten-

cia: miéntras que en la *fig.* 14, como los flancos converjen hácia el centro, queda algunas veces la base de los dientes mui debilitada.

2.ª Desques de ejecutado un engargante de voluta, podemos disminuir o aumentar en una cantidad pequeña la distancia OO' adoptada en un principio para la separacion de los ejes, sin que el sistema deje de funcionar regularmente, y esto es excelente en la práctica, en que es muchas veces mui difícil colocar los ejes rigurosamente a la misma distancia que la supuesta en el depurado. Para justificar esta latitud, figurémonos que en la *fig.* 24, háyamos bajado el centro O con os círculos $\alpha\beta$ y CD, y que hayan tomado las posiciones O_1, $\alpha_1\beta_1$, C_1D_1 (el lector los trazará fácilmente); si entónces tiramos una tanjente comun a las dos circunferencias C_1D_1 y CD', esta recta cortará a la línea de los centros en un punto A_1 que dividirá a la distancia O_1O' en dos partes cuya razon será aun la misma que la de los radios C_1D_1 y C'D'. Ademas, rodando esta nueva tanjente, alternativamente sobre estas dos circunferencias, el punto A_1 describirá las mismas volutas AZ y *az* que formaban ya los perfiles de los dientes del engargante primitivo. Luego el nuevo sistema funcionará como el anterior, y producirá velocidades angulares que guardarán la misma razon que en el primer caso.

266 Barra dentada *de dientes oblícuos.* Cuando en la figura precedente suponemos que el círculo primitivo $\alpha'\beta'$ adquiere un radio infinito, este círculo se cambia en una recta, y la rueda O' en una barra dentada OY de dientes oblícuos, cuyos perfiles *gaz*, *g'a'z'*,... son rectas perpendiculares a TT'; porque el círculo ausiliar C'D' que tiene por radio a la perpendicular bajada desde el centro O' sobre TT', viene a confundirse con esta última recta; y como al mismo tiempo se aleja el punto de contacto al infinito, si queremos hacer rodar la recta TT' sobre esta circunferencia dejenerada en línea recta, cada punto *a* describirá una perpendicular *gaz* a la línea TT'. Los contactos de los dientes conjugados estarán tambien todos colocados sobre la recta TT', en *a*, *x*, *x'*, pero el empuje se ejercerá segun una normal a *gaz*, es decir, segun TT' que es *oblícua* a la direccion XY del movimiento que debe tomar la barra dentada; de aquí resulta un rozamiento considerable en las *canales* que sostienen a esta pieza, y esta es la razon porque el sistema de la *fig.* 25 es ménos ventajoso que el de la barra dentada recta (*fig.* 18). Ademas, este último es solo un caso particular de la *fig.* 25, en que FIG. 25.

la recta arbitraria TAT' se ha tirado formando ángulo recto con AO.

FIG. 26. 867. *El engargante de voluta puede ser* INTERIOR; esto sucede cuando los dos círculos primitivos $\alpha\beta$ y $\alpha'\beta'$, están comprehendidos uno en otro; en este caso, despues de haber tirado, formando un ángulo arbitrario, la recta TAT', y haber trazado los dos círculos interiores CD, C'D', tanjentes a esta recta y concéntricos con O y O', será preciso aun hacer rodar a la recta TAT' subcesivamente sobre las circunferencias CD y C'D', para enjendrar los perfiles GAZ y *gaz* que serán siempre volutas de círculo. Pero si los dos puntos de contacto de esta tanjente comun TAT' estuviesen a un mismo lado respecto al punto A, las volutas volverian su convexidad en el mismo sentido; y de aquí resultaria un rozamiento mucho mas considerable, a causa de las lijeras imperfecciones inevitables en la ejecucion material de los perfiles. Y así, el sistema actual, y en jeneral todos los engargantes interiores, rara vez se emplean en la práctica.

Solo añadirémos que despues de haber prolongado la voluta *zaf* hasta su oríjen *f* sobre el círculo C'D', deberémos limitar la otra voluta ZA al punto *correspondiente* G; para hallar este, será preciso (núm. 834) referir el punto *f* a *f'* sobre la tanjente TAT', por medio de un arco de círculo descrito desde el punto O', y transportar en seguida el punto *f'* a G por otro arco de círculo descrito desde O. Por último, prolongar el perfil *zaf* segun un radio *fg*O, una cantidad suficiente para que la escopleadura permita que el diente de la rueda O se mueva libremente.

LAM. 68. FIG. 27. 868. CAMAS Y MAJADEROS. Sea ABZ el eje de un mango vertical que debe alternativamente subir la cantidad AB y volverla en seguida a bajar libremente abandonado a su propio peso. Para producir este movimiento rectilíneo, análogo al de la barra dentada del núm. 851, se emplea una rueda cuyo eje es horizontal y está proyectado en O, y su círculo primitivo $\alpha\beta$ es tanjente a la vertical AZ; se arma esta rueda de *camas* o dientes AX, A_2X_2, A_3X_3, bastante separadas unas de otras para dar tiempo al *majadero* de caer desde B a A ántes que lo alcance el diente siguiente. El perfil anterior de estas camas debe ser una voluta AXY del círculo $\alpha\beta$; porque esta curba tendrá la propiedad (núm. 851) de tocar constantemente al *resalto* horizontal M del majadero, en un punto que permanecerá sobre la recta AZ normal siempre a la voluta AXY, cualquiera que sea la posicion que tome esta curba durante la rotacion

alrededor del punto O. La estension exacta AX que será preciso dar a este perfil para que conduzca al resalto desde A hasta B, se obtendrá (núm. 834) describiendo con el radio OB un arco de círculo que vendrá a cortar a la voluta AX en el punto pedido X. Podria terminarse esta cama por el radio AO; pero para evitar falsos contactos, fuera de la vertical AZ, que hiciesen inclinar al mango y produjesen rozamientos dañosos, se escota la cama segun una curba pequeña AD arbitraria, la cual debe casar con el radio AO que es tanjente a AX.

869. En cuanto al resalto en que la cama ejerce su empuje en la direccion vertical AZ, es una pieza horizontal y rectangular que en las máquinas antiguas se fijaba delante del mango del majadero, como se ve *fig.* 28, y el vuelo EB debia ser igual a la diferencia entre los radios OA y OX de la *fig.* 27; pero como entónces el empuje de la cama pasaria mui léjos del centro de gravedad del majadero, resultaria de aquí un *par* de fuerzas cuya tendencia sería inclinar el mango, y producir un rozamiento considerable en las jimelgas G y *g* entre las cuales se mueve esta pieza. Para evitar este grave inconveniente, sobre todo cuando es grande el peso del majadero, se hace uso ordinariamente de la disposicion propuesta por *Montgolfier*, la misma que está representada en la *fig.* 29. Aquí el mango del majadero está formado de dos partes TM y T_2N reunidas por abrazaderas laterales J y *j*, de modo que el intervalo de M a N presenta un vacío en el cual puede penetrar el diente AX de la cama, y obrando en la cara horizontal M que hace oficio de resalto levanta mui bien el mango en la direccion de su eje ABZ para trasladarle de A a B. Llegado que sea a esta última situacion, no cae el majadero, porque aun tiene la cama que recorrer la mitad del espesor del resalto; pero este pequeño tiempo perdido será casi insensible, chaflanando el diente *ax* segun la curba indicada por los puntos redondos, esto lo debemos hacer siempre para que no haya partes agudas o aristas vivas que decenten las superficies o produzcan apuntalamientos.

870. Se hace tambien uso de otra combinacion indicada *fig.* 30, que se emplea en las minas en que deben los majaderos tener un peso considerable. El mango T_3 es de una sola pieza, pero se guarnece de dos resaltos laterales *m'* y *m"* sobre los cuales obran las dos ramas *x'* y *x"* (*fig.* 31) de la cama *ax* que entónces es ahorquillada. Su-

ponemos en la actualidad que las tres camas proyectadas verticalmente sobre ax, a_2x_2, a_3x_3 son ahorquilladas y sirven para hacer mover el mango T_3, en tanto que las camas de un solo diente AX, A_2X_2, A_3X_3 obran en el mango TMT_2; porque así se adoptan sobre el mismo árbol tantas ileras de camas cuantos majaderos hai que mover, teniendo cuidado de que las camas de diferentes séries correspondan a diversos radios OX y Ox, con el fin de que los muñones no tengan que sufrir al mismo tiempo el peso de todos los majaderos. Los tres dientes de cada série son de hierro colado y están vaciados auna con el anillo que reune sus bases; este anillo, poligonal en su interior, se acomoda sobre el árbol de la rueda que es de madera y presenta el mismo número de caras.

871. Para mantener los mangos de los mejaderos constantemente en la misma direccion vertical, dejándoles siempre la libertad de subir y bajar, se los sujeta entre dos piezas horizontales y paralelas (G, G') y (g, G'), que se llaman *jimelgas*, y estas están religadas entre sí por virotillos que impiden tambien al mango desviarse a derecha o izquierda en la direccion del eje O'O". Otro segundo órden de jimelgas (G_2, G") y (g_2, G") está colocado en la parte inferior, pero a una altura que no estorbe el curso del majadero. Los signos de figura de X que se ven en el depurado, indican, en el maderamen, las cabezas de las piezas o *las* secciones dadas perpendicularmente a las fibras de la madera.

LAM. 64 FIG. 8. 872. De las excentricas. En algunas máquinas se emplean una clase de ruedas cuyo contorno esterior no tiene por centro de la figura el centro del movimiento de rotacion, y cuyo objeto es hacer que alternativamente suba y baje una vara vertical AZ, pero gradualmente y no de pronto, como en el caso de los majaderos de que acabamos de hablar. Por consiguiente, este contorno forma una curba *excéntrica* que puede presentar muchas variedades, pero será suficiente que citemos un ejemplo, tal es el que se representa bajo el nombre de *curba en corazon*. Sea AA_4 la altura a que debe subir la vara: despues de haber dividido este intervalo en partes iguales, por ejemplo en 4, harémos lo mismo con la semi-circunferencia descrita con el radio OA_4; y en seguida, tomarémos sobre los diversos radios O1, O2, O3, las distancias

$$OB=OA_1,\ OC=OA_2,\ OD=OA_3,\ OE=OA_4,$$

y la curba ABCDE, unida a la rama simétrica A'B'C'D'E', compondrá

la excéntrica pedida. Con efecto, como la vara AZ se mantiene en la misma direccion vertical por medio de las abrazaderas *m* y *n* cuando se haga jirar la rueda al rededor de su eje O, y cuando el radio vector haya tomado la posicion OA_1, el empuje oblícuo que ejerce contra la vara habrá hecho subir a esta, y por consiguiente habrá transportado su pie A a A_1; en seguida, este último punto coincidirá con B. Así mismo, cuando el radio OC haya llegado a la posicion vertical, el pie A se hallará trasladado a A_2, y así en seguida hasta que OE coincida con OA_4; continuando el movimiento de rotacion en el mismo sentido, la rama ED'C'B'A dejará volver a caer a la vara gradualmente desde A_4 hasta A.

873. No se hace uso de este sistema sino en el caso de no ser necesaria le accion de una gran fuerza contra la vara; y aun entónces es preciso tambien tratar de disminuir los rozamientos causados por el empuje oblícuo. Para esto se guarnece el pie de la vara con un *tejo* móvil al rededor del eje horizontal A, y se adopta por contorno de la rueda una curba *abcded'b'a* que esté equidistante de la excéntrica primitiva; esta nueva curba se traza haciendo que sea tanjente a los arcos de círculos descritos de los diversos puntos de ABCD... con un radio constantemente igual al del tejo. De este modo, el movimiento rectilíneo de la vara permanece el mismo que en el primer caso, y en lugar de un rozamiento de resbalar, no hai sino un rozamiento de rodar que es mucho menor.

874. Cuando se quiere evitar la variacion de velocidad un poco precipitada que tiene lugar en los puntos estremos A y A_4, se divide el intervalo AA_4 en partes desiguales, por medio de una semi-circunferencia descrita sobre esta distancia como diámetro, y se divide en arcos iguales; las ordenadas de este semi-círculo nos dan los puntos A_1, A_2, A_3,.... y la curba ABCDE, construida como arriba, no presenta ya puntos salientes. Dejamos al lector el cuidado de trazar la excéntrica en esta nueva hipótesis.

875. Observaciones. Hemos hecho observar diversas veces que en ciertos sistemas de engargante, el empuje de los dientes no tenia lugar sino *despues de la línea de los centros*, en sentido del movimiento; miéntras que en otro sistema, habia dientes que se trababan *ántes de la línea de los centros*. Es importante que hagamos esta distincion, a causa de los graves inconvenientes que muchas veces presenta el segundo de los dos casos.

En primer lugar, debemos acordarnos que en todos los engargantes examinados arriba, no solo ruedan los perfiles de los dientes unos sobre otros, sino que tambien hai un resbalamiento (núm. 817), que es algunas veces bastante considerable, segun lo hemos visto en los números 833 y 834. De aquí resulta un rozamiento que es proporcional a la presion ejercida por los dientes uno sobre otro, que absorbe una parte de la fuerza motriz; pero esta pérdida de fuerza es mas considerable en dos dientes trabados ántes de la línea de los centros que en dos dientes análogos que estén en contacto despues de esta misma línea. Esta proposicion, que está confirmada por la esperiencia, se establece por medio de principios mecánicos y de cálculos, cuya esposicion nos desviaria demasiado del fin gráfico de esta obra; esta es la razon porque nos contentarémos con justificarla por medio de las consideraciones siguientes.

LAM. 68. FIG. 32. 876. Concedamos que en la *fig.* 32, sea O' la rueda ducente, y que voltee en la direccion que indica la flecha φ". Puede suceder, a causa del pequeño número de dientes, o ya por alguna irregularidad en su ejecucion, que en cierta época el empuje de las dos ruedas no se ejerza sino por un solo punto *m* que corresponda al último elemento del perfil *a"z"* : y entónces la punta *z*, o mas bien la arista viva que se proyecta en este punto, será comparable al filo de unas tijeras cuyas hojas fuesen simétricas con relacion al plano diametral O'*z*". Pero miéntras que el movimiento tiene lugar en sentido de φ", el contacto marcha de *m* hácia A"; y como el ángulo O'*z*"A" es agudo, no hace la tijera sino frotar sobre la superficie G"A"*z*" y pulimentarla sin decentarla. Pero si cambiamos el juego, y hacemos que O sea la rueda ducente, y jire en sentido de la flecha φ, en tal caso el filo de la tijera marchará de *m* hácia G" al lado del ángulo obtuso O'*z*"G": por consiguiente, se dirijirá a penetrar en la superficie A"G", y la decentará lijeramente causando mucha mas resistencia al movimiento de rotacion del engargante; y aun algunas veces, a influjo de una gran presion, penetrará la arista *z*" bastante adentro en la superficie A"G", para no poderse en seguida desprender, y habrá un apuntalamiento que subitamente detendrá a la máquina o que hará que uno de los dientes así introducido se rompa. Por esto es que es preciso chaflanar los dientes, y tener tambien cuidado de suavizar las aristas que resulten de este truncamiento.

877. Pero aun cuando se hayan tomado todas estas precauciones,

quedan siempre en la madera o en la fundicion que se ha hecho para formar los dientes, asperezas inevitables; y estas asperezas producen, aunque de un modo ménos pronunciado, efectos análogos a los que hemos descrito en el número precedente. De todo lo cual debemos concluir, en conformidad con la esperiencia, que el rozamiento y la pérdida de la fuerza motriz son siempre mas considerables en dos dientes que se empujan ántes de la línea de los centros, que en aquellos que están en contacto despues de esta línea. Ademas, en el primero de estos casos, puede haber apuntalamiento, aun cuando esté chaflanado el diente $a''z''b''$, si por alguna lijera irregularidad sucediese que el empuje de las dos ruedas no tuviese lugar sino en el último elemento del perfil $a''z''$ que hemos conservado, y fuese la presion considerable. Y así, podemos sentar este principio jeneral: en todo engargante *es preciso*, miéntras se pueda, *evitar que los dientes principien a trabarse ántes de la línea de los centros.*

878. El primer medio para llenar esta condicion, sería suprimir en una de las ruedas, en la O', por ejemplo, todas las porciones de dientes que estuviesen fuera del círculo primitivo $\alpha'\beta'$, como lo enseñan las *figuras* 17, 18, 20, 22 y 23; y exijir que la rueda O fuese siempre la rueda ducente, ya fuese el movimiento hácia la derecha, o ya hácia la izquierda, porque vemos mui bien que en este caso nunca se ejercia el empuje sino despues de la línea de los centros. Podríamos conseguir esta misma ventaja en el engargante de voluta de la *fig.* 24, si redujésemos los perfiles de los dientes de O' a las partes interiores *gfa*, *heb*...: Los engargantes de este jénero, en que sola una de las ruedas es ducente, se llaman *no recíprocos*:

879. Pero esta disposicion presentaria inconvenientes en las grandes máquinas de movimiento rápido y resistencias mui desiguales, en que están regularizadas las velocidades por medio de volantes. Porque entónces, en razon de las pequeñas variaciones periódicas que padece la velocidad, y con motivo del juego que debe siempre haber entre los dientes (núm. 837), continuando cada una de las dos ruedas, marchando siempre en el mismo sentido, es unas veces ducente y otras conducida; pero para llenar este doble empleo, deben ámbas estar armadas de dientes salientes fuera de los círculos primitivos, como se ve en la *fig* 32, cuyo engargante se llama *recíproco*. Y así, para conservar esta ventaja sin recaer en el inconveniente de tener contactos, tanto delante como detras de la línea de los

centros, será preciso *desgalgar* los dientes *por el lado opuesto a aquel por donde debe efectuarse el movimiento*; es decir, quitar las partes que en la *fig.* 32, hemos cubierto de raitas; pero el sistema no podrá funcionar sino en solo un sentido, que es el que está indicado por las flechas φ y φ' (*).

FIG. 32. 880. *Límite del número de dientes.* Al empuje de un par de dientes, debe sin interrupcion ninguna suceder el empuje de otro par, a fin de evitar los choques retrógrados que se llaman *saltos*; por consiguiente, es preciso que en el instante en que los dos dientes GAZ y *gaz* principian a tocarse en A sobre la línea de los centros, estén aun trabados los dientes G'A'Z' y *g'a'z'* del par precedente. Pero bajando la normal A*x* sobre el perfil *a'g'* (ya sea rectilíneo o no), sabemos que el pie *x* de esta normal debe ser (núm. 810) el punto de contacto de la involuta *a'g'* con la envolvente A'Z': si este punto *x* se halla debajo de la cúspide Z' del diente de la rueda O, quedará satisfecha la condicion pedida: sino, habrá saltos, y para evitarlos, será preciso aproximar los dientes aumentando su número *n* y *n'* que deberémos elejir siempre, de modo que sean proporcionales a los radios R y R' de los círculos primitivos. De aquí se sigue que el número *n'* de dientes de la rueda pequeña admite un *mínimo* que varia con la naturaleza de los perfiles y la razon de las velocidades angulares; tratando de determinar por medio del cálculo la posicion de la normal A*x*, M. *Savary* ha hallado los límites siguientes, en los cuales μ representa la razon $\frac{R'}{R}$ que siempre es menor que la unidad.

En un engargante de flancos . . . . . $n' = o > 10(1+\mu)$
En un engargante de linterna . . . . . $n' = o > 7+4\mu$
En un engargante de voluta . . . . . $n' = o > 16+2\mu$

No presentamos los cálculos que conducen a estos resultados, porque pueden, en cada ejemplo, reemplazarse con ventaja por la verificacion gráfica citada mas arriba, la cual no exije sino el trazado provisorio de los dos dientes.

(*) *Tanto este procedimiento como las observaciones precedentes, son sacadas de las lecciones que M. Savary habia redactado para su curso de Máquinas en la Escuela Politécnica.*

CAPITULO V.

De los engargantes cónicos.

881. Se llama así al sistema de dos ruedas cuyos ejes en lugar de ser paralelos van a encontrarse bajo un ángulo cualquiera. Sean Z'O' y Z'*o*' dos de estos ejes, situados en el caso actual en el plano vertical del depurado; principiarémos por trazar en el ángulo O'Z'*o*' una recta Z'A', de modo que las dos perpendiculares bajadas de uno cualquiera de sus puntos a los dos ejes, estén en razon inversa de las velocidades angulares (núm. 805) que quiera dárseles a las dos ruedas, es decir, en razon inversa del número de vueltas que deben dar las ruedas en el mismo tiempo; como por la cuestion se nos dan estos números, la determinacion gráfica de la recta Z'A' es mui fácil, para que nos detengamos mas sobre esto. En seguida, segun la magnitud mayor o menor que queramos dar a las dos ruedas, así tambien elejirémos sobre la recta Z'A' un punto A' mas o ménos distante de Z', desde el cual bajarémos a los ejes las perpendiculares A'O' y A'*o*'; estas serán los radios de los *círculos primitivos*, que servirán de bases a dos conos de revolucion Z'A'O' y Z'A'*o*', cada uno de los cuales será, por decirlo así, el núcleo de una de las ruedas. LAM. 69. FIG. 1.

882. Para hallar ahora entre las velocidades angulares la razon dada arriba, será evidentemente suficiente hacer voltear los dos conos primitivos al rededor de sus ejes inmóviles, de modo que las circunferencias A'O' y A'*o*' adquieran *velocidades absolutas* que sean iguales (núm. 806). Pero para llenar esta condicion por medio del empuje de dos dientes correspondientes, es preciso terminar estos dientes por dos superficies cónicas que tengan su cúspide comun en Z', y sea una de ellas la *envolvente* del espacio que recorra la otra, si dejando enteramente inmóvil al cono Z'A'O', hacemos *rodar* sobre él al cono Z'A'*o*' que arrastrará consigo a la superficie de su diente; porque aplicando a este caso los detalles que hemos dado en los números 808 y 809, verémos claramente que este *rodamiento* trae a los dos conos primitivos a

la misma *situacion relativa* que si hubiesen jirado al rededor de sus ejes inmóviles, y de modo que dos puntos cualesquiera de las circunferencias A'O' y A'*o*' recorriesen *arcos iguales*.

FIG. 1. 383. En virtud de este principio, la solucion mas sencilla la obtendrémos formando : 1.° el diente de la rueda pequeña con un plano tirado por el eje Z'*o*' que recibe el nombre de *flanco*; 2.° el diente de la rueda grande, con una superficie cónica que constantemente sea tanjente a este flanco, en todas las posiciones que ocupa miéntras dura el rodamiento del cono primitivo Z'A'*o*'; y vamos a ver que este cono *envolvente* del flanco, tiene por base a nna epicicloide esférica.

En el plano del círculo primitivo cuyo radio es A'*o*' (a cuyo plano llamarémos el *plano ausiliar* de proyeccion, que en el caso presente está abatido con el círculo segun A'G*e*'), tracemos una circunferencia A'F*o*', que tenga por diámetro al radio A'*o*', y hagámosla rodar subcesivamente: 1.° sobre el círculo primitivo cuyo radio es O'A', conservando siempre entre sus planos la inclinacion señalada por el ángulo *o*'A'X; 2.° en el interior y en el plano del círculo primitivo que tiene por radio a *o*'A'. Durante el primer movimiento de rotacion, un punto cualquiera de la circunferencia móvil, el que, por ejemplo, está abatido en *m* sobre el plano horizontal, describirá una epicicloide esférica, cuya proyeccion horizontal DM sabemos ya hallar (núm. 482), y cuyo cono jenerador A'S'*o*' se obtiene levantando por el centro *ω*' la perpendicular *ω*'S' al plano del círculo móvil; de modo que esta epicicloide está enteramente situada sobre la esfera descrita con el radio S'A'; ademas, si abatimos el punto (M, M') a F sobre el plano ausiliar, sabemons (núm. 470) que la recta proyectada segun (A'M, A'M'), y cuya verdadera posicion en el plano ausiliar es A'F, es una normal a la epicicloide en el punto (M, M'). Por otra parte, miéntras la rotacion del círculo A'F*o*' sobre A'G*e*', el mismo punto jenerador (M, M') o F describirá una epicicloide rectilínea (núm. 475) que será precisamente la recta *o*'FG. Esto supuesto, si tiramos un plano por esta recta *o*'FG y por el eje Z'*o*', decimos que este plano meridiano será tanjente al cono que tenga por cúspide al punto Z' y por base a la epicicloide proyectada sobre DM. Con efecto, si observamos que el plano meridiano en cuestion tiene por traza vertical a Z'*o*'X, y por traza sobre el plano ausiliar a la misma línea *o*'F, conocerémos fácilmente que este plano es perpendicular a la

recta abatida segun A'F, y proyectada segun (A'M, A'M'); y como esta recta es normal a la epicicloida, es cierto que el plano meridiano Z'*o*'F contiene a la tanjente de esta curba en el punto (M, M'); y como tambien pasa por la cúspide Z' del cono epicicloidal, será por consiguiente tanjente a esta superficie en todo el largo de la jeneratriz que reune la cúspide Z' con el punto F levantado a (M, M').

Por otra parte, este contacto continuará existiendo al largo de una jeneratriz variable sobre el cono epicicloidal, miéntras que el cono primitivo Z'*o*'A' rueda sobre el cono Z'O'A'; porque en todas las posiciones del punto F sobre el círculo pequeño, las dos cuerdas A'F y *o*'F, $A'F_1$ y $o'F_1$.... serán siempre perpendiculares una a otra. Luego el plano Z'*o*'F', es mui propio para formar el *flanco* de un diente de la rueda Z'*o*'A', porque constantemente será tocado y conducido por el diente que termina al cono epicicloidal (Z', MD) del mismo modo que si el cono primitivo Z'*o*'A' rodase sin resbalar sobre el otro cono Z'O'A'; lo cual completamente satisface a la condicion del núm. 882.

884. Réstanos hallar la estension exacta que debe tener el flanco para corresponder a un arco limitado DM de la epicicloide. Al efecto, abatamos el flanco Z'*o*'F sobre el plano vertical, moviéndolo al rededor del eje Z'*o*': en este movimiento, el punto F describirá el arco de círculo F*f* cuyo centro está en *o*'; y la recta Z'*f* será el abatimiento de la jeneratriz de contacto que termina en el punto (M, M'). Pero en la época en que el flanco pasase por el oríjen D de la epicicloide, tocaria al cono epicicloidal segun la jeneratriz proyectada sobre O'D, la que evidentemente se abatirá sobre Z'A'. Luego el ángulo A' Z'*f* mide, en su verdadera magnitud sobre el flanco, el espacio angular que ha conducido y tocado el diente epicicloidal, miéntras que el flanco ha rodado desde el punto D hasta (M, M'). Por consiguiente, a esta parte angular A'Z'*f* es a la que debemos restrinjir la ejecucion del flanco, si el diente está reducido a la porcion del cono que corresponde al arco DM. FIG. 1.

885. Pero este procedimiento no sería de cómoda aplicacion en el depurado jeneral que va a seguir, en atencion a que no conocerémos entónces inmediatamente sino la proyeccion horizontal M de la estremidad del arco DM, con la esfera Z'A'P'*o*', sobre la cual está situada la epicicloide. En este caso, será preciso abatir el punto M a R, proyectar este último a P' sobre el círculo máximo de la esfera, y bajar sobre el

eje Z'O' la perpendicular P'K' que representará el paralelo sobre el cual debe estar situado el punto de la epicicloide proyectado en M. Este paralelo P'K' cortará entónces al círculo jenerador que tiene por diámetro a A'*o*', segun una cuerda proyectada en el punto M'; abatirémos esta cuerda segun M'F que nos dará a conocer al punto F, del cual deducirémos el *f* y todo lo demas como aquí arriba.

886. *Trazado del depurado.* Sean Z'O' y Z'*o*' los ejes de dos ruedas, situados en el plano vertical de proyeccion; sean tambien A'O' y A'*o*' los radios de los *círculos primitivos* que determinarémos como se dijo en el núm. 881; estos dos círculos están representados sobre los dos planos (*fig.* 3 y 4) perpendiculares a los ejes, por las circunferencias OA y *oa*. Despues de haber elejido dos números enteros *n* y *n*' que estén entre sí en la misma razon que los radios primitivos, dividirémos la circunferencia OA en *n* partes iguales AA_1, A_1A_2,.... y a la circunferencia *oa* en *n*' partes iguales aa_1, a_1a_2,.... y precisamente sucederá (núm. 836) que las divisiones AA_1, y aa_1, serán de la misma lonjitud absoluta. En seguida, subdividirémos cada uno de estos arcos en dos partes, una de las cuales AB, destinada a formar la base del diente, sea menor que la otra BA_1 cerca de un *duodécimo* del arco total AA_1 (*véase* núm. 837).

FIG. 2 Y 3. 887. Sentado esto, en el plano del círculo primitivo A'*o*', y sobre este radio como diámetro, describirémos un círculo que aquí está abatido segun ω"A; en seguida, hagámosle rodar sobre la circunferencia O'A', manteniendo entre sus planos la inclinacion primitiva O'A'*o*'. En este movimiento, el punto (A, A') del círculo móvil describirá una epicicloide situada sobre la esfera que tiene por radio a *s*'A'; y para construir esta curba sin mudar de lugar al contacto actual A de los dos círculos, tomarémos dos arcos iguales A*m* y AI, y de aquí deduciríamos (núm. 482) las proyecciones M y M' de un punto de la epicicloide que tuviese su oríjen en I; pero como el oríjen está realmente en A, verémos claramente que para obtener un punto μ de la proyeccion horizontal Aμλ de la epicicloide pedida, será suficiente tomar el arco ρμ igual a RM. Hecho esto, el cono que tenga por base a esta epicicloide y por cúspide al punto (Z', O), formará (núm. 883) el diente que principia en (A, A'); pero nos queda que hallar las intersecciones con las dos superficies cónicas inferior y superior que terminan el núcleo de la rueda, del cual no hemos hablado aun.

888. Tiremos por el punto A' una recta indefinida A'Q', de modo que forme con A'Z' un ángulo un poco mayor que 90°; en seguida, y despues de haber marcado la lonjitud A'α' que se quiere dar a los dientes; tirémos la recta α'V' paralela a A'Q', y hagamos jirar estas dos paralelas al rededor del eje vertical (O, O'Z'); de este modo producirémos dos conos de revolucion que terminarémos en dos círculos horizontales Q'Q" y V'V" bastante separados para que los sólidos que comprendan presenten una resistencia suficiente; a este sólido es al que se llama *tirante*, y algunas veces está vacío, como en la *Lám.* 66; en tanto que la parte comprehendida entre los dos conos descritos por A'Q' y α'V' forma la *corona*, en esta están tallados los dientes y los huecos, y deberá prolongarse hasta cierto límite Z'N'P' dependiente del vuelo que queramos dar a los dientes, segun esplicarémos mui pronto (núm. 890).

En cuanto a la rueda pequeña, tirarémos la recta A'q' en una direccion poco mas o ménos simétrica con A'Q' respecto a la linea A'Z'; en seguida, desde el punto α' tirarémos α'v' paralela a A'q', y terminarémos los dos conos que estas paralelas describirán al rededor de Z'o', por los dos círculos del tirante v'v" y q'q". Finalmente prolongarémos estos mismos conos hasta el límite Z'n'p', que ahora vamos a enseñar a conocer para el vuelo de los dientes de esta segunda rueda.

889. Volvamos ahora al cono epicicloidal que tenia su vértice en (O, Z') y por base la epicicloide proyectada sobre A$\mu\lambda$, e indaguemos la curba ACL segun la cual se proyecta su interseccion con el cono inferior desctito por la revolucion de la recta A'Q'. Como esta epicicloide está situada sobre la esfera cuyo radio es s'A', si cortamos a esta superficie y a los dos conos de arriba con un plano vertical, como el Oλ, y le abatimos sobre el plano vertical haciéndole jirar al rededor del eje (O, O'Z'), veremos que el punto λ se transportará a λ', y que Z'λ' será el abatimiento de la jeneratriz del cono epicicloidal; luego, prolongando esta recta hasta L', en que corta a la jeneratriz Q'A'P', y conduciendo por medio de un arco de círculo el punto L' a L sobre Oλ', este último punto L pertenecerá a la proyeccion pedida ACL.

890. De aquí deducirémos la curba BD simétrica con AC respecto a la *línea media* del diente, sobre la cual irian a encontrarse estas curbas; pero como prolongándolas de este modo, se cortarian las dos caras cónicas del diente segun una arista viva, que es lo que debemos evitar con

el mayor cuidado (números 843 y 876); es esta la razon de *chaflanar* el diente, trazando un arco de círculo PCD situado un poco mas abajo que el punto de seccion de las curbas AC y BD, y de aquí resulta una nueva cara cónica que tiene por cúspide al punto (Z', O) y por base un arco de la circunferencia (PCD, P'P"). Este círculo del chaflanamiento es el que determina el límite de que hemos hablado en el núm. 888; y la verdadera medida del vuelo que presentan los dientes sobre el cono primitivo Z'A'O', está espresado por el ángulo A'Z'P'.

El cono superior de la corona, descrito por la revolucion de la recta α'V', estará cortado por las caras cónicas del diente, segun las curbas $\alpha\gamma$ y $\beta\delta$, que evidentemente son *semejantes* con AC y BD, porque las jeneratrices α'V' y A'Q' son paralelas; de modo que podremos trazar estas curbas por medio de radios vectores proporcionales.

891. En cuanto a la rueda pequeña, despues de haber trazado un círculo horizontal sobre (OA, O'A') como diámetro, haremos rodar el cono recto S'A'Ω', sobre el cono S'A'o'; el punto (A', a) del círculo móvil describirá una epicicloide situada sobre la esfera del rádio S'A', y cuya proyeccion $a\mu$' construirémos sobre el plano auxiliar de la *fig.* 4; en seguida, nos figurarémos un cono que tenga por base a esta epicicloide y por cúspide al punto (Z', o), indagarémos la interseccion de este cono epicicloidal con el cono de la corona descrito por la revolucion de la recta A'q' al rededor del eje Z'o', que nos dará a conocer a la proyeccion ac del contorno del diente. De aquí deducirémos por simetría las diversas curbas b_1d_1, a_1c_1,...., que cortarémos, ántes de su encuentro, con el círculo de chaflanamiento pd_1c_1, este nos dará a conocer al punto p' y al vuelo A'Z'p' que presentarán los dientes de esta rueda al esterior del cono primitivo Z'A'o'. No harémos sino indicar estas varias operaciones, porque todas son semejantes a las que hemos ejecutado con la primera rueda.

Observacion. Aun cuando el vuelo del diente tenga por límite riguroso a la recta Z'p', será bueno, para dejar algun juego a la máquina, el trazar otra recta Z'p" un poco mas desviada del eje, y considerar a esta última como el límite ficticio del diente, cuando de aquí a poco tratemos de determinar la estension de los flancos y de las escopleaduras de la rueda grande.

892. *Límites de los flancos.* Hemos visto en el núm. 888 que los flan-

cos de la rueda grande, que serán conducidos por los dientes de la pequeña, son los planos verticales OA, OA_1, OA_2,....; pero para determinar la parte útil de estos planos, es decir, la que subcesivamente es tocada por la porcion de cono epicicloidal correspondiente al arco finito *ac*, será preciso recurrir al método del núm. 885. Y así, desde el punto *p*" en que la jeneratriz estrema Z'*p*" del cono epícicloidal encuentra al círculo máximo O'*p*"A' de la esfera que contiene a la epicicloide en cuestion, bajemos al eje Z'*o*' la perpendicular *p*"*k*'; esta cortará al diámetro O'A' del círculo jenerador en el punto 2 que proyectarémos a 3 sobre la circunferencia de este círculo; abatirémos el punto 3 a 4 sobre el plano vertical, y la recta Z'*4* que prolongarémos hasta F', en que encuentra al cono inferior de la corona, nos dará a conocer la parte angular A'Z'F' del flanco que es la única conducida por el diente correspondiente al arco *ac*. Sin embargo, como la recta Z'F' encuentra tambien al cono superior de la corona en el punto φ', debemos decir que la magnitud exacta del flanco, nos la da el trapecio A'α'φ'F', cuyos ángulos F' y φ' nos darán sobre el plano horizontal las circunferencias en que debemos terminar los costados de los flancos AF, αφ, BE,....

Respecto a la rueda pequeña, hallarémos de un modo semejante los lados de los flancos *af*, *be*.... operando sobre la jeneratriz Z'P' del cono epicicloidal que forma el diente de la rueda grande.

893. *Límites de las escopleaduras*. En lugar de hacer jirar a las dos ruedas al rededor de sus ejes inmóviles, podemos, segun el principio del núm. 809, dejar al cono Z'A'O' enteramente fijo, y hacer rodar sobre el al cono Z'A'*o*', que llevará consigo al diente correspondiente al arco *ac*. Miéntras esta rotacion, la arista estrema Z'*p*" del diente, enjendrará una superficie cónica que tendrá su cúspide en Z', y por base a la epicicloide alongada descrita por el punto *x*' en que esta arista va a cortar al plano del círculo móvil A'*o*'; y las intersecciones de esta superficie con los dos conos que terminan la corona de la rueda grande, indicarán evidentemente los límites de la escopleadura que debe practicarse para que el diente de la rueda pequeña pueda moverse libremente.

Con el fin de construir sin confusion esta epicicloide alongada que FIG. 275. se hallará toda ella sobre la esfera *x*'*y*' descrita con el radio Z'*x*', transportémos el triángulo Z'A'O' a la situacion Z"A"O", y trazando la recta A"*x*" igual y paralela a A'*x*', tendrémos las proyecciones *x*" y *x* del

punto jenerador cuando ha llegado al plano vertical; ademas, el círculo $x''y''$ descrito con la distancia $Z''x''$ por radio, representará la esfera que contiene a la epicicloide que buscamos. Esto supuesto, si trazamos el círculo A"B" con el radio O"A", y el círculo A"b" con un radio o''A" elejido igual o'A', este último será el abatimiento del círculo móvil que debe rodar sobre el otro; de modo que tomando dos arcos iguales A"M=A"m, y prolongando el radio $o''m$ una cantidad mG igual a A"x", el punto G será el abatimiento, y g, g', las proyecciones del punto jenerador cuando la rotacion haya hecho recorrer el arco A"M, si el oríjen de esta rotacion estuviese en M; pero como este oríjen está verdaderamente en A", verémos que será preciso trazar la circunferencia $gihl$ y tomar el arco gi desde h a l para obtener un punto de la proyeccion lx de la epicicloide pedida.

Es preciso que ahora nos imajinémos un cono que tenga su cúspide en Z" y por base a la epicicloide proyectada sobre lx, y hallemos su inter seccion con el cono inferior de la corona de la rueda grande, la que tendrá por jeneratriz sobre la *fig.* 5, a la recta A"Q" tirada paralelamente a la A'Q' de la *fig.* 2. Desde luego, la jeneratriz Z"x" del cono epicicloidal, nos dará por su encuentro con A"Q" un punto (X", X) de la interseccion pedida. Considerémos en seguida la jeneratriz arbitraria proyectada sobre O"l, y abatâmosla sobre el plano vertical: como el punto de la epicicloide proyectado en l está a la misma altura que g', dicho punto se transportará a k' sobre la esfera $x''y''$; por consiguiente, la jeneratriz estará abatida segun Z"k', y entónces cortará a A"Q" en el punto (r', r); de modo que no habrá mas que restablecer, por medio de un arco de círculo, el punto r a L sobre Ol, para obtener un punto de la curba E"LX segun la cual se proyecta horizontalmente la interseccion de los dos conos indicados aquí arriba.

894. Esta curba E"LX es la que será preciso transportar a la *fig.* 3 colocándola sobre EH, teniendo cuidado de situar el punto E" (que vamos a enseñar a determinar) en la estremidad E del flanco BE, y el vértice X sobre el círculo *límite* THG, el cual se deduce del punto T' en que encuentra a la corona de la rueda la arista Z'$p''x'$. En cuanto al punto E" de la *fig.* 5, si tenemos idea clara de la rotacion del cono primitivo Z'A'o' sobre el cono inmóvil Z'A'O', reconocerémos fácilmente que es preciso prolongar el círculo B"A" una cantidad A"U"

ma jeneratriz, cuyos puntos nos los da el trazado mismo de los cojinetes.

897. *Observacion.* Respecto a las entalladuras, hemos querido esplicar el método riguroso que servirá para quitar el sólido *mínimo*, y en virtud de esto, dejar a los dientes la mayor resistencia posible; pero en la práctica, para no aumentar las dificultades que en la ejecucion presenta este engargante, nos contentamos con determinar los círculos límites THG y OY por medio de dos puntos de seccion T' y θ', señalados sobre el plano vertical de la *fig.* 2, y se prolongan en línea recta los lados de los flancos BE, AF, ϛε,... hasta estas dos círcunferencias límites; o bien, se casan sus estremidades con estas circunferencias por medio de una pequeña curba arbitraria, pero visiblemente situada fuera del límite riguroso EH. Esta simplificacion, que siempre deberémos emplear, no perjudica en nada a la marcha regular del engargante, pero no es así para la siguiente.

898. *Método aproximativo.* Para evitar la dilacion y dificultades que presenta el trazado de las epicicloides esféricas, muchos constructores se toman la libertad de sustituirles las epicicloides planas, que determinan del modo siguiente. Despues de haber fijado los radios primitivos A'O' y A'*o*', tiran por el punto A' y perpendicularmente a la jeneratriz Z'A' un plano que nosotros llamarémos *plano ausiliar*, y que va a cortar a los ejes de las ruedas en dos puntos que espresarémos por O_2 y o_2; en este plano ausiliar describen dos círculos con los radios O_2A' y o_2A', y operan como si estas dos circunferencias debiesen rodar una sobre otra, esto no se aleja mucho de la verdad, a lo ménos en el corto intervalo en que se ejerce el empuje del mismo diente.

Y así, despues de haber abatido el plano ausiliar con las dos circunferencias que contiene, referirémos a estas las divisiones iguales marcadas sobre los círculos primitivos, y construirémos los perfiles de un diente de cada rueda, lo mismo que en un engargante cilíndrico (núm. 838). En seguida, como aquí se terminan las *coronas* de las dos ruedas de ángulo por las superficies cónicas que describirán las rectas $A'O_2$ y $A'o_2$ jirando al rededor de los ejes respectivos, los perfiles construidos arriba reemplazarán a los cojinetes desarrollados en la *fig.* 6; de modo que bastará aplicar estos perfiles sobre la misma corona, para poder ejecutar las diversas caras de los dientes y de los vacíos, conforme lo hemos dicho en el núm. 896.

Figuras que se han dejado de citar al márjen.

Párrafo		Párrafo		Párrafo	
13	Fig. 3.	360	Fig. 84.	650	Fig. 129.
160	En la páj. 97 lín. 6 al márjen debe citarse la fig. 49.	373	Fig. 85.	672	Fig. 128.
		434	Fig. 92.	674	Fig. 128.
		456	Fig. 96.	683	Fig. 128.
167	Fig. 49.	475	Fig. 4.	694	Fig. 134.
243	Fig. 60 y 61.	476	Fig. 6.	717	Fig. 142.
246	Fig. 63.	477	Fig. 7.	808	Fig. 2.
282	dice Fig. 68; debe decir Fig. 69.	507	Fig. 106.	842	Fig. 15.
		526	Fig. 112 y 113	854	Fig. 20.
325	Fig. 76.	617	Fig. 124.	872	Lám. 64. Fig. 8.
328	Fig. 74 *bis*.	628	Fig. 126.	886	Lám. 69. Fig. 2.

Erratas notables.

páj.	línea	dice:	léase:
2	5	estereometría	estereotomía
7	31	*al encuentro*	; *el encuentro*
17	26	proveer	preveer
30	18	(n. º 47)	(n. º 48)
36	9	el cuarto	el sesto
	10	el sesto	el cuarto
51	29	con *el lugar*	como *el lugar*
53	3	$\frac{a'}{b'}$	$\frac{b'}{a'}$
	22	y OB	y OC
54	32	$\frac{z}{c^2}$	$\frac{z^2}{c^2}$
55	12	esta hipérbola	este hiperboloide
59	16	sencilla	sencillez
64	19	*será parábola*	*será paralela*
76	9	en cada cono	en cada uno
79	36	la fir-	la for-
82	16	N'M'*y*	N'M'γ
83	21	proyeccion	construccion
	27	el plano M'TT	el plano M'T'T
	32	(MHEGE''*hcje*''M)	(MHEGE''*hege*''M)
86	18	$A_2D_2B_2$	$A_2D_2B_2$
89	10	A'D'δ	A'D'δ
95	24	indefinitivamente	indefinidamente
107	19	el plano AM''A'	el plano A*M*'A'
111	17	GND ...	CND....
113	8	si fuese la curba VNU sea plana	si fuese la curba dada VNU plana
114	4	P'P''B'	P'P''R'
119	10	BB'*b*''*b*'''....	BB'*b*''*b*'''. . al rededor de los puntos B, *b*'', *b*'''....
125	18	proximamente	precisamente
130	14	estereometría	estereotomía
	22	AMC	AMB
132	6	no daria	nos daria
138	3	otro punto	otro punto φ
142	15	D''δ=VD	D''δ=VD'
145	24	G'G'' y N'N''	G'G''' y N'N'''
	33	M'M'' y N'N''	M'M''' y N'N'''
152	5	PQR	PQR'
154	19	(GMH. G'H)	(GMH. G'H')
	27	A''B''A''	A''B''A'''
	33	A''B''A''	A''B''A'''
155	5	los puntos S', M'...	los puntos L', M'...
157	33	(K', L')	(K, L')
159	28	(G', G')	(G, G')
160	13	S''*a*''' y S''*a*'''	S''*a* y S''*a*'''
162	16	fáciles de hallar	fáciles de hallar, y cuyo punto de encuentro pertenece a la línea pedida.
168	27, 33	μ'	ν'
175	25	(OB, R')	(OR, R')
186	18	A'T'B	A'T'B'
189	21	SP y SQ	TP y SQ
190	17	μ'ε' y λ'δ'	μ'ε' y λ'd'
191	31	ALdK	ALBK
192	5	al hemisferio superior	al hemisferio inferior
197	7	fuese B'	fuese B''
	15	se cortan perpendicularmente.	se cortan visiblemente
199	8	α', β', γ	α', β', γ'
242	26	*una sola recta.*	*una sola curba.*
243	19	el hiperboloide meridiano.	la hipérbola meridiana
250	6	un plano arbitrario	un plano arbitrario P
	7	y paralelo	y perpendicular
259	18	la ordenada *k*	la ordenada *h*
272	17	$\frac{Pm}{PH}$	$\frac{PH}{Pm}$

pág.	línea	dice:	léase:
273	29	nn'	nn
274	31	el centro A_4M igual a la curba D4	el centro A_4 con un radio A_4M igual a la cuerda D4
276	17	AD	AD''
	22	R''=R=R'	R''=R—R'
278	35	triángulos iguales	triángulos isosecles
284	16	$=R+\left(R'-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)$ cos α	$=R+\left(R'-R'\cos\frac{R\alpha}{R'}\right)$ cos ω
285	6	x e y	x' e y'
	28	$\left(\frac{x}{A}\right)^m+\left(\frac{y}{A}\right)^m$	$\left(\frac{x}{A}\right)^m+\left(\frac{y}{B}\right)^m$
286	16	en A	en A_5
290	7	F'''K	F''K
	28	núm. 85	núm. 35
292	20	del libro VI	del libro I
297	20	AeC	BeC
300	3	a la directriz A	a la directriz B
	14	*Al concluir el primer párrafo, agréguese el siguiente que se omitió:* En lugar de emplear dos superficies cónicas cuyas trazas es preciso hallar, será en jeneral más cómodo construir la interseccion del primer cono LBM, con el cilindro vertical que proyectase a la directriz C al plano horizontal. De este modo, obtendríamos una curba ausiliar cuyo encuentro con la proyeccion vertical de C nos da a conocer al punto que es preciso unir con L, para tener una posicion de la jeneratriz.	
302	33	otros puntos	otras posiciones
307	14	cierto punto D'''	siete punto D''
308	11	dividirian a A y A'	dividirian a A y A'''
309	28	paralelos a B	paralelos a B'
311	14	cada jeneratriz A	cada jeneratriz A'
313	26	D'I'A' y D'I'6'	D'I'A' y D'I''6'
320	3	Si el plano π	Si el plano π'
330	18	en el trapecio	en el rombo
	20	:: GM : MD	:: GM : MH
331	7	vertical *og*	vertical *oo*
332	35	LM*l*, BN*r*	LM*l*, RN*r*
335	11	estereometría	estereotomía
338	25	D y A, D' y A'	D y A, D y A'
340	8	los dos puntos M y M''	los dos puntos M y M'
343	18	(BO, B''O'')	(BO, B'O'')
352	24	que sean primeramente	que sean sencillamente
360	1	tienen po	tienen poca

pág.	línea	dice:	léase:
364	25	$n=n'-\frac{E}{e}$	$n=n'-\frac{e}{E}$
366	18	$\tan\varphi=\frac{M}{E}\cdot\frac{PO}{PM}$	$\tan\varphi=\frac{M(\omega)}{E(\omega)}\cdot\frac{OP}{PM}$
372	36	(núm. 578)	(núm. 178)
377	10	(núm. 654, nota)	(núm. 656, nota)
	17	DMPGQE	DMPGQF
378	24	$mr_4r_5S''r_6$...	$mr_4r_5S''r_6$...
383	34	(YQ', Y'Q'')	(YQ', Y'Q'')
387	3	Qm=c	OC=c
388	10	$\frac{\cos^2\omega}{R}+\frac{\sin^2\omega}{R'}$	$\frac{\cos^2\omega}{R}+\frac{\sin^2\omega}{R'}$
389	14	O'p	[illegible]
392	25	hasta $=\rho+\infty$	hasta $\rho=+\infty$
393	12	máxima o mínima	máxima y mínima
396	6	a una distancia	a una distancia
398	10	núm. 490	núm. 609
413	23	Las condiciones	Las consideraciones
414	24	y segunda: sección principal	y una sección principal
423	20	cuya proyeccion M	cuya proyeccion M'
426	13	las tanjentes ET y FV	las tangentes ET y FV
446	14	hacer jirar que	hacer jirar
447	9	la distancia A_2e_2	la distancia A_2e_2
448	16	$C\alpha_1$ y $O'\alpha'$	$C\alpha_1$ y $C'\alpha'$
451	2	$mm_1-mm'=\left(\frac{\rho}{\rho-p}-\frac{\rho'}{\rho'-p}\right)\cos\varphi.ds$	$mm_1-mm'=\left(\frac{\rho}{\rho-p}-\frac{\rho'}{\rho'+p}\right)\cos\varphi.ds$
	25	la diferencia δ	la diferencia δ'
455	23	en el interior del círculo O	en el interior del círculo O'
456	3	[illegible]	[illegible]
464	19	tomando OZ=O'z	tomando O'L=O'z
465	9	cuyo radio será O'I	cuyo radio será O'I'
466	5	de esta circunferencia	de esta circunstancia
469	17	la paralela MGz	la paralela MGz
470	23	mientras que el contacto z se avance de A_2 hácia F_2.	mientras que el contacto z se avance de a_2 hácia z_2 sobre la rueda pequeña, en la grande marchará en sentido contrario de A_2 hácia F_2.
475	12	C_1D_1 y CD'	C_1D_1 y C'D'
476	22	segun un radio *fg*O	segun un radio *fg*O'
479	3	el radio vector	el radio vectos OB
487	31	sobre Oλ'	sobre Oλ

R4